



کتاب آنلاین®

مرجع تخصصی عرضه آنلاین کتاب

مشاهده

چند صفحه

اول کتاب

فهرست

(فصل ۲)

آشنایی با مقاطع مخروطی

۵۴	درس ۱: مکان هندسی
۶۲	درس ۲: دایره
۷۶	درس ۳: بیضی
۸۷	درس ۴: سهمی

(فصل ۱)

ماتریس و کاربردها

۷	درس ۱: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها
۲۳	درس ۲: دترمینان
۳۵	درس ۳: وارون ماتریس

آزمون‌های جامع

۱۳۷	آزمون جامع ۱
۱۳۷	آزمون جامع ۲
۱۳۸	آزمون جامع ۳
۱۳۸	آزمون جامع ۴
۱۳۹	آزمون جامع ۵

(فصل ۳)

بردارها

۱۰۰	درس ۱: معرفی فضای $\mathbb{R}^3$
۱۱۶	درس ۲: ضرب داخلی بردارها
۱۲۵	درس ۳: ضرب خارجی بردارها

پاسخ‌نامه

۱۴۰	پاسخ‌نامه تشریحی
۲۹۴	پاسخ‌نامه کلیدی

ماتریس و کاربردها

درس ۱

ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

ماتریس، آرایشی مستطیلی از اعداد حقیقی است که به هر عضو آن درایه می‌گوییم. هر ماتریس از تعدادی سطر و تعدادی ستون تشکیل شده است. اگر ماتریس A ، m سطر و n ستون داشته باشد، مرتبه ماتریس A ، $m \times n$ است و آن را به صورت $A_{m \times n}$ یا $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ نمایش می‌دهیم. a_{ij} یعنی درایه واقع در سطر i ام و ستون j ام ماتریس A . ماتریس مقابل دارای ۲ سطر و ۳ ستون است، پس مرتبه آن 2×3 است.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{سطر اول} \\ \rightarrow \text{سطر دوم} \end{matrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 ستون اول ستون دوم ستون سوم

درایه a_{21} را در نظر بگیرید! این درایه در سطر دوم و ستون اول واقع شده است.

مثلاً ماتریس $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ ، یک ماتریس 3×2 است (سه سطر و دو ستون دارد). در این ماتریس عدد ۴، درایه واقع در سطر سوم و ستون اول است.

(تمرین کتاب درسی)

تست کدام گزینه ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 4}$ با شرایط $\begin{cases} i+j & i > j \\ 7 & i = j \\ i^2 & i < j \end{cases}$ را مشخص می‌کند؟

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & 7 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 7 & 1 \end{bmatrix} \quad (۴)$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} \quad (۳)$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 9 & 7 \end{bmatrix} \quad (۲)$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} \quad (۱)$$

پاسخ گزینه ۳ ماتریس A یک ماتریس 3×4 است.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

در جایی که شماره سطر و ستون با هم برابرند ($i = j$) باید ۷ بگذاریم، در جایی که شماره سطر از شماره ستون کم‌تر است باید شماره سطر را به توان ۲ برسانیم و در ماتریس جایگزین کنیم. بنابراین داریم:

$$a_{12} = 1^2, a_{13} = 1^2, a_{14} = 1^2, a_{23} = 2^2, a_{24} = 2^2, a_{34} = 3^2$$

در جایی که شماره سطر از شماره ستون بزرگ‌تر است، شماره سطر و ستون را با هم جمع می‌کنیم و در ماتریس قرار می‌دهیم. پس:

$$a_{21} = 2+1=3, a_{31} = 3+1=4, a_{32} = 3+2=5$$

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

شناخت ماتریس‌های خاص یکی از اولین مراحل ورود به بازی ماتریس است.

ماتریس‌های خاص

۱ **ماتریس صفر**: ماتریسی که تمام درایه‌های آن صفر است و آن را با $\bar{O}$ نمایش می‌دهیم.

$$\bar{O}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[a \ b \ c \ d \ e]_{1 \times 5}$$

۲ **ماتریس سطری:** ماتریسی که فقط یک سطر دارد. مرتبه این ماتریس، $1 \times n$ است.

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

۳ **ماتریس ستونی:** ماتریسی که فقط یک ستون دارد. مرتبه این ماتریس، $n \times 1$ است.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$\downarrow$ قطر اصلی $\downarrow$ قطر فرعی

۴ **ماتریس مربعی:** ماتریسی که تعداد سطرها و ستون‌های آن با هم برابرند. مرتبه این ماتریس $n \times n$ است. این ماتریس دارای قطر اصلی و قطر فرعی است. در درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس مربعی $i < j$ ، روی قطر اصلی $i = j$ و پایین قطر اصلی $i > j$ است. (i شماره سطر و j شماره ستون درایه a_{ij} است.)

$$\begin{bmatrix} a & \circ & \circ \\ d & b & \circ \\ e & f & c \end{bmatrix}$$

۵ **ماتریس پایین‌مثلثی:** ماتریسی است مربعی که همه درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفرند.

$$\begin{bmatrix} a & d & e \\ \circ & b & f \\ \circ & \circ & c \end{bmatrix}$$

۶ **ماتریس بالامثلثی:** ماتریسی است مربعی که همه درایه‌های پایین قطر اصلی آن صفرند.

$$\begin{bmatrix} a & \circ & \circ \\ \circ & b & \circ \\ \circ & \circ & c \end{bmatrix}$$

۷ **ماتریس قطری:** ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی آن صفرند. (ماتریس قطری هم بالامثلثی است و هم پایین‌مثلثی)

$$\begin{bmatrix} k & \circ & \circ \\ \circ & k & \circ \\ \circ & \circ & k \end{bmatrix}$$

۸ **ماتریس اسکالر:** ماتریسی است قطری که تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابرند.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & \circ \\ \circ & 1 \end{bmatrix}$$

۹ **ماتریس همانی (واحد):** ماتریسی است اسکالر که درایه‌های روی قطر اصلی آن یک باشند.

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & \circ & \circ \\ \circ & 1 & \circ \\ \circ & \circ & 1 \end{bmatrix}$$

دقت کنید! گاهی ماتریس همانی را این‌گونه معرفی می‌کنند: $I_n = [a_{ij}]_{n \times n}$ که $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ \circ & i \neq j \end{cases}$

مثلاً اگر بگویند ماتریس $A = \begin{bmatrix} m+1 & n-1 \\ 2m & m+n-1 \end{bmatrix}$ ، قطری است؛ سریع نتیجه می‌گیریم درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی باید صفر باشند، یعنی

$$\begin{cases} n-1 = \circ \Rightarrow n = 1 \\ 2m = \circ \Rightarrow m = \circ \end{cases}$$

باید $n = 1$ و $m = \circ$ باشد. 😊

بنابراین ماتریس A به شکل $\begin{bmatrix} 1 & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix}$ است.

$$\begin{bmatrix} k & \circ & \circ \\ \circ & k & \circ \\ \circ & \circ & k \end{bmatrix}$$

حالا اگر گفته شده بود مجموع درایه‌های یک ماتریس اسکالر از مرتبه ۳ برابر ۶- است؛ می‌گفتیم ماتریس اسکالر 3×3 به شکل $\begin{bmatrix} k & \circ & \circ \\ \circ & k & \circ \\ \circ & \circ & k \end{bmatrix}$ و مجموع درایه‌های آن برابر با $3k$ است، نتیجه می‌گرفتیم $3k = -6$ و $k = -2$ و ماتریس به صورت $\begin{bmatrix} -2 & \circ & \circ \\ \circ & -2 & \circ \\ \circ & \circ & -2 \end{bmatrix}$ بوده است.

تساوی دو ماتریس

دو ماتریس A و B مساوی‌اند هرگاه: ۱ دو ماتریس، هم‌رتبه باشند و ۲ درایه‌های نظیر به نظیر در A و B برابر باشند.

مثلاً دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x & -1 \\ 2 & y \\ z & 1 \end{bmatrix}$ زمانی با هم برابرند که $x = 1$ ، $y = 5$ و $z = 3$ باشد.

مثال اگر $A = \begin{bmatrix} 2x-y & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $A = B$ ، در این صورت حاصل $x+y+z$ کدام است؟

پاسخ مرتبه دو ماتریس یکی است، بنابراین برای این که دو ماتریس برابر باشند باید درایه‌های دو ماتریس نظریه نظیر برابر باشند، یعنی:

$$\begin{cases} 2x-y=3 \\ 2x+y=5 \\ z=-2 \end{cases} \xrightarrow{+} 4x=8 \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=1$$

$$x+y+z=2+1-2=1$$

پس:

آشنایی با جمع، تفریق و ضرب ماتریس‌ها از مهم‌ترین موضوعات مربوط به ماتریس‌ها است که در ادامه به آن می‌پردازیم.

اعمال مقدماتی روی ماتریس‌ها

۱- جمع و تفریق

اگر دو ماتریس هم‌مرتبه باشند، با جمع یا تفریق کردن درایه‌های نظیر دو ماتریس، جمع یا تفریق دو ماتریس به دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+1 \\ 0+2 & 1+(-1) \\ 2+1 & 4+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3 & 2-1 \\ 0-2 & 1-(-1) \\ 2-1 & 4-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

تست اگر $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ و $a_{ij} = \begin{cases} 7 & i=j \\ i+j & i>j \\ i^2 & i<j \end{cases}$ در ماتریس $I-A$ کدام درایه وجود ندارد؟

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

(۴) مضرب ۷

(۳) مضرب ۵

(۲) مضرب ۴

(۱) مضرب ۳

پاسخ گزینه ۴ اول باید تکلیف ماتریس A را روشن کنیم.

قبلاً گفته بودیم که در درایه‌های پایین قطر اصلی ماتریس مربعی $i > j$ و در درایه‌های بالای قطر اصلی $i < j$ است.

$$I-A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -1 & -1 \\ -3 & -6 & -4 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

I (ماتریس همانی) هم که آشناست!

در بین درایه‌های $I-A$ عدد مضرب ۷ نداریم.

۲- ضرب عدد در ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow -3A = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -9 \\ -6 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

اگر عددی در ماتریس ضرب شود، در تمام درایه‌های آن ضرب می‌شود.

تک‌تک درایه‌های A را در -3 ضرب کردیم و $-3A$ به دست آمد.

نکته اگر ماتریس A را در (-1) ضرب کنیم، ماتریس $(-A)$ به دست می‌آید. به ماتریس $(-A)$ ، قرینه ماتریس A می‌گوییم.

چند ویژگی در مورد جمع، تفریق و ضرب عدد در ماتریس

۱ $A+B=B+A$ (خاصیت جابه‌جایی)

۲ $(A+B)+C=A+(B+C)$ (خاصیت شرکت‌پذیری)

۳ $A+\vec{0}=A$ (خاصیت عضو خنثی در جمع)

۴ $A+(-A)=\vec{0}$ (خاصیت عضو قرینه)

۵ $0 \times A = \vec{0}$

۶ $k(A \pm B) = kA \pm kB$

اگر ماتریس‌های A ، B و C هم‌مرتبه، m و k اعداد حقیقی باشند، آن‌گاه:

۷ $(k \pm m)A = kA \pm mA$

۸ $k(mA) = m(kA) = (km)A$

۹ $kA = \vec{0} \Rightarrow k=0$ یا $A = \vec{0}$

۱۰ $\begin{cases} A=B \Rightarrow kA=kB \\ kA=kB \xrightarrow{k \neq 0} A=B \end{cases}$

۳- ضرب دو ماتریس

اگر $A_{m \times n}$ ، $B_{n \times l}$ باشد، $A \times B$ زمانی وجود دارد که $n=k$ باشد، یعنی ضرب دو ماتریس زمانی قابل تعریف است که تعداد ستون‌های ماتریس اول با

$$A_{m \times n} \times B_{n \times l} \Rightarrow A_{3 \times 2} \times B_{2 \times 4} = C_{3 \times 4}$$

$n=k$

تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد. $A \times B$ ، ماتریسی است از مرتبه $m \times l$.

برای ضرب دو ماتریس، از ماتریس اول، سطر و از ماتریس دوم، ستون برمی داریم و درایه های هر سطر در ستون، نظیر به نظیر ضرب و حاصل با هم جمع می شود و در ماتریس حاصل ضرب جایگزین می شود.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1+0 & 4+1+0 \\ 1+3+8 & 2-3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 12 & 1 \end{bmatrix}$$

سطر اول
ستون اول
سطر اول
ستون دوم
سطر دوم
ستون اول
سطر دوم
ستون دوم

چگونگی به دست آوردن درایه واقع در سطر اول و ستون اول ماتریس حاصل ضرب را ببینید:

باید $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ را به دست آوریم. برای این کار، هر درایه در درایه نظیرش ضرب می شود، حاصل ضرب ها را با هم جمع می کنیم و به جای درایه واقع در سطر اول و ستون اول ماتریس حاصل ضرب قرار می دهیم.

$$2 \times 1 + (-1) \times 1 + 0 \times 4 = 2 - 1 + 0 = 1$$

جای درایه واقع در سطر اول و ستون اول ماتریس حاصل ضرب قرار می دهیم.

تست اگر $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \times A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3 & 1 & -1 \\ d & e & f \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $a+b+e$ کدام است؟

۲۱ (۴)

۱۸ (۳)

۱۵ (۲)

۱۱ (۱)

پاسخ گزینه ۱

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ماتریس 3×1 که B است در ماتریس $A_{m \times n}$ باید ضرب شود تا یک ماتریس 3×3 به ما بدهد.

$$B_{3 \times 1} \times A_{m \times n} = C_{3 \times 3}$$

برای این که دو ماتریس B و A ضرب پذیر باشند باید $m=1$ باشد و برای این که ضرب B در A ماتریس 3×3 شود باید $n=3$ باشد؛ یعنی ماتریس A

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3 & 1 & -1 \\ d & e & f \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ x & y & z \\ 3x & 3y & 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3 & 1 & -1 \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

از مرتبه 1×3 است. با فرض A به شکل $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ داریم:

$$a+b+e=2x+2y+3y=2x+5y=2(3)+5(1)=11$$

واضح است که $a=2x$ ، $b=2y$ و $e=3y$ ، بنابراین:

مثال اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ باشند، درایه واقع در سطر دوم و ستون سوم ماتریس $A \times B$ را به دست آورید.

(کار در کلاس کتاب درسی)

پاسخ فب! انگار راهی نداریم و باید ماتریس A که 3×2 است را در ماتریس B که یک ماتریس 2×3 است، ضرب کنیم. ماتریس $A \times B$ یک ماتریس 3×3 خواهد شد.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -4 \\ 7 & -2 & 7 \\ 0 & -3 & -7 \end{bmatrix}$$

درایه واقع در سطر دوم و ستون سوم $A \times B$ برابر ۷ است.

به جای این که دو ماتریس را در هم ضرب کنیم تا درایه مورد نظرمان را به دست آوریم، می توانستیم سطر دوم A را در ستون سوم B ضرب کنیم تا درایه واقع در سطر دوم و ستون سوم $A \times B$ به راحتی به دست آید.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-5 \\ 2+5 \\ 3-10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ -7 \end{bmatrix}$$

دقت کنید! اگر $A \times B = C$ باشد، آن گاه درایه c_{ij} از ضرب سطر i ام ماتریس A در ستون j ام ماتریس B به دست می آید.

$$c_{ij} = [A \text{ سطر } i \text{ ام}] \times [B \text{ ستون } j \text{ ام}]$$

تست اگر برای دو ماتریس A و B روابط $3A + 2B = I$ و $B - A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ برقرار باشند، درایه واقع در سطر دوم و ستون اول BA کدام است؟

۷ (۴)

صفر (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

پاسخ گزینه ۲ $B - A$ مربعی و 2×2 است، پس A و B نیز مربعی و 2×2 هستند.

به کمک داده‌های سؤال می‌توانیم ماتریس‌های A و B را به دست آوریم. ببینید

$$\begin{cases} 3A + 2B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 2B - 2A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 10 & 6 \end{bmatrix} \end{cases} \xrightarrow{-} 5A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -10 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

حالا که A را داریم، B به راحتی به دست می‌آید.

$$B - A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

می‌توانستیم بگوییم درایه واقع در سطر دوم و ستون اول BA از ضرب سطر دوم B در ستون اول A به دست می‌آید.

$$BA \text{ درایه سطر دوم و ستون اول} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 3 - 4 = -1$$

مثال اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ باشند، درایه واقع در سطر سوم و ستون دوم ماتریس $(A \times B) \times C$ را به دست آورید.

پاسخ می‌دانیم ضرب ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد؛ یعنی $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ است. می‌توانیم اول ضرب دو ماتریس B و C که هر دو مربعی هستند را محاسبه کنیم و سپس A را در حاصل ضرب B و C ضرب کنیم.

$$B \times C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \quad A \times (B \times C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 20 \\ -3 & -2 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$$

درایه واقع در سطر سوم و ستون دوم ماتریس $(A \times B) \times C$ برابر با -5 است.

به جای این کار می‌توانستیم سطر سوم A را در ماتریس B و ستون دوم C ضرب کنیم تا درایه مورد نظرمان به دست آید.

$$(A \times B) \times C \text{ درایه سطر سوم و ستون دوم} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = -5$$

دقت کنید! اگر $(A \times B) \times C = D$ باشد، آنگاه درایه واقع در سطر i ام و ستون j ام ماتریس D از رابطه $d_{ij} = [A \text{ سطر } i\text{ام}] \times [B \text{ ماتریس}] \times [C \text{ ستون } j\text{ام}]$ به دست می‌آید.

ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها

۱ در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \quad B \times A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

دیدید؟! $A \times B$ و $B \times A$ برابر نشدند؛ در حالت کلی $A \times B$ و $B \times A$ برابر نیستند.



می بینید.

الف)

دقت کنید! در حالت های خاصی دو ماتریس می توانند خاصیت **تعویض پذیری** ($A \times B = B \times A$) داشته باشند. چند حالت مهم را در زیر

$$AI = IA = A$$

ضرب ماتریس **همانی** (I_n) در ماتریس مربعی $A_{n \times n}$ ، خاصیت جابه جایی (تعویض پذیری) دارد.

$$B = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \text{ مثلاً اگر}$$

ب)

$$A \times B = B \times A = \begin{bmatrix} am & 0 & 0 \\ 0 & bn & 0 \\ 0 & 0 & cp \end{bmatrix}$$

آن گاه:

پ)

ضرب ماتریس **اسکالر** با هر ماتریس مربعی هم مرتبه با آن، خاصیت جابه جایی دارد.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}}_B = \underbrace{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}}_A = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \\ kg & kh & ki \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}_B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

ت) دو ماتریس به شکل $\begin{bmatrix} m & n \\ n & m \end{bmatrix}$ ، تعویض پذیرند.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}}_A = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

دیدید که $A \times B$ و $B \times A$ برابر شدند، بنابراین دو ماتریس A و B تعویض پذیرند.

ث)

ضرب دو ماتریس به شکل $\begin{bmatrix} m & n \\ -n & m \end{bmatrix}$ خاصیت جابه جایی دارد.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}}_B = \begin{bmatrix} -5 & -14 \\ 14 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}}_A = \begin{bmatrix} -5 & -14 \\ 14 & -5 \end{bmatrix}$$

از آن جایی که $A \times B = B \times A$ شد، نتیجه می گیریم ماتریس های A و B تعویض پذیرند.

$$AB = AC \not\Rightarrow B = C$$

۲) اگر $AB = AC$ باشد، نمی توان نتیجه گرفت $B = C$ است (حذف برقرار نیست).

فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ باشد.

$AB = AC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ است. آیا ماتریس های B و C برابرند؟! معلوم است که جواب «نه» است. این یعنی ممکن است $AB = AC$ باشد اما $B \neq C$ و برابر نباشند.

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

۳) ضرب ماتریس ها خاصیت شرکت پذیری دارد.

تست جواب های معادله $\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{0}$ کدام اند؟

۱ و ۳ (۴)

-۱ و ۳ (۳)

۱ و -۳ (۲)

-۱ و -۳ (۱)

پاسخ گزینه ۲

از قبل آگاهی داریم که ضرب ماتریس ها دارای خاصیت شرکت پذیری است، یعنی:

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ 2x+3 \end{bmatrix}$$

پس ابتدا حاصل $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$ را به دست می آوریم.

$$\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix}_{1 \times 2} \begin{bmatrix} -x \\ 2x+3 \end{bmatrix}_{2 \times 1} = [-x^2 + 2x+3]_{1 \times 1} = [0]$$

حالا باید $\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x \\ 2x+3 \end{bmatrix} = \vec{0}$ برابر با $\vec{0}$ باشد، بنابراین:

$$-x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-1 \end{cases}$$

یعنی باید $-x^2 + 2x + 3 = 0$ باشد، پس:

معادله ماتریسی داده شده دارای دو جواب ۳ و -۱ است.

۲ در ضرب ماتریس‌ها خاصیت توزیع پذیری (و فاکتورگیری) برقرار است. (توزیع پذیری از چپ) $A \times (B \pm C) = A \times B \pm A \times C$
(توزیع پذیری از راست) $(B \pm C) \times A = B \times A \pm C \times A$

۵ اگر حاصل ضرب دو ماتریس صفر شود، نمی‌توان نتیجه گرفت یکی از دو ماتریس صفر بوده است. به عبارت دیگر ممکن است از ضرب کردن دو ماتریس غیرصفر یک ماتریس صفر به دست آید. مثلاً:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، حاصل ضرب دو ماتریس صفر شده اما هیچ کدام از ماتریس‌ها، ماتریس صفر نبوده‌اند.

۶ حاصل ضرب دو ماتریس قطری، یک ماتریس قطری است و برای محاسبه آن باید درایه‌های روی قطر اصلی دو ماتریس را نظریه‌نظیر در هم ضرب کرد.

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad & 0 & 0 \\ 0 & be & 0 \\ 0 & 0 & cf \end{bmatrix}$$

۷ ضرب ماتریس قطری در یک ماتریس مربعی هم مرتبه:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}}_{\text{قطری}} \underbrace{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}}_A = \begin{bmatrix} ma & mb & mc \\ nd & ne & nf \\ pg & ph & pi \end{bmatrix}$$

همان‌طور که می‌بینید! اگر ماتریس قطری از چپ در ماتریس A ضرب شود، سطر اول A در m، سطر دوم A در n و سطر سوم A در p ضرب می‌شود.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}}_{\text{قطری}} = \begin{bmatrix} ma & nb & pc \\ md & ne & pf \\ mg & nh & pi \end{bmatrix}$$

اگر ماتریس قطری از راست در ماتریس A ضرب شود، ستون اول A در m، ستون دوم A در n و ستون سوم A در p ضرب می‌شود.

۸ اگر دو ماتریس A و B تعویض پذیر باشند یعنی $A \times B = B \times A$ باشد، اتحادها در مورد آن‌ها برقرارند. اتحادهای مهم را ببینید

$$۱) (A+B)^T = A^T + B^T \quad ۲) (A-B)^T = A^T + B^T - 2AB \quad ۳) (A-B)(A+B) = A^T - B^T$$

$$۴) A^T + B^T = (A+B)(A^T - AB + B^T) \quad ۵) A^T - B^T = (A-B)(A^T + AB + B^T)$$

دقت کنید! اتحادهای بالا در مورد $A_{n \times n}$ و I_n برقرارند. (چون I و A تعویض پذیر هستند؛ یعنی $IA = AI = A$)

تست اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ، ضرب ماتریس A با چه تعداد از ماتریس‌های زیر، خاصیت جابه‌جایی دارد؟

الف) $I - A$	ب) $(A+I)^T$	پ) $A^T + 2A - I$	ت) A^T
۴ (۱)	۳ (۲)	۲ (۳)	۱ (۴)

پاسخ گزینه ۱ می‌دانیم A و I تعویض پذیرند (یعنی $AI = IA$)، پس ضرب هر ماتریس که فقط شامل ماتریس‌هایی از A و I باشد، با ماتریس A خاصیت جابه‌جایی دارد.

بدون این که ضریب انجام دهیم، خیلی شیک می‌گوییم ضرب A با هر چهار ماتریس $I - A$ ، $(A+I)^T$ ، $A^T + 2A - I$ و A^T خاصیت جابه‌جایی دارد.

تست اگر $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ دو ماتریس 3×3 با این ویژگی باشند که $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i+j=2k \\ 0 & i+j=2k+1 \end{cases}$ و $b_{ij} = \begin{cases} 1 & i \leq j \\ 0 & i > j \end{cases}$ ، آن‌گاه سطر اول ماتریس $(A-B)^T$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

۱) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	۲) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$	۳) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	۴) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
---	---	--	---

پاسخ گزینه ۳ اول باید تکلیف درایه‌های دو ماتریس A و B را مشخص کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

دقت کنید! در ماتریس A هر جا مجموع شماره سطر و ستون یک درایه، عددی فرد بود به جای آن صفر و هر جا مجموع شماره سطر و ستون درایه، عددی زوج بود به جای آن یک گذاشتیم.

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حالا نوبت $A - B$ است که خودش را به شما نشان دهد!

برای این که سطر اول $(A - B)^T$ را به دست بیاوریم کافی است سطر اول $A - B$ را در هر سه ستون $A - B$ ضرب کنیم.

$$(A - B)^T \text{ سطر اول} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تست اگر $A^T = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 15 & 13 \end{bmatrix}$ ، $B^T = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{bmatrix}$ و $A - B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$ باشند، $AB + BA$ کدام است؟

$$\begin{matrix} (1) & \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -27 & -16 \end{bmatrix} \\ (2) & \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -27 & -16 \end{bmatrix} \\ (3) & \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -27 & -16 \end{bmatrix} \\ (4) & \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ -27 & -16 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

پاسخ گزینه ۳ A^T ، B^T و $A - B$ ما را یاد اتحاد می‌اندازد؛ اما یادتان باشد اگر A و B تعویض‌پذیر نباشند، اتحاد بی‌اتحاد! یعنی:

$$(A - B)^T = (A - B)(A - B) = A^T - AB - BA + B^T$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 15 & 13 \end{bmatrix} - AB - BA + \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 54 & 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 27 & 20 \end{bmatrix} - (AB + BA)$$

$$AB + BA = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 27 & 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 54 & 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -27 & -16 \end{bmatrix}$$

توان ماتریس‌ها

اگر ماتریس A مربعی باشد، داریم:

$$A^1 = A$$

$$A^2 = A.A$$

$$A^3 = A.A^2 = A^2.A$$

⋮

$$A^n = A.A^{n-1} = A^{n-1}.A$$

دقت کنید! اگر A ، ماتریسی مربعی، m و n طبیعی و k عددی حقیقی باشد، آن‌گاه:

$$(1) \quad I^n = I$$

$$(2) \quad (kA)^n = k^n A^n$$

$$(3) \quad A^m \times A^n = A^{m+n}$$

$$(4) \quad (A^m)^n = A^{mn}$$

برای محاسبه توان‌های ماتریس مربعی A (به طور خاص در مورد توان‌های بزرگ!)، راه کلی این است که بین A ، A^2 ، A^3 و ... رابطه‌ای پیدا کنیم.

(تمرین کتاب درسی)

مثال اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، A^7 و A^{14} را به دست آورید.

پاسخ ابتدا A^2 را به دست می‌آوریم.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

حالا که $A^2 = I$ شده، خیلی راحت A^7 و A^{14} را به دست می‌آوریم.

$$A^7 = (A^2)^3 \times A = I^3 \times A = IA = A$$

$$A^{14} = (A^2)^7 = I^7 = I$$

اگر $A^2 = I$ باشد به ماتریس A ، ماتریس متناوب گویند؛ زیرا توان‌های زوج این ماتریس برابر I و توان‌های فرد آن برابر با خود ماتریس است.

تست اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ باشد، A^{2021} کدام است؟

$$\begin{matrix} (1) & -I \\ (2) & \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ (3) & I \\ (4) & \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

پاسخ گزینه ۲

برای رسیدن به A^{2021} راهی به جز پیدا کردن A^2 نداریم.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

$$A^{2021} = (A^2)^{1010} \times A = (-I)^{1010} \times A = -A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

حالا شرایط بهتر شد. 😊

تست اگر

مجموع درایه‌های سطر سوم $A^T B^T$ کدام است؟ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

۱۶ (۱)

۸ (۲)

-۸ (۳)

-۱۶ (۴)

پاسخ گزینه ۲

یادتان باشد! اگر $A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ باشد (A مثلثی باشد) و A^n را بخواهیم ($n \in \mathbb{N}$)، درایه‌های روی قطر اصلی به توان n می‌رسند و صفرها سر جایشان می‌مانند اما در مورد بقیه درایه‌ها چیزی نمی‌دانیم. بنابراین:

$$A^4 = \begin{bmatrix} 1^4 & a & b \\ 0 & 3^4 & c \\ 0 & 0 & (-1)^4 \end{bmatrix}, \quad B^3 = \begin{bmatrix} 1^3 & x & y \\ 0 & 1^3 & z \\ 0 & 0 & 2^3 \end{bmatrix}$$

$$A^4 B^3 = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 81 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

از ما مجموع درایه‌های سطر سوم $A^4 B^3$ خواسته شده، پس کافی است سطر سوم A^4 را در B^3 ضرب کنیم تا سطر سوم $A^4 B^3$ مشخص شود.

$$A^4 B^3 \text{ سطر سوم} = \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های سطر سوم $A^4 B^3$ برابر ۸ است.

تست اگر

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه A^{1399} کدام است؟

$1399A$ (۴)

$3^{1399} I$ (۳)

$3^{1398} A$ (۲)

$3^{1399} A$ (۱)

پاسخ گزینه ۲

روش اول

A^2 را به دست می‌آوریم ببینیم تکلیفمان

مشخص می‌شود یا نه!

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ \frac{3}{2} & 3 & \frac{9}{2} \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} = 3A$$

$$A^2 = 3A$$

$$A^2 = A^T \cdot A = (3A) \cdot A = 3A^2 = 3(3A) = 3^2 A$$

$$A^4 = A^2 \cdot A = (3^2 A) \cdot A = 3^2 A^2 = 3^2 (3A) = 3^3 A, \dots$$

$$A^{1399} = 3^{1398} A$$

$$A^{1399} = 3^{1398} A$$

باید به دنبال رابطه‌ای بین A^2 ، A^3 و ... باشیم.

خیلی ساده! می‌توان نتیجه گرفت:

روش دوم

اگر $A^2 = kA$ باشد، $A^n = k^{n-1} A$ است. در این تست که $A^2 = 3A$ شده، بنابراین:

تست اگر A و B دو ماتریس مربعی و $AB = A$ و $BA = B$ باشد، حاصل $A + A^2 + \dots + A^{1399}$ کدام است؟

- (۱) $1398A$ (۲) $1399A$ (۳) $1400I$ (۴) $1400A$

پاسخ گزینه ۲

طرفین رابطه $AB = A$ را از راست در A ضرب می‌کنیم و به جای BA ، B قرار می‌دهیم.

$$AB = A \xrightarrow{\times A} (AB)A = A^2 \Rightarrow A \underbrace{(BA)}_B = A^2$$

$$AB = A^2 \xrightarrow{AB=A} A = A^2$$

اگر $A^2 = A$ باشد، آن‌گاه $A^n = A$ ($n \in \mathbb{N}$) است و در نتیجه داریم: $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{1399} = A + A + A + \dots + A = 1399A$



دقت کنید! با توجه به قسمت‌های بالا، می‌توان روش به دست آوردن توان ماتریس‌های خاص را به صورت زیر دسته‌بندی کرد:

۱) اگر ماتریس A قطری باشد، برای به دست آوردن A^n ، کافی است درایه‌های روی قطری اصلی A را به توان n برسانیم. ($n \in \mathbb{N}$)

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix}$$

۲) اگر ماتریس A مربعی و $A^2 = A$ باشد، آن‌گاه تمام توان‌های طبیعی A با خود A برابرند.

حواستان هست! ماتریس I به هر توان طبیعی برسد برابر با I می‌شود. ($I^n = I$)

$$A^2 = kA \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} A^n = k^{n-1}A$$

۳) اگر ماتریس A مربعی و $A^2 = kA$ باشد، آن‌گاه:

۴) اگر ماتریس A مربعی و $A^2 = I$ باشد، آن‌گاه اگر A به توان طبیعی برسد، داریم:

$$A^2 = I \Rightarrow \begin{cases} A^{\text{فرد}} = A \\ A^{\text{زوج}} = I \end{cases}$$

در برخورد با توان‌های ماتریس‌ها، اولین قدم، یافتن A^2 است. اگر A قطری باشد یا A^2 یکی از حالت‌های خاص بالا باشد، تکلیف ما روشن است. در غیر این صورت برای یافتن توان‌های بزرگ ماتریس A باید سعی کنیم بین A ، A^2 ، A^3 و ... رابطه‌ای پیدا کنیم.

دختران و پسران عزیز، سلام!

قبل از حل تست‌ها به نکات زیر توجه کنید! ...

- ۱) درس‌نامه هر بخش را دقیق و کامل مطالعه کنید و مثال‌ها و تست‌های درس‌نامه را با دقت حل کنید.
- ۲) تست‌هایی که علامت دارند کمی سخت‌تر از بقیه تست‌ها هستند.
- ۳) پس از تسلط کامل به تست‌های هر بخش سراغ تست‌های سری $[Z]$ بروید. (البته هیچ اجباری به زدن تست‌های سری $[Z]$ نیست).
- ۴) در مواقع اورژانسی که برای زدن همه تست‌ها وقت ندارید، تست‌های رنگی (به ویژه تست‌های کنکورهای سراسری و تمرین کتاب درسی) تسلط نسبتاً خوبی بر مطالب هر بخش برای شما ایجاد خواهند کرد.
- ۵) حتماً حتماً پاسخ تست‌ها را با دقت و وسواس بررسی کنید؛ حتی اگر گزینه درست را به عنوان پاسخ انتخاب کرده باشید.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- اگر $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ و $i = j$ و $\begin{bmatrix} i+j & i < j \\ -i & \\ 3 & \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $a_{21} + a_{12} - a_{22}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۲- تعریف $a_{ij} = \begin{cases} i+j & i = j \\ i-j & i > j \\ 2j-i & i < j \end{cases}$ ، نمایش کدام ماتریس 3×3 زیر است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$



(کانون فرهنگی آموزش ۹۷)

۳- اگر $A = [a_{ij}] = [\alpha i + \beta j]_{3 \times 3}$ و $B = [b_{ij}] = [2\alpha j - 3\beta i]_{3 \times 3}$ باشند، مجموع درایه‌های ستون دوم A و سطر سوم B کدام است؟

$8\alpha - 7\beta$ (۴) $7\alpha - \beta$ (۳) $2\alpha - 9\beta$ (۲) $3\alpha - 7\beta$ (۱)

۴- مجموع درایه‌های یک ماتریس اسکالر 3×3 ، برابر با ۱ است. حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی این ماتریس کدام است؟

27 (۴) $\frac{1}{27}$ (۳) 8 (۲) $\frac{1}{8}$ (۱)

۵- اگر $3X + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + 4I$ باشد، حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس X و حاصل ضرب درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی X ، چه قدر اختلاف دارند؟

$\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{7}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{9}$ (۱)

۶- اگر $A = [i - j^2]_{3 \times 3}$ و $B = [6 - ij]_{3 \times 3}$ ، مجموع درایه‌های سطر دوم ماتریس $A + B$ کدام است؟

-2 (۴) 2 (۳) 0 (۲) 5 (۱)

۷- اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & m & n-1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & m-2 & n+1 \end{bmatrix}$ ، $C = A - 2B$ ، $c_{11} = -c_{22} + 1$ و $c_{23} = -3c_{13}$ باشد، $n - m$ کدام است؟

-8 (۴) 2 (۳) 4 (۲) 8 (۱)

(کانون فرهنگی آموزش ۹۷)

۸- اگر $A = \begin{bmatrix} m & 3 & 4 \\ 4 & n-1 & 8 \\ 6 & 9 & k+1 \end{bmatrix}$ ، $B = [i + ij]_{3 \times 3}$ و $A = B$ باشد، آن‌گاه حاصل $m + n + k$ کدام است؟

6 (۴) 20 (۳) 16 (۲) 25 (۱)

۹- اگر $A = \begin{bmatrix} m+1 & 1 & x \\ n-1 & 2 & m-p \\ k+2 & 3 & y \end{bmatrix}$ و $B = [ij - i]_{3 \times 3}$ ، $A = B$ باشد، حاصل $x - y - k + p + n - m$ کدام است؟

-5 (۴) -7 (۳) -9 (۲) -11 (۱)

۱۰- دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} p+n & -11 \\ m-2 & -3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -7 & p-n \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ مساوی هستند. ماتریس $C = [c_{ij}]_{3 \times 3}$ با تعریف $i = j$ با $c_{ij} = \begin{cases} \lfloor \frac{m-j}{2n} \rfloor & i < j \\ \lfloor \frac{i+p}{m+n} \rfloor & i = j \\ \lfloor \frac{i+j}{3m-n} \rfloor & i > j \end{cases}$ چگونه ماتریسی است؟

(۱) ماتریس صفر (۲) ماتریس همانی (۳) ماتریس اسکالر (۴) ماتریس غیرقطری

۱۱- اگر $A = [i - j]_{2 \times 2}$ ، $B = \begin{bmatrix} m & m \\ 2+n & n \end{bmatrix}$ و $A - B$ ماتریسی اسکالر باشد، حاصل ضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی $A - B$ کدام است؟

-1 (۴) 0 (۳) 1 (۲) 4 (۱)

۱۲- اگر $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$ با تعریف $b_{ij} = \begin{cases} i+j & i \leq j \\ j-i & i > j \end{cases}$ و A یک ماتریس اسکالر با مجموع درایه‌های ۱۲ باشند که در رابطه $A + I = B + C$ صدق کنند، مجموع درایه‌های ماتریس C کدام است؟

-4 (۴) -5 (۳) -9 (۲) -12 (۱)

۱۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، کوچک‌ترین درایه ماتریس AB کدام است؟

-2 (۴) 0 (۳) 1 (۲) 2 (۱)

(ریاضی قارچ ۹۸)

۱۴- به ازای کدام مقدار x و y ، ماتریس $\begin{bmatrix} x & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری است؟

$x = 1, y = -5$ (۴) $x = 2, y = -5$ (۳) $x = 2, y = -7$ (۲) $x = 1, y = -7$ (۱)

۱۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $A \times B$ یک ماتریس قطری باشد، مجموع درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی $B \times A$ کدام است؟

0 (۴) 8 (۳) 14 (۲) 24 (۱)



۱۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} x & 4 \\ 3 & y \end{bmatrix}$ و ماتریس BA قطری باشد، ماتریس $\begin{bmatrix} -3x & x-y-1 \\ y^2-x^2+x+3 & -4y \end{bmatrix}$ چگونه ماتریسی است؟
 (۱) ماتریس همانی (۲) ماتریس اسکالر (۳) ماتریس قطری (۴) ماتریس صفر

۱۷- دو ماتریس $A = [a_{ij}]_{r \times r}$ و $B = [b_{ij}]_{r \times r}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} -i-1 & i=j \\ m & i < j \\ n & i > j \end{cases}$ و $b_{ij} = \begin{cases} -i-1 & i=j \\ m & i < j \\ n & i > j \end{cases}$ تعریف شده‌اند و m و n اعداد طبیعی

یک‌رقمی هستند. اگر $B \times A$ ماتریسی قطری باشد، ماتریس $\begin{bmatrix} m-3 & \frac{m}{n} \\ \frac{-n}{m}+1 & m-n \end{bmatrix}$ چگونه ماتریسی است؟

(۱) غیرقطری (۲) همانی (۳) قطری (۴) اسکالر

۱۸- اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & m \\ n & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} m & -1 \\ -1 & n \end{bmatrix}$ در شرط $AB - BA = \bar{O}$ صدق کنند، حاصل $m^2 - n^2$ کدام است؟

(۱) -۲ (۲) صفر (۳) ۲ (۴) نامشخص

۱۹- اگر $[2 \ 1] \times A = [3 \ 5]$ و $[2 \ 1] \times A = [-1 \ 2]$ باشد، حاصل $[8 \ 9] \times A$ کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 1 & 9 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 & -9 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -1 & 9 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} -1 & -9 \end{bmatrix}$

۲۰- چند ماتریس $A_{2 \times 2}$ وجود دارد که $A \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ باشد؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

۲۱- اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$ و $B = [b_{ij}]_{2 \times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} i^2-1 & i=j \\ i-j & i > j \\ j-i & i < j \end{cases}$ و $b_{ij} = \begin{cases} i^2+1 & i=j \\ i+j & i > j \\ i-j+2 & i < j \end{cases}$ باشند، $A \times B$ کدام است؟ (تمرین کتاب درسی)

(۱) $\begin{bmatrix} -3 & -5 & -1 \\ 11 & 16 & 3 \\ 7 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} -1 & -5 & -5 \\ 5 & 18 & 19 \\ 5 & 11 & 13 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 11 & 16 & 3 \\ 7 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 5 & 18 & 19 \\ 5 & 11 & 13 \end{bmatrix}$

۲۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 7 & 2a & 0 \\ 8 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2b & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 4c \end{bmatrix}$ و $4a + 3b - 2c = 7$ باشد، مجموع عناصر روی قطر اصلی BA چه قدر است؟

(۱) ۱۴ (۲) ۱۶ (۳) ۱۸ (۴) ۲۱

۲۳- اگر $A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = [b_{ij}] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $C = A \times B = [c_{ij}]$ ، آن‌گاه حاصل c_{33} کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱۶ (۳) ۲۲ (۴) ۲۴

۲۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، درایهٔ سطر اول و ستون سوم ماتریس ABC کدام است؟

(۱) ۲۱ (۲) ۷۵ (۳) ۸۰ (۴) ۱۲۰ (کانون فرهنگی آموزش ۹۷)

۲۵- اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$ و ضرب دو ماتریس خاصیت جابه‌جایی داشته باشد، $\alpha + \beta$ کدام است؟

(۱) ۷ (۲) ۵ (۳) ۳ (۴) ۱

۲۶- اگر ضرب دو ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} \sin \alpha & x^4 \\ 8x & \cos \alpha \end{bmatrix}$ خاصیت جابه‌جایی داشته باشد ($x \neq 0$)، حاصل $x + \tan \alpha$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (کانون فرهنگی آموزش ۹۷)

۲۷- حاصل $\sin 75^\circ \begin{bmatrix} \cos 15^\circ & \cos 75^\circ \\ \cos 105^\circ & \cos 15^\circ \end{bmatrix} + \cos 75^\circ \begin{bmatrix} \sin 15^\circ & -\sin 105^\circ \\ \cos 15^\circ & \cos 75^\circ \end{bmatrix}$ کدام است؟

(۱) I (۲) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (۳) $\bar{O}$ (۴) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$



(سراسری ریاضی ۹۸)

۲۸- از رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix}$ ، عدد غیر صفر x کدام است؟

(۱) $\frac{2}{9}$ (۲) $\frac{3}{8}$ (۳) $\frac{4}{9}$ (۴) $\frac{3}{5}$

۲۹- حاصل جمع ریشه‌های معادله $\begin{bmatrix} x & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ x \\ 1 \end{bmatrix}$ کدام است؟

(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) $-\frac{3}{2}$

(کانون فرهنگی آموزش ۹۷)

۳۰- اگر α و β ریشه‌های معادله $\begin{bmatrix} x & 2 & 1 \\ 1 & -x & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ باشند، حاصل $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ کدام است؟

(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{7}{2}$ (۴) $\frac{9}{2}$

(کانون فرهنگی آموزش ۹۷)

۳۱- اگر α و β ریشه‌های معادله $\begin{bmatrix} x & 2 \\ 1 & -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 5 \end{bmatrix}$ باشند، حاصل $\alpha^2 + \beta^2$ کدام است؟

(۱) ۸۴ (۲) ۵۴ (۳) ۴۴ (۴) معادله جواب ندارد.

۳۲- مجموع معکوس ریشه‌های معادله $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & x & 0 \\ -2 & 1 & x+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) -۱ (۴) -۲

۳۳- اگر A و B هر دو 2×2 باشند و $BA = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $A + B \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} A + B \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} B$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) -۲ (۳) -۶ (۴) -۱۲

۳۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ m & 1 \end{bmatrix}$ و $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -6 & a_{22} \end{bmatrix}$ ، $A^T = m$ کدام است؟

(۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۳

۳۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & a \\ 1 & b \end{bmatrix}$ و $A^T = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -a \\ -(b+1) & -a \end{bmatrix}$ کدام است؟

(۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۵ (۴) ۷

(سراسری ریاضی ۸۴)

۳۶- اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ و $A^T = \alpha A + \beta I$ ، دو تایی (α, β) کدام است؟

(۱) $(2, 11)$ (۲) $(2, 13)$ (۳) $(4, 11)$ (۴) $(4, 3)$

(ریاضی قارچ ۹۶)

۳۷- ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 2 & i \neq j \end{cases}$ تعریف شده است. مجموع درایه‌های ماتریس $A^T - 4A$ کدام است؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۵ (۳) ۱۸ (۴) ۲۱

(سراسری ریاضی ۸۳)

۳۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^7 - A^4$ کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

۳۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، درایه سطر دوم و ستون سوم ماتریس A^3 کدام است؟

(۱) $3x$ (۲) $3y$ (۳) $2(x^2 + y^2)$ (۴) $2(x^2 + y^2)$



(سراسری ریاضی ۹۹)

۴۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس A^3 کدام است؟

- (۱) $[30 \ 6 \ 64]$ (۲) $[30 \ 6 \ 78]$ (۳) $[24 \ 8 \ 86]$ (۴) $[30 \ 6 \ 86]$

(ریاضی خارج ۹۹)

۴۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس A^4 کدام است؟

- (۱) $[0 \ 1 \ 0]$ (۲) $[1 \ 0 \ 0]$ (۳) $[0 \ 0 \ 1]$ (۴) $[1 \ 0 \ 1]$

۴۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $(A+I)^6 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ آن گاه $a-b$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۳۶

۴۳- در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، حاصل جمع درایه‌های ماتریس $A + A^2 + A^3 + A^4$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۱۲

۴۴- اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های روی قطر اصلی $B^T A$ کدام است؟

- (۱) -۹ (۲) -۵ (۳) -۱ (۴) ۹

۴۵- اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ باشند، درایه واقع در سطر سوم و ستون دوم ماتریس $A^T B$ کدام است؟

- (۱) -۵۰ (۲) -۴۳ (۳) ۱۸ (۴) ۶۸

۴۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، در ماتریس A^6 مجموع درایه‌های ستون دوم کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۲۷

۴۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل جمع درایه‌های سطر اول ماتریس A^6 کدام است؟

- (۱) ۳۱ (۲) ۳۷ (۳) $(2 \times 3^5) + 1$ (۴) $(2 \times 3^6) + 1$

(ریاضی خارج ۹۲)

۴۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، ماتریس A^4 کدام می‌باشد؟

- (۱) بالامثلثی (۲) پایین‌مثلثی (۳) قطری غیرهمانی (۴) همانی

۴۹- اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های A^5 کدام است؟

- (۱) -3^7 (۲) 3^7 (۳) -3^6 (۴) 3^6

(کانون فرهنگی آموزش ۹۷)

۵۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، آن گاه مجموع درایه‌های ماتریس $A^{12} + A^{13}$ کدام است؟

- (۱) ۲۷ (۲) ۲۸ (۳) ۲۹ (۴) ۳۰

۵۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $A^{12} = (kA)^4$ ، مقدار k کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) -۴ (۲) -۲ (۳) ۴ (۴) ۶۴

۵۲- اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، ماتریس $A^{1401} - A^{1400}$ کدام است؟

- (۱) $\bar{O}$ (۲) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

۵۳- اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ m & 1 \end{bmatrix}$ و مجموع درایه‌های ماتریس $A^{2n} - A^{2n-1}$ برابر ۷ باشد، m کدام است؟ ($n \in \mathbb{N}$)

- (۱) ۱۰ (۲) ۳ (۳) -۴ (۴) -۵

۵۴- اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، A^{2021} کدام است؟

- (۱) $2^{2020} I$ (۲) A^{1010} (۳) A^{2020} (۴) I^{1010}

۵۵- اگر $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ با تعریف $a_{ij} = \begin{cases} j-i & j=1 \\ 1 & j=2 \end{cases}$ باشد، A^{1400} کدام است؟

- (۱) A^2 (۲) A (۳) I (۴) $-A^2$

۵۶- اگر $\begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -24 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^{12} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $a+b+c+d$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴) ۱۲

۵۷- اگر A یک ماتریس قطری باشد و داشته باشیم $2I - 3A = \begin{bmatrix} a^2 - 2b & a + 2b \\ (b-1)^2 - 2a & a - b - 3 \end{bmatrix}$ ، ضرب درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس A^{1401} کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) 2^{-1401} (۳) ۱ (۴) 2^{1401}

۵۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $B = I - A$ و $C = A + I$ باشد، ماتریس $B^2 + C^2$ کدام است؟

- (۱) $-4A$ (۲) $-4I$ (۳) $4I$ (۴) $4A$

۵۹- اگر $A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$ ، $B^2 = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$ ، $BA = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$ و A و B دو ماتریس تعویض پذیر باشند، حاصل $(2A - B)(A + 2B)$ کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 64 & 46 \\ 69 & 73 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 12 & 42 \\ 63 & 135 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 4 & 34 \\ 51 & 115 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 4 & 46 \\ 69 & 73 \end{bmatrix}$

۶۰- برای دو ماتریس A و B داریم $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$ ، $A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$ و $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ، حاصل $AB + BA$ کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

۶۱- سه ماتریس هم مرتبه A ، B و C دارای رابطه $A = B + C$ می باشند، حاصل $A^2 + B^2 - AB - BA$ کدام است؟

- (۱) $-C^2$ (۲) $\bar{O}$ (۳) C (۴) C^2

۶۲- ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} x & y \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ در رابطه $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$ صدق می کنند، حاصل $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -y \\ 2 & -x \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۵

۶۳- ماتریس‌های مربعی A و B در رابطه $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 3 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ صدق می کنند، مجموع درایه‌های ماتریس $(A^2 + AB + BA + B^2)^3$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{4}$

۶۴- اگر A یک ماتریس مربعی و $A^2 - I = 2A$ باشد، $A^5 - A^4$ کدام است؟

- (۱) $29A + 12I$ (۲) $17A + 7I$ (۳) $12A + 5I$ (۴) A

۶۵- اگر $A^2 + I = A$ باشد، A^{2021} کدام است؟

- (۱) $-A$ (۲) $A - I$ (۳) $-I$ (۴) $I - A$



۶۶- اگر $A^T = A$ و $A + B = I - A$ باشد، حاصل B^{140} کدام است؟

- (۱) I (۲) A (۳) $140I$ (۴) B

(کانون فرهنگی آموزش ۹۷)

۶۷- اگر A و B دو ماتریس متمایز باشند به طوری که $AB = A$ و $BA = B$ ، آن گاه B^T برابر با کدام است؟

- (۱) I (۲) A (۳) B (۴) $-I$

۶۸- اگر $A - B = -kI$ باشد، حاصل $A^T - AB + kB$ کدام است؟

- (۱) $k^2 I$ (۲) $k^2 I$ (۳) $-k^2 I$ (۴) $-k^2 I$

۶۹- اگر $AB = B$ و $BA = A$ باشد، $A^T B^T$ کدام است؟

- (۱) I (۲) A (۳) B (۴) A^T

۷۰- اگر $B^T = -B$ و $A + B = I$ باشد، $A^T B$ کدام است؟

- (۱) $-4B$ (۲) $-2B$ (۳) $2B$ (۴) $4B$

۷۱- اگر $AB^T = A$ و $BA = B$ باشد، ماتریس B^T کدام است؟

- (۱) I (۲) A (۳) B (۴) AB

۷۲- اگر A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند، $B^T = B + I$ و $B - A = I$ باشد، کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) $AB = BA$ (۲) $BA = I$ (۳) $A^T B = A$ (۴) $B^T A = I$

۷۳- اگر $BA = 2A$ و $AB = B$ باشد، $2A^T - 3A^T$ کدام است؟

- (۱) $-A$ (۲) $\bar{O}$ (۳) A (۴) $2A$

۷۴- A و B دو ماتریس مربعی و $AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ است، مجموع درایه های ماتریس $A(BA)^T B$ کدام است؟

- (۱) -1 (۲) صفر (۳) 1 (۴) 2

۷۵- اگر $\bar{O} = AB - 2BA$ و $B^T A = kAB^T$ باشند، k کدام است؟

- (۱) 8 (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $-\frac{1}{8}$ (۴) -8

۷۶- اگر $A^T = -\frac{3}{2}A$ و $2A + 2B = \bar{O}$ باشد، حاصل $A(A+B)(2A-B)(A-B)$ کدام است؟

- (۱) $5A$ (۲) $-5A$ (۳) $-5I$ (۴) $5I$



۷۷- اگر درایه های سطر ۴ ماتریس A ، $0, 5, 2, -1$ و درایه های ستون سوم ماتریس B ، $1, -2, 5, 0$ باشند، درایه سطر چهارم و ستون سوم ماتریس AB کدام است؟

- (۱) 2 (۲) 5 (۳) 10 (۴) 20

۷۸- حاصل ضرب ریشه های معادله $\begin{bmatrix} 2 & 1 & x \\ -x & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -10 \\ -x \end{bmatrix} = 0$ کدام است؟

- (۱) -14 (۲) -9 (۳) -5 (۴) -1

۷۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه های ماتریس A^6 کدام است؟

- (۱) 3^5 (۲) 3^6 (۳) 3^7 (۴) 3^8

۸۰- اگر A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند و $BA - 3AB = \bar{O}$ ، مقدار m از رابطه $mAB^T = B^T A$ چه قدر است؟

- (۱) $\frac{1}{27}$ (۲) -27 (۳) $-\frac{1}{27}$ (۴) 27

۸۱- اگر A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند، به طوری که $A^T = A$ و $A + B = I$ باشد، کدام نتیجه گیری درست است؟

- (۱) $AB = BA$ (۲) $AB = I$ (۳) $AB^T = I$ (۴) $A = B^T$



(کانون فرهنگی آموزش ۹۶)

۸۲- حاصل $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -11 & 1 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

۸۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، حاصل $A^{1399} - A^{1400}$ کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (۴) $\bar{O}$

۸۴- در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ حاصل $A^n - A^{n-1}$ کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

۸۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $BA^n = \begin{bmatrix} 4 & 41 \\ 3 & 32 \end{bmatrix}$ ، آن گاه:

(۱) $n = 11$ (۲) $n = 10$ (۳) $n = 9$ (۴) $n = 8$

۸۶- اگر A یک ماتریس مربعی باشد به طوری که $A^2 - A = \bar{O}$ ، آن گاه $(2A - I)^{1399}$ کدام است؟

(۱) $\bar{O}$ (۲) I (۳) A (۴) $2A - I$

۴- گزینه ۲: ماتریس اسکالر، ماتریسی است قطری که درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابرند.

ماتریس اسکالر 3×3 به صورت $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ است که مجموع

$$3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

درایه‌های آن $3a$ است؛ بنابراین داریم:

$$a = \frac{1}{3}$$

۵- گزینه ۱: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ را می‌شناسیم.

دقت کنید! همه ماتریس‌های داده شده 2×2 هستند؛ زیرا فقط ماتریس‌های هم‌مرتبه قابلیت جمع و تفریق دارند. با توجه به صورت سؤال، داریم:

$$3X = \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-7}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی} = \frac{-1}{9} \\ \text{حاصل ضرب درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی} = 0 \end{cases}$$

اختلاف حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی و حاصل ضرب درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی X ، برابر $\frac{1}{9}$ است.

۶- گزینه ۱: نیازی نیست هر دو ماتریس را بنویسیم و با هم جمع کنیم؛ بلکه کافی است سطر دوم هر دو ماتریس را به دست آوریم و با هم جمع کنیم.

$$a_{21} = 2 - 1^2 = 1, a_{22} = 2 - 2^2 = -2, a_{23} = 2 - 3^2 = -7, \\ b_{21} = 6 - (2 \times 1) = 4, b_{22} = 6 - (2 \times 2) = 2, \\ b_{23} = 6 - (2 \times 3) = 0$$

$$\text{بنابراین: } A + B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -7 \end{bmatrix}$$

۷- گزینه ۳: $C = A - 2B$ می‌گوید هر درایه A منهای دو برابر درایه نظیرش در B ، درایه نظیر در C را می‌سازد. بنابراین:

$$c_{11} = a_{11} - 2b_{11} = -2 - 2(1) = -4 \\ c_{22} = a_{22} - 2b_{22} = m - 2(m - 2) = -m + 4$$

$$\text{با توجه به این که } c_{11} = -c_{22} + 1 \text{ است، پس:} \\ -4 = -(-m + 4) + 1 \Rightarrow m = -1$$

$$\text{حالا باید سراغ } c_{23} = -3c_{13} \text{ برویم.}$$

$$c_{23} = a_{23} - 2b_{23} = (n - 1) - 2(n + 1) = -n - 3 \\ c_{13} = a_{13} - 2b_{13} = 0 - 2(m) = -2m = -2(-1) = 2$$

$$\text{از تساوی } -n - 3 = -2m \text{ نتیجه می‌شود } n = 3 \\ \text{خواسته سؤال } n - m \text{ بود که برابر با } 4 = 3 - (-1) \text{ است.}$$

۸- گزینه ۲: ابتدا طبق تعریف، درایه‌های ماتریس B را می‌نویسیم:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

۱- گزینه ۲: ماتریس 2×2 در حالت کلی به شکل $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ است.

سؤال از ما سه درایه از چهار درایه ماتریس را خواسته! برای به دست آوردن هر درایه نیز رابطه‌ای را به ما داده! ما هم درایه‌هایی را که خواسته به دست می‌آوریم و تحویلش می‌دهیم.

در a_{12} (درایه واقع در سطر اول و ستون دوم A)، $i = 1$ و $j = 2$ است. با توجه به این که $i < j$ است، درایه a_{12} را از رابطه $i + j$ به دست می‌آوریم.

$$\text{بنابراین: } a_{12} = 1 + 2 = 3 \\ \text{در } a_{21} \text{ (درایه واقع در سطر دوم و ستون اول } A \text{)، } i = 2 \text{ و } j = 1 \text{ است. از آن جایی که } i > j \text{ است، درایه } a_{21} \text{ از رابطه } j - i \text{ به دست می‌آید. پس:}$$

$$a_{21} = 2 - 1 = 1 \\ \text{در } a_{22} \text{ (درایه واقع در سطر دوم و ستون دوم } A \text{)، } i = 2 \text{ و } j = 2 \text{ است. چون } i = j \text{ است، درایه } a_{22} \text{ را به کمک رابطه } \left[\frac{-i}{j} \right] \text{ مشخص می‌کنیم.}$$

$$a_{22} = \left[\frac{-2}{2} \right] = -1 \\ \text{بنابراین:}$$

در نهایت باید حاصل $a_{21} + a_{12} - a_{22}$ را به دست بیاوریم که برابر با $1 + 3 + 1 = 5$ است.

۲- گزینه ۲: صورت کلی یک ماتریس 3×3 به شکل زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

۱ هر جا شماره سطر و ستون درایه برابر بودند کافی است شماره سطر را با ۲ جمع کنیم و به جای آن درایه بنویسیم. (درایه‌های a_{11} ، a_{22} و a_{33} این‌طور هستند.)

۲ هر جا شماره سطر از شماره ستون بزرگ‌تر بود، شماره سطر را منهای شماره ستون می‌کنیم و به جای آن درایه می‌نویسیم. (درایه‌های a_{31} ، a_{21} و a_{32} این ویژگی را دارند.)

۳ هر جا شماره سطر از شماره ستون کوچک‌تر بود، دو برابر شماره ستون را منهای شماره سطر می‌کنیم و به جای آن درایه می‌نویسیم. (a_{13} ، a_{23} و a_{33} چنین خصوصیاتی دارند.)

$$A = \begin{bmatrix} 1+2 & 2 \times 2 - 1 & 2 \times 3 - 1 \\ 2-1 & 2+2 & 2 \times 3 - 2 \\ 3-1 & 3-2 & 3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

۳- گزینه ۱: به تعریف درایه‌های ماتریس A دقت کنید! می‌گوید برای به دست آوردن هر درایه از ماتریس A باید شماره سطر آن درایه را در α و شماره ستون آن را در β ضرب کنید و حاصل این دو ضرب را با هم جمع کنید.

حواستان هست! که A یک ماتریس سطری است (یک سطر و سه ستون دارد)؛ بنابراین درایه ستون دوم A یعنی درایه واقع در سطر اول و ستون دوم A برابر است با:

$$a_{12} = (\alpha \times 1) + (\beta \times 2) = \alpha + 2\beta$$

هر درایه ماتریس B از ضرب شماره ستون آن درایه در 2α منهای ضرب شماره سطر درایه در 3β به دست می‌آید.

$$\text{ماتریس } B \text{ یک ماتریس ستونی است (سه سطر و یک ستون دارد)؛ بنابراین درایه سطر سوم } B \text{ یعنی درایه واقع در سطر سوم و ستون اول } B \text{ برابر می‌شود با:}$$

$$b_{31} = (2\alpha \times 1) - (3\beta \times 3) = 2\alpha - 9\beta \\ \text{سؤال از ما } a_{12} + b_{31} \text{ را خواسته که برابر است با:}$$

$$a_{12} + b_{31} = (\alpha + 2\beta) + (2\alpha - 9\beta) = 3\alpha - 7\beta$$

$$\begin{cases} -m = -n \Rightarrow m = n \\ -n - 1 = -1 - m = 0 \Rightarrow n = m = -1 \end{cases}$$

حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی $A - B$ برابر با $mn = 1$ است.

۱۲- **گزینه ۲** می‌دانیم زمانی ماتریس‌ها با هم جمع می‌شوند که هم‌مرتبه باشند. با توجه به این که B یک ماتریس 3×3 است، نتیجه می‌گیریم ماتریس‌های A ، C و نیز باید 3×3 باشند.

سؤال گفته ماتریس A یک ماتریس اسکالر است. می‌دانیم ماتریس اسکالر

$$3 \times 3 \text{ به شکل } \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \text{ است. حالا که مجموع درایه‌های ماتریس}$$

اسکالر A برابر ۱۲ شده، پس $3k = 12$ یعنی $k = 4$ است. بنابراین

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ است.}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ هم که معرف حضور شما هست!}$$

رسیدیم به ماتریس B که باید براساس تعریف داده‌شده، درایه‌هایش را

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \\ -2 & -1 & 6 \end{bmatrix} \text{ مشخص کنیم.}$$

با جای‌گذاری ماتریس‌های A ، B و I در رابطه $A + I = B + C$ ، ماتریس

$$C \text{ مشخص می‌شود.}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \\ -2 & -1 & 6 \end{bmatrix} + C$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \\ -2 & -1 & 6 \end{bmatrix} + C$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \\ -2 & -1 & 6 \end{bmatrix} = C$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ بنابراین:}$$

مجموع درایه‌های C برابر با -5 است.

۱۳- **گزینه ۱** باید A و B را ضرب کنیم تا کوچک‌ترین درایه مشخص شود!

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

کوچک‌ترین درایه ماتریس AB ، -2 است.

۱۴- **گزینه ۲** ماتریس قطری، ماتریسی است مربعی که درایه‌های

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \text{ طرفین قطر اصلی آن همگی صفرند؛ این شکلی}$$

دو ماتریس را در هم ضرب می‌کنیم و درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی را برابر صفر قرار می‌دهیم تا x و y به دست آیند.

A و B با هم مساوی‌اند، پس درایه‌های آن‌ها باید نظیربه‌نظیر با هم برابر

باشند؛ یعنی:

$$\begin{cases} m = 2 \\ n - 1 = 6 \Rightarrow n = 7 \\ k + 1 = 12 \Rightarrow k = 11 \end{cases}$$

$$m + n + k = 2 + 7 + 11 = 20$$

بنابراین:

۹- **گزینه ۱** باید B را با درایه‌هایش بنویسیم؛ آن هم به کمک تعریفی

که داده!

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$A = B$ است، پس:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+1 & 1 & x \\ n-1 & 2 & m-p \\ k+2 & 3 & y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m+1=0 \Rightarrow m=-1 \\ n-1=0 \Rightarrow n=1 \\ k+2=0 \Rightarrow k=-2 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ m-p=4 \xrightarrow{m=-1} p=-5 \\ y=6 \end{cases}$$

$$x - y - k + p + n - m = 2 - 6 + 2 - 5 + 1 + 1 = -5$$

بنابراین:

۱۰- **گزینه ۳** دو ماتریس A و B مساوی‌اند، پس باید درایه‌های

نظیربه‌نظیر دو ماتریس برابر باشند.

$$\begin{cases} m-2=1 \Rightarrow m=3 \\ p+n=-7 \\ p-n=-11 \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} p=-9 \\ n=2 \end{cases}$$

حالا که تکلیف m ، n و p روشن شد باید براساس تعریف داده‌شده، ماتریس

C را بنویسیم. درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس C از رابطه $\begin{bmatrix} i+p \\ m+n \end{bmatrix}$ ،

درایه‌های بالای قطر اصلی از رابطه $\begin{bmatrix} m-j \\ n \end{bmatrix}$ و درایه‌های پایین قطر اصلی

از رابطه $\begin{bmatrix} i+j \\ 3m-n \end{bmatrix}$ به دست می‌آیند.

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس C با هم برابرند و تمام درایه‌های غیرواقع

بر قطر اصلی C ، صفرند؛ پس ماتریس C ، اسکالر است.

$$11- \text{گزینه ۳ اگر } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ باشد، داریم:}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

در ماتریس اسکالر، درایه‌های روی قطر اصلی برابر و درایه‌های غیرواقع بر

قطر اصلی، صفرند. بنابراین:

$$A - B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m & m \\ 2+n & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m & -1-m \\ -n-1 & -n \end{bmatrix}$$

۱۸- گزینه ۲ A و B را داریم؛ AB و BA را پیدا می‌کنیم و در رابطه

داده شده قرار می‌دهیم تا m و n مشخص شوند.

$$AB - BA = \bar{O}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & m \\ n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & -1 \\ -1 & n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m & -1 \\ -1 & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & m \\ n & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\begin{bmatrix} -m & mn \\ mn & -n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -n & m^2 \\ n^2 & -m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} n-m & mn-m^2 \\ mn-n^2 & -(n-m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} n-m & m(n-m) \\ -n(n-m) & -(n-m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (n-m) \begin{bmatrix} 1 & m \\ -n & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow n-m=0 \Rightarrow n=m \Rightarrow m^2-n^2=0$$

۱۹- گزینه ۱ با توجه به معادلات داده شده، A یک ماتریس ۲×۲ است.

$$\text{اگر } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ باشد، داریم:}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a+c=3 \\ 2b+d=5 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3a+4c=-1 \\ 3b+4d=2 \end{cases} \quad (2)$$

دو برابر معادلات (۲) را با معادلات (۱) جمع می‌کنیم، داریم:

$$\begin{cases} (2a+c) + 2(3a+4c) = 3 + 2(-1) \Rightarrow 8a+9c=1 \\ (2b+d) + 2(3b+4d) = 5 + 2(2) \Rightarrow 8b+9d=9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 9 \end{bmatrix}$$

۲۰- گزینه ۲ فرض می‌کنیم $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد، بنابراین:

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2a & a \\ 2c & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ c=4 \end{cases}$$

در ماتریس A باید $a=0$ و $c=4$ باشد و برای این که رابطه داده شده برقرار باشد به مقدار b و d بستگی ندارد، یعنی به ازای هر عدد حقیقی b و d، $a=0$ و $c=4$ معادله ماتریسی داده شده برقرار است، پس بی‌شمار ماتریس A وجود دارد که در رابطه داده شده، صدق کند.

۲۱- گزینه ۳ اول باید A و B را مشخص کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^2-1 & 2-1 \\ 2-1 & 2^2-1 \\ 3-1 & 3^2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^2+1 & 1-2+2 & 1-3+2 \\ 2+1 & 2^2+1 & 2-3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 11 & 16 & 3 \\ 7 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\begin{bmatrix} x & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-1+4y & -2x+0+4 \\ 4+3+y & -4+0+1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x+4=0 \Rightarrow x=2 \\ 4+3+y=0 \Rightarrow y=-7 \end{cases}$$

پس:

۱۵- گزینه ۲ همین اول کار باید تکلیف $A \times B$ را روشن کنیم!

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3a & 2a-8 \\ b-3 & -2b-2 \end{bmatrix}$$

برای این که $A \times B$ قطری باشد باید درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر

$$\begin{cases} b-3=0 \Rightarrow b=3 \\ 2a-8=0 \Rightarrow a=4 \end{cases}$$

باشند، پس:

حالا که A و B را داریم، $B \times A$ را می‌یابیم.

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 18 & 10 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی $B \times A$ برابر است با:

$$6+18=24$$

۱۶- گزینه ۲ مراقب باشید! اگر $A \times B$ قطری باشد، دلیلی وجود ندارد که $B \times A$ هم

قطری باشد.

۱۷- گزینه ۲ BA قطری است؛ یعنی باید درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی

آن صفر باشد.

$$BA = \begin{bmatrix} x & 4 \\ 3 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-4 & 8-2x \\ 3-y & 2y-6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8-2x=0 \Rightarrow x=4 \\ 3-y=0 \Rightarrow y=3 \end{cases}$$

بنابراین:

$$\begin{bmatrix} -3x & x-y-1 \\ y^2-x^2+x+3 & -4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$$

چون درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفرند و درایه‌های روی قطر اصلی برابرند، واضح و مبهم‌ن است که ماتریس بالا، اسکالر است.

۱۷- گزینه ۱ با توجه به تعریفی که سؤال از ماتریس‌های A و B ارائه

داده، می‌توانیم این دو ماتریس را با درایه‌های مشخص کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & m \\ n & -5 \\ n & n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & m & m \\ n & -3 & m \end{bmatrix}$$

حالا باید $B \times A$ را به دست آوریم.

$$B \times A = \begin{bmatrix} -2 & m & m \\ n & -3 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & m \\ n & -5 \\ n & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+2mn & mn-7m \\ mn-5n & 2mn+15 \end{bmatrix}$$

چون ماتریس $B \times A$ قطری است، درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن باید صفر باشند.

$$\begin{cases} mn-7m=0 \\ mn-5n=0 \end{cases}$$

از $mn-7m=mn-5n$ درمی‌یابیم $7m=5n$ است و چون m و n

طبیعی و یک‌رقمی‌اند، پس $n=7$ و $m=5$ است. با قراردادن مقادیر m

$$\text{و } n \text{ در ماتریس } \begin{bmatrix} m-3 & \left[\frac{m}{n}\right] \\ \left[\frac{-n}{m}\right] & m-n \end{bmatrix} \text{ به ماتریس } \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \text{ می‌رسیم}$$

که یک ماتریس غیرقطری است.

۲۲- گزینه ۱ هر چند که کتاب فراموش کرده!!! ماتریس مثلثی را معرفی کند؛ اما ما معرفی می‌کنیم!

ماتریسی که درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفر باشند را ماتریس پایین‌مثلثی و ماتریسی که درایه‌های پایین قطر اصلی آن صفر باشند را بالامثلثی گویند. یادتان بماند که: ۱ ضرب دو ماتریس بالامثلثی، بالامثلثی و ضرب دو ماتریس پایین‌مثلثی، پایین‌مثلثی است.

۲ عناصر روی قطر اصلی حاصل ضرب دو ماتریس پایین‌مثلثی (یا بالامثلثی) برابر با حاصل ضرب نظیربه‌نظیر عناصر روی قطر اصلی دو ماتریس است؛ یعنی:

$$\begin{bmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & d' & e' \\ 0 & b' & f' \\ 0 & 0 & c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' & ? & ? \\ 0 & bb' & ? \\ 0 & 0 & cc' \end{bmatrix}$$

حالا که می‌دانیم ماتریس مثلثی چه شکلیه! سراغ حل سؤال می‌رویم. سؤال از ما عناصر روی قطر اصلی ضرب دو ماتریس پایین‌مثلثی را خواسته!

$$BA = \begin{bmatrix} 2b & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 4c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 7 & 2a & 0 \\ 8 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6b & 0 & 0 \\ ? & 8a & 0 \\ ? & ? & -4c \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های روی قطر اصلی BA برابر است با:

$$6b + 8a - 4c = 2(3b + 4a - 2c) = 2 \times 7 = 14$$

۲۳- گزینه ۳ اگر $A \times B = C$ باشد، درایه واقع در سطر ۱ام و ستون ۱ام ماتریس C از ضرب سطر ۱ام ماتریس A در ستون ۱ام ماتریس B به دست می‌آید، بنابراین درایه واقع در سطر دوم و ستون سوم ماتریس C از ضرب سطر دوم A در ستون سوم B به دست می‌آید.

$$C_{23} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = (5 \times 4) + (2 \times 1) = 22$$

۲۴- گزینه ۲ برای به دست آوردن سطر ۱ام و ستون ۱ام ماتریس ABC، کافی است به ترتیب سطر ۱ام ماتریس A، ماتریس B و ستون ۱ام ماتریس C را در هم ضرب کنیم. بنابراین:

$$ABC = \begin{bmatrix} \text{ستون سوم} \\ \text{سطر اول} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{سطر اول} \\ \text{ستون سوم} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$$

$$ABC = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 10 & 17 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 10 & 17 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 17 & 10 & 17 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 85 - 10 = 75 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

۲۵- گزینه ۱ ضرب دو ماتریس A و B خاصیت جابه‌جایی دارد، یعنی $AB = BA$ است.

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - 1 & \beta - 2 \\ 3 - \alpha & \alpha - \beta \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3\beta - \alpha & \alpha - \beta \end{bmatrix}$$

از برابری AB و BA داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - 1 = 5 \Rightarrow \alpha = 6 \\ \beta - 2 = -1 \Rightarrow \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta = 7$$

دقت کنید! که به ازای $\alpha = 6$ و $\beta = 1$ و $\alpha - \beta = 3 - \alpha = 3 - 6 = -3$ و $\alpha - \beta = 6 - \beta = 6 - 1 = 5$ برقرار است.

۲۶- گزینه ۳ اگر دو ماتریس A و B بخواهند تعویض‌پذیر باشند (خاصیت جابه‌جایی داشته باشند)، باید $AB = BA$ باشد.

اما راه ساده‌تری هم برای حل این تست وجود دارد. 😊

ضرب دو ماتریس به قُرم $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ خاصیت جابه‌جایی دارند.

در ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابر و درایه‌های

روی قطر فرعی نیز با هم برابرند؛ اگر در ماتریس $\begin{bmatrix} \sin \alpha & x^4 \\ \lambda x & \cos \alpha \end{bmatrix}$ نیز

درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابر و درایه‌های روی قطر فرعی با هم برابر باشند، ضرب دو ماتریس خاصیت جابه‌جایی دارد.

$$\sin \alpha = \cos \alpha \Rightarrow \tan \alpha = 1 \quad \text{بنابراین:}$$

$$x^4 = \lambda x \xrightarrow{x \neq 0} x^3 = \lambda \Rightarrow x = 2$$

$$x + \tan \alpha = 2 + 1 = 3 \quad \text{پس:}$$

۲۷- گزینه ۱ بهتر نیست اول از شَرّ زوایای مختلف خلاص شویم؟! از مثلثات به یاد داریم:

$$\begin{cases} \sin 75^\circ = \sin(90^\circ - 15^\circ) = \cos 15^\circ \\ \cos 75^\circ = \cos(90^\circ - 15^\circ) = \sin 15^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 105^\circ = \sin(90^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ \\ \cos 105^\circ = \cos(90^\circ + 15^\circ) = -\sin 15^\circ \end{cases}$$

همه زوایا را برحسب 15° می‌نویسیم و حاصل را حساب می‌کنیم.

$$\cos 15^\circ \begin{bmatrix} \cos 15^\circ & \sin 15^\circ \\ -\sin 15^\circ & \cos 15^\circ \end{bmatrix} + \sin 15^\circ \begin{bmatrix} \sin 15^\circ & -\cos 15^\circ \\ \cos 15^\circ & \sin 15^\circ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2 15^\circ & \cos 15^\circ \sin 15^\circ \\ -\cos 15^\circ \sin 15^\circ & \cos^2 15^\circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin^2 15^\circ & -\cos 15^\circ \sin 15^\circ \\ \cos 15^\circ \sin 15^\circ & \sin^2 15^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ = 1 \quad \text{دقت کنید!}$$

۲۸- گزینه ۱ ابتدا حاصل ضرب دو ماتریس $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix}$ را به دست می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - 2x - 1 \\ 4x + 0 + 2 \\ x + 4x + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 1 \\ 4x + 2 \\ 5x \end{bmatrix}$$

حالا باید حاصل ضرب ماتریس $\begin{bmatrix} x & 2x & -1 \end{bmatrix}$ را در ماتریس بالا به دست آوریم و برابر صفر قرار دهیم تا X پیدا شود.

$$\begin{bmatrix} x & 2x & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - 1 \\ 4x + 2 \\ 5x \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x(x - 1) + 2x(4x + 2) - 1(5x) = 0$$

۳۲- گزینه ۱ ابتدا حاصل ضرب دو ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & x & 0 \\ -2 & 1 & x+1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ را به دست می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & x & 0 \\ -2 & 1 & x+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3-2x \\ -9-x \end{bmatrix}$$

حالا باید $\begin{bmatrix} 3 & 3 & -2x \end{bmatrix}$ را در ماتریس بالا ضرب کنیم و مساوی صفر قرار دهیم.

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & -2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & x & 0 \\ -2 & 1 & x+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3 & -2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -3-2x \\ -9-x \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -3 + (-9-6x) + (18x+2x^2) = 0 \Rightarrow 2x^2 + 12x - 12 = 0$$

ما به دنبال مجموع معکوس ریشه‌های معادله $2x^2 + 12x - 12 = 0$ هستیم.

فرض کنید α و β ریشه‌های معادله فوق باشند، حاصل $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ جواب سؤال است.

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{-6}{-6} = 1$$

نکته: اگر α و β ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند،

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \text{مجموع ریشه‌ها}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \text{حاصل ضرب ریشه‌ها}$$

۳۳- گزینه ۲ B را از سمت چپ فاکتور می‌گیریم، داریم:

$$B \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} A + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} A = B \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} A$$

با جمع دو ماتریس بین B و A، نتیجه جالبی به دست می‌آید.

$$B \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} A = B(-3I)A = -3(BI)A = -3BA$$

$$= -3 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -6 & -9 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس فوق برابر با $-12 = -9 - 3 = -12$ است.

۳۴- گزینه ۱ می‌دانیم $A^2 = A \times A$ ، پس:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ m & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-m & -2 \\ 2m & 1-m \end{bmatrix}$$

بنابراین باید:

$$\begin{bmatrix} 1-m & -2 \\ 2m & 1-m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -6 & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow 2m = -6 \Rightarrow m = -3$$

۳۵- گزینه ۲ راهی نداریم جز این که A را به توان ۲ برسانیم.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & a \\ 1 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & a \\ 1 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+a & 2a+ab \\ 2+b & a+b^2 \end{bmatrix}$$

سؤال، A^2 را به ما داده، پس می‌توانیم a و b را کشف کنیم.

$$\begin{bmatrix} 4+a & 2a+ab \\ 2+b & a+b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4+a=3 \Rightarrow a=-1 \\ 2+b=5 \Rightarrow b=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 - x + 8x^2 + 4x - 5x = 0 \Rightarrow 9x^2 - 2x = 0$$

$$\Rightarrow x(9x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{2}{9} \end{cases}$$

سؤال، عدد غیرصفر x را خواسته، پس جواب سؤال $x = \frac{2}{9}$ است.

۲۹- گزینه ۱ اول حاصل ضرب دو ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} x & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & x & 1 \end{bmatrix}$ را به دست می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 & 2x-1 & -1 \end{bmatrix}$$

حالا باید حاصل بالا را در $\begin{bmatrix} -2 \\ x \\ 1 \end{bmatrix}$ ضرب کنیم و برابر صفر قرار دهیم.

$$\begin{bmatrix} x+1 & 2x-1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ x \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow -2x-2+2x^2-x-1=0$$

پس جمع ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x - 3 = 0$ برابر با $\frac{3}{2}$ است.

تذکره: جمع ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ برابر با $-\frac{b}{a}$ است.

۳۰- گزینه ۲ حاصل ضرب دو ماتریس اول را به دست می‌آوریم و در

ماتریس سوم ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 2 & 1 \\ 1 & -x & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -x+1 & -2x-1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -x^2 + x - 4x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$$

α و β ریشه‌های معادله فوق هستند.

$$(x+2)(x+1) = 0 \Rightarrow \alpha = -2, \beta = -1$$

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

بنابراین:

۳۱- گزینه ۳ حاصل ضرب دو ماتریس اول را به دست می‌آوریم و در

ماتریس سوم ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 2 \\ 1 & -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 2 \\ 1 & -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -x+2 & -2-2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 5 \end{bmatrix} = -x^2 + 2x - 10 - 10x$$

$$= -x^2 - 8x - 10 = 0 \Rightarrow x^2 + 8x + 10 = 0$$

چون $\Delta = 8^2 - 4 \times 1 \times 10 > 0$ است، پس معادله دو ریشه حقیقی دارد.

می‌دانیم $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$ و α و β ریشه‌های معادله فوق

هستند؛ بنابراین:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-8)^2 - 2(10) = 64 - 20 = 44$$

نکته: اگر α و β ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آن‌گاه:

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} \quad \text{و} \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

بنابراین:

$$\begin{bmatrix} a & -a \\ b & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3 & 1-3 \\ -4+3 & 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

۳۶- گزینه ۲ بدون فوت وقت! A^2 را به دست می آوریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix}$$

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ را از قبل می شناسیم. (بله! I ماتریس همانی است.)

$$A^2 = \alpha A + \beta I \Rightarrow \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha & \alpha \\ 5\alpha & 4\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta - 2\alpha & \alpha \\ 5\alpha & 4\alpha + \beta \end{bmatrix}$$

کاملاً واضح است که $\alpha = 2$ است. با قراردادن $\alpha = 2$ در معادله $\beta - 4 = 9 \Rightarrow \beta = 13$ داریم:

بنابراین دوتایی (α, β) ، $(2, 13)$ است.

روش دوم شاید اسم مرحوم همیلتن و شادروان کیلی به گوشتان خورده باشد! نخستین بار مفهوم ماتریس در کارهای این دو نفر طرح شده.

رابطه‌ای به نام کیلی- همیلتن نام‌گذاری شده که در حل این سؤال به ما کمک می‌کند.

رابطه کیلی- همیلتن می‌گوید: «هر ماتریس 2×2 به شکل $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در رابطه $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = \bar{O}$ صدق می‌کند.»

به کمک رابطه کیلی- همیلتن داریم: $A^2 - (-2+4)A + (-8-5)I = \bar{O}$

$$\Rightarrow A^2 = 2A + 13I \Rightarrow \alpha = 2, \beta = 13$$

۳۷- گزینه ۲ اول ماتریس را مشخص می‌کنیم. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

حالا A^2 و $4A$ را به دست می آوریم و مجموع درایه‌های $A^2 - 4A$ را به عنوان جواب اعلام می‌کنیم.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - 4A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

بنابراین: مجموع درایه‌های ماتریس $A^2 - 4A$ برابر با ۱۵ است.

۳۸- گزینه ۲ ابتدا A^2 را پیدا می‌کنیم تا بعد ببینیم چه اتفاقی می‌افتد ...

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

حالا که A^2 پیدا شد، می‌توانیم A^4 ، A^6 و ... را پیدا کنیم.

$$A^3 = A^2 \times A = IA = A \quad A^4 = A^2 \times A^2 = A \times A = A^2 = I$$

$$A^5 = A^4 \times A = IA = A \quad A^6 = A^5 \times A = A \times A = A^2 = I$$

$$A^7 = A^6 \times A = IA = A$$

$$A^7 - A^6 = A - I = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

روش دوم بد نیست بدانید که اگر $A^2 = I$ باشد به ماتریس A متناوب می‌گویند؛ توان‌های زوج ماتریس A برابر I و توان‌های فرد ماتریس A برابر با خود ماتریس A می‌شوند.

در این سؤال $A^2 = I$ شده، پس $A^7 = A$ و $A^6 = I$ است و ...

۳۹- گزینه ۱ با توجه به دو نکته زیر به سؤال پاسخ می‌دهیم.

۱ اگر $C \times D = E$ باشد، درایه واقع در سطر α م و ستون λ م ماتریس E از ضرب سطر α م ماتریس C در ستون λ م ماتریس D به دست می‌آید.

۲ می‌دانیم $A^3 = A^2 \times A$

بنابراین درایه سطر دوم و ستون سوم ماتریس A^3 از ضرب سطر دوم ماتریس A^2 در ستون سوم ماتریس A به دست می‌آید.

به درایه‌های سطر دوم ماتریس A^2 نیاز داریم که از ضرب سطر دوم A در ماتریس A به دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2x & y+x \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حالا می‌توانیم درایه سطر دوم و ستون سوم A^3 را به دست آوریم.

درایه سطر دوم و ستون سوم A^3 (ستون سوم ماتریس A) $\times$ (سطر دوم ماتریس A^2)

$$= \begin{bmatrix} y \\ x \\ 1 \end{bmatrix} = 0 + x + 2x = 3x$$

می‌توانستیم A^2 را به دست آوریم و در A ضرب کنیم تا A^3 به دست آید و از روی A^3 ، درایه سطر دوم و ستون سوم را اعلام کنیم.

۴۰- گزینه ۲ ابتدا A^2 را به دست می‌آوریم.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 24 \\ -2 & -3 & -7 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

چون سؤال فقط سطر اول A^3 را خواسته، کافی است سطر اول A^2 را در A ضرب کنیم.

$$A^3 = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 24 \\ -2 & -3 & -7 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 6 & 86 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

۴۱- گزینه ۲ ابتدا A^2 را به دست می‌آوریم.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

کافی است سطر اول A^2 را در A^2 ضرب کنیم تا سطر اول A^4 مشخص شود.

۴۴- گزینه ۲ دو نکته را با هم مرور می کنیم و سپس به سؤال پاسخ می دهیم.

۱ اگر $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ باشد (یعنی A یک ماتریس قطری باشد)،

$$A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix} \text{ است.}$$

۲ اگر $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ e & f & c \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} a' & 0 & 0 \\ d' & b' & 0 \\ e' & f' & c' \end{bmatrix}$ باشند، AB به

$$\text{صورت } \begin{bmatrix} aa' & 0 & 0 \\ \bigcirc & bb' & 0 \\ \bigcirc & \bigcirc & cc' \end{bmatrix} \text{ است.}$$

(به ماتریسی که تمام درایه های بالای قطر اصلی آن صفر باشند، ماتریس پایین مثلثی گویند.)

$$B^T = \begin{bmatrix} 1^2 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ با توجه به نکات بالا داریم:}$$

$$B^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \bigcirc & -12 & 0 \\ \bigcirc & \bigcirc & 8 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه های روی قطر اصلی $B^T A$ برابر با $-1 + (-12) + 8 = -5$ است.

۴۵- گزینه ۲ در روش معمول باید A^T را پیدا کنیم و در B ضرب کنیم تا درایه مورد نظر سؤال را پیدا کنیم.

$$A^T = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ -7 & 0 & 25 \end{bmatrix}$$

$$A^T B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ -7 & 0 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 18 & 9 \\ 68 & -43 \end{bmatrix}$$

درایه واقع در سطر سوم و ستون دوم $A^T B$ برابر با -43 است.

روش دوم درایه واقع در سطر A و ستون A ماتریس ABC این طوری به دست می آید:

بنابراین: درایه واقع در سطر سوم و ستون سوم $A^T B$

$$= [A \text{ سطر سوم}] \times A \times [B \text{ ستون دوم}]$$

درایه واقع در سطر سوم و ستون دوم $A^T B$

$$= [1 \ 0 \ -5] \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = [-7 \ 0 \ 25] \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= 7 - 50 = -43$$

$$A^F = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۴۲- گزینه ۳ ماتریس همانی (I) را می شناسیم (درایه های روی قطر اصلی ماتریس همانی ۱ و درایه های غیرواقع بر قطر اصلی صفرند).

$$A + I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

بدون معطلی باید توان های دوم و سوم و بعد توان ششم $A + I$ را پیدا کنیم.

$$(A + I)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(A + I)^3 = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{bmatrix}$$

$$(A + I)^6 = (A + I)^3 (A + I)^3$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 364 & 364 \\ 364 & 365 \end{bmatrix}$$

$$a - b = 365 - 364 = 1$$

بنابراین: از روی $(A + I)^2$ و $(A + I)^3$ نیز می شد حدس زد که $a - b$ برابر یک می شود!

۴۳- گزینه ۲ به نظر می آید راهی به جز به توان رساندن نداریم!

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T = A^T \times A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

$$A^F = A^T \times A = \bar{O}$$

از به دست آوردن A^F راحت شدیم!

$$A + A^T + A^T + A^F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \bar{O} + \bar{O}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه های ماتریس $A + A^T + A^T + A^F$ برابر با $4 = 1 + 2 + 1$ است.

$$\text{روش دوم} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

صفر است. (قدیما می گفتند! این ماتریس ها پوچ توان از مرتبه ۳ هستند؛

$$\text{یعنی } A^{n \geq 3} = \bar{O} \Rightarrow A^3 = \bar{O}.$$

$A^3 = \bar{O}$ و $A^F = \bar{O}$ است؛ بنابراین فقط $A + A^T$ را به دست می آوریم.

$$A + A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه های ماتریس $A + A^T + A^T + A^F$ برابر ۴ است.

۴۶- گزینه ۲

به نظر می آید راهی غیر از یافتن A^3 ، A^2 و ... نداریم.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^6 = A^3 \times A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 21 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ما فقط ستون دوم ماتریس A^6 را می خواستیم (می توانستیم فقط درایه های سطر اول، دوم و سوم را در درایه های ستون دوم ضرب و با هم جمع کنیم).
 A^6 مجموع درایه های ستون دوم $= 6 + 1 + 0 = 7$

۴۷- گزینه ۲

یک راه این است که A^2 را بیابیم، بعد A^2 را در A^2 و سپس حاصل را در A^2 ضرب کنیم (می توانید A^2 را در A ضرب کنید و A^3 را به دست آورید و در A^3 ضرب کنید تا A^6 به دست آید).

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^6 = A^3 \times A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 18 & 18 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه های سطر اول A^6 برابر است با: $1 + 18 + 18 = 37$
روش دوم با توجه به A ، A^2 و A^3 می شود حدس زد که A^n به شکل مقابل است:

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 3n & 3n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

یعنی مجموع درایه های سطر اول ماتریس $A^n + 1$ ، A^n است؛ اگر به جای n عدد ۶ قرار دهیم، مجموع درایه های سطر اول ماتریس A^6 برابر می شود با: $6 \times 6 + 1 = 37$

۴۸- گزینه ۲

همین اول در مورد گزینه ها توضیح کوتاهی بدهیم!
 اگر تمام درایه های پایین قطر اصلی برابر صفر باشند به ماتریس، بالامثلی و اگر تمام درایه های بالای قطر اصلی برابر صفر باشند به ماتریس پایین مثلثی می گویند.
 اگر تمام درایه های غیرواقع بر قطر اصلی ماتریس برابر صفر باشند، به این ماتریس، قطری می گویند و اگر در ماتریس قطری تمام درایه های روی قطر اصلی برابر یک باشند، به این ماتریس، ماتریس همانی (واحد) گویند.

برای این که به A^4 برسیم باید A^2 را به دست آوریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

A^2 را در خودش ضرب می کنیم و به A^4 می رسیم! به همین سادگی!

$$A^4 = A^2 \times A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

بنابراین A^4 ، همانی است.

۴۹- گزینه ۳

A^2 را به دست می آوریم تا ببینیم بعد چه پیش می آید ...

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = -3A$$

بنابراین: $A^2 \times A = (-3A)A = -3A^2 = -3(-3A) = 3^2 A$
 $A^4 = A^2 \times A^2 = 3^2 A \times A = 3^2 \times A^2 = 3^2 (-3A) = -3^3 A$
 $A^5 = A^4 \times A = -3^3 A \times A = -3^3 A^2 = -3^3 (-3A) = 3^4 A$
 مجموع درایه های A برابر ۹- یا -3^2 است، پس مجموع درایه های A^5 برابر با $3^4 \times (-3^2) = -3^6$ خواهد بود.
 اگر دنبال A^n بودیم از روی $A^2 = -3A$ ، $A^3 = 3^2 A$ ، $A^4 = -3^3 A$ و ... می توانستیم حدس بزنیم $A^n = (-3)^{n-1} A$ است.

۵۰- گزینه ۳

طبق معمول اول باید A^2 را به دست آوریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

باید رابطه ای بین A ، A^2 و ... بیابیم.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

خیلی راحت 😊 می توان حدس زد که A^n به شکل $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ خواهد بود.

بنابراین: $A^{12} + A^{13} = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 13 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 25 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
 مجموع درایه های ماتریس $A^{12} + A^{13}$ برابر است با: $2 + 25 + 2 = 29$

۵۱- گزینه ۲

واضح است که باید A^2 را به دست بیاوریم.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -2I$$

حالا باید تکلیف A^4 و A^{12} را روشن کنیم.

$$A^4 = (A^2)^2 = (-2I)^2 = 4I^2 = 4I$$

$$A^{12} = (A^4)^3 = (4I)^3 = 64I$$

برگردیم به سؤال ببینیم چه چیزی از ما خواسته بود!

$$A^{12} = (kA)^4 = k^4 A^4 = k^4 (4I) = 4k^4 I$$

$$4k^4 I = 64I \Rightarrow k^4 = 16 \Rightarrow k = \pm 2$$

۵۲- گزینه ۴ توان‌های 1400 و 1401 به ما نشان می‌دهند که اول باید توان دوم ماتریس A را پیدا کنیم و با توجه به A^2 در مورد ادامه مسیر تصمیم بگیریم.

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$A^2 = I$ شد، پس A متناوب است؛ یعنی اگر A به توان طبیعی و زوج برسد برابر I و اگر A به توان طبیعی و فرد برسد برابر A می‌شود. بنابراین:

$$A^{1400} - A^{1401} = I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۵۳- گزینه ۴ چون توان ماتریس A خواسته شده، اول A^2 را به دست می‌آوریم.

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ m & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$A^2 = I$ شد یعنی ماتریس A ، متناوب است، پس:

$$\begin{cases} A^{\text{زوج}} = I \\ A^{\text{فرد}} = A \end{cases}$$

بنابراین:

$$A^{2n} - A^{2n-1} = I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ m & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -m & 0 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های $A^{2n} - A^{2n-1}$ برابر $2 - m$ شده، یعنی $2 - m = 7$ و $m = -5$ است.

۵۴- گزینه ۳ A^2 را به دست می‌آوریم تا راهی برای رسیدن به A^{2021} پیدا کنیم.

$$A^2 = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 4I$$

مسیر برای یافتن A^{2021} هموار شد 😊

$$A^{2021} = (A^2)^{1010} \times A = (4I)^{1010} \times A$$

$$= 2^{2020} (I^{1010}) \times A = 2^{2020} A$$

اگر از ما A^{2022} خواسته شده بود، می‌گفتیم $2^{2022} I$ ، زیرا:

$$A^{2022} = (A^2)^{1011} \times A^2 = 2^{2040} I \times (4I) = 2^{2042} I$$

نکته کنیدا $(n \in \mathbb{N}) \quad I^n = I$

۵۵- گزینه ۱ با تعریف داده شده، A را می‌نویسیم و چون توان 1400 از A خواسته شده، اول A^2 را پیدا می‌کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

A^2 هیچ کدام از ماتریس‌های خاص نیست، مجبوریم A^2 را نیز به دست بیاوریم و بعد تصمیم بگیریم.

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

به جای خوبی رسیدیم. حالا می‌توانیم به کمک A^3 ، A^{1400} را به دست آوریم.

$$A^{1400} = (A^3)^{466} \times A^2 = (-I)^{466} \times A^2 = I \times A^2 = A^2$$

۵۶- گزینه ۱ تابلوه که باید تکلیف $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^{12}$ را روشن کنیم.

در گام اول توان دوم ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ را به دست می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

باید توان سوم ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ را هم به دست بیاوریم تا بتوانیم در مورد توان‌های بعدی اظهار نظر کنیم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$$

از توان اول، دوم و سوم ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2n & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (-2) \times 12 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -24 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

با ضرب ماتریس‌های داده شده در صورت سؤال، مقادیر a ، b ، c و d مشخص می‌شود.

$$\begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -24 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^{12} = \begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -24 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -24 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -12 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -24 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^{12} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$$

پس:

$$= \begin{bmatrix} -6 & 21 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -6 & 21 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

از نتیجه می‌گیریم:

$$a = -6, b = 21, c = -6, d = 3$$

$$a + b + c - d = -6 + 21 - 6 - 3 = 6$$

بنابراین:

۵۷- گزینه ۳ با مرتب کردن رابطه داده شده داریم:

$$4A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a^2 - 2b & a + 2b \\ (b-1)^2 - 2a & a - b - 3 \end{bmatrix}$$

با توجه به این که A قطری است، پس درایه‌های غیرواقعه بر قطر اصلی آن صفرند. یعنی:

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \Rightarrow a = -2b \\ (b-1)^2 - 2a = 0 \Rightarrow 2a = (b-1)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (b-1)^2 = -4b \Rightarrow b^2 - 2b + 1 = -4b$$

$$\Rightarrow b^2 + 2b + 1 = 0 \Rightarrow (b+1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow b = -1 \Rightarrow a = 2$$

با جای گذاری $a = 2$ و $b = -1$ به $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ می‌رسیم.

ماتریس A قطری است. برای به دست آوردن A^{1401} کافی است درایه‌های روی قطر اصلی را به توان 1401 برسانیم.

$$A^{1401} = \begin{bmatrix} 2^{1401} & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^{1401} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \text{ضرب درایه‌های} \\ \text{روی قطر اصلی} \end{matrix} = 1$$

۵۸- گزینه ۲

اگر $A^T = I$ را به دست آورید می بینید که $A^T = I$ خواهد شد.

یاد بگیرید! که اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}$ باشد $A^T = I$ است.

بنابراین:

$$\begin{aligned} B^T + C^T &= (I - A)^T + (A + I)^T \\ &= I^T - 2AI + A^T + (A^T + 2AI + I^T) \\ &= I - 2A + A^T + A^T + 2A + I = 2A^T + 2I \end{aligned}$$

از آن جا که $A^T = I$ است، پس: $B^T + C^T = 2A^T + 2I = 2I + 2I = 4I$

دقت کنید! ۱

در حالت کلی اتحادها در ماتریس ها برقرار نیستند؛ اما اتحادها بین دو ماتریس A و I برقرارند.

۲ $I^n = I$

۳ اگر $A^T = I$ باشد (به ماتریس A ، متناوب گویند)، آن گاه:

$$\begin{cases} A^{2n} = I \\ A^{2n-1} = A \end{cases}$$

۵۹- گزینه ۲

از تعویض پذیری دو ماتریس A و B نتیجه می گیریم $AB = BA$ است. باید ببینیم سؤال از ما چه می خواهد تا مسیر مناسب برای حل را انتخاب کنیم.

$$\begin{aligned} (2A - B)(A + 3B) &= 2A^2 + 6\frac{AB}{BA} - BA - 3B^2 \\ &= 2A^2 + 5BA - 3B^2 \end{aligned}$$

کار خاصی نکردیم! دو پراتنر را در هم ضرب کردیم (حواسمان بود که ضرب ماتریس ها در حالت کلی خاصیت جابه جایی ندارد و ترتیب ماتریس ها در ضرب مهم است).

چون می دانستیم $AB = BA$ است، به جای AB ، ماتریس BA را قرار دادیم. همین.

A^T ، B^T و BA را داریم، پس می توانیم حاصل $(2A - B)(A + 3B)$ را پیدا کنیم.

$$\begin{aligned} (2A - B)(A + 3B) &= 2A^2 + 5BA - 3B^2 \\ &= 2 \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 14 & 20 \\ 30 & 44 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 30 & 50 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 30 & -6 \\ -9 & 21 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 46 \\ 69 & 73 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

۶۰- گزینه ۲

در حالت کلی ضرب ماتریس ها خاصیت تعویض پذیری ندارد؛ یعنی در ماتریس خیلی وقت ها $AB = BA$ نیست. مثلاً اتحاد $(A + B)^T$ در ماتریس ها به این شکل باز می شود.

$$(A + B)^T = (A + B)(A + B) = A^T + AB + BA + B^T$$

حالا که A^T ، B^T و $A + B$ را داریم، می توانیم با استفاده از اتحاد اشاره شده، $AB + BA$ را به دست آوریم.

$$(A + B)^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} (A + B)^T - A^T - B^T &= AB + BA \\ \begin{bmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix} &= AB + BA \\ AB + BA &= \begin{bmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

پس:

۶۱- گزینه ۲

یک راه این است که به جای A ، $B + C$ جایگزین کنیم و حاصل را به دست آوریم؛ این راه کمی طولانی است! ما با دسته بندی و فاکتورگرفتن کمی راحت تر سؤال را حل می کنیم. ببینید!

با توجه به رابطه $A = B + C$ داریم:

$$\begin{aligned} (A^T - AB) + (B^T - BA) &= A(A - B) + B(B - A) \\ &= A(C) + B(-C) = AC - BC = (A - B)C = C^T \end{aligned}$$

روش دوم

شاید باورتان نشود! $A^T + B^T - AB - BA$ باز شده $(A - B)^T$ است.

$$A^T + B^T - AB - BA = (A - B)(A - B) = (A - B)^T = C^T$$

دقت کنید!

در حالت کلی ضرب دو ماتریس خاصیت تعویض پذیری ندارد؛ یعنی در ماتریس ها خیلی اوقات $AB = BA$ نیست.

۶۲- گزینه ۲

اگر ضرب دو ماتریس خاصیت جابه جایی (تعویض پذیری) داشته باشد، اتحادهای جبری برای آن ها برقرار است و برعکس! در این جا برای A و B ، اتحاد برقرار است پس ضرب دو ماتریس خاصیت جابه جایی دارد، یعنی باید $AB = BA$ باشد، پس:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -4x - 3y & -3x - 4y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4x - 6 & -4y + 3 \\ -3x - 8 & -3y + 4 \end{bmatrix} \quad \text{بنابراین:} \\ \begin{cases} -2x - 8 = -5 \Rightarrow -2x = 3 \Rightarrow x = -1.5 \\ -3y + 4 = -2 \Rightarrow -3y = -6 \Rightarrow y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

اگر به جای x و y مقادیر آن ها را جایگزین کنیم، خواهید دید که بقیه درایه های ماتریس هم با هم برابرند.

حالا باید خواسته سؤال را برآورده کنیم!

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 + 4 - 2 = 1$$

۶۳- گزینه ۲

$A^T + AB + BA + B^T$ همان $(A + B)^T$ است. (می دانیم که در حالت کلی اتحادها در ماتریس ها برقرار نیستند).

از رابطه داده شده در صورت سؤال نتیجه می گیریم:

$$A + B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

باید $A + B$ را به توان ۲ برسانیم تا بعد ببینیم چه عملیاتی ما را به پاسخ می رساند.

$$(A + B)^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} I$$

تقریباً به پاسخ سؤال نزدیک شدیم.

$$\begin{aligned} (A^T + AB + BA + B^T)^T &= ((A + B)^T)^T = \left(-\frac{1}{2} I\right)^T \\ &= -\frac{1}{2} I^T = -\frac{1}{2} I = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

بنابراین مجموع درایه های ماتریس $(A^T + AB + BA + B^T)^T$ برابر $-\frac{1}{2} + (-\frac{1}{2}) = -1$ است با:

۶۹- گزینه ۳ از رابطه داده شده باید A^T و B^T بسازیم.

با ضرب طرفین رابطه $AB = B$ در B (از چپ) داریم:

$$AB = B \xrightarrow{B \times} (BA)B = B^T \xrightarrow{BA=A} AB = B^T$$

$$\xrightarrow{AB=B} B = B^T$$

با ضرب طرفین رابطه $BA = A$ در A (از چپ) داریم:

$$BA = A \xrightarrow{A \times} (AB)A = A^T$$

$$\xrightarrow{AB=B} BA = A^T \xrightarrow{BA=A} A = A^T$$

$$A^T B^T = AB = B$$

بنابراین:



روشنیم این طوری هم می شد ...

$$AB = B \xrightarrow{\times A} A(BA) = BA \xrightarrow{BA=A} A^T = A$$

$$BA = A \xrightarrow{\times B} B(AB) = AB \xrightarrow{AB=B} B^T = B$$

$$A^T B^T = AB = B$$

پس:

۷۰- گزینه ۲ از رابطه $A + B = I$ نتیجه می گیریم $B = I - A$ است.

درست است که در حالت کلی اتحادها در ماتریس ها برقرار نیستند؛ اما چون ضرب A و I تعویض پذیر است ($AI = IA = A$)، اتحادهای درجه ۲ در مورد A و I برقرارند (یک وقت فکر نکنید اتحادهای درجه ۳ برقرار نیستند، چون این جا کاری با آن ها نداریم در مورد آن ها حرفی نمی زنیم!)، بنابراین:

$$B^T = (I - A)^T = I^T - 2AI + A^T \Rightarrow B^T = A^T - 2A + I$$

$$\xrightarrow{B^T = -B} -B = A^T - A + (-A + I)$$

$$\xrightarrow{I - A = B} -B = A^T - A + B \Rightarrow A^T = A - 2B$$

$$\xrightarrow{\pm B} A^T = A + \underline{B - 2B} \xrightarrow{A + B = I} A^T = I - 2B$$

حالا باید $A^T B$ را بیابیم.

$$A^T = I - 2B \xrightarrow{\times B} A^T B = (I - 2B)B \Rightarrow A^T B = IB - 2B^T$$

با توجه به این که $B^T = -B$ است، داریم:

$$A^T B = B - 2B^T \Rightarrow A^T B = B - 2(-B) \Rightarrow A^T B = 4B$$

روشنیم مثال هم چیز خوبی است!

فرض کنید $B = -I$ و $A = 2I$ باشد که در هر دو رابطه $B^T = -B$ و $A + B = I$ صدق می کنند، باید $A^T B$ را به دست آوریم.

$$A^T B = (2I)^T (-I) = (2I^T)(-I) = -4I$$

در گزینه ها به جای B ، $-I$ قرار می دهیم، هر کدام که $-4I$ داد قابل قبول است؛ $-4I$ می دهد، پس همین گزینه درست است.

۷۱- گزینه ۳ خاصیت شرکت پذیری در ضرب ماتریس ها را به یاد دارید؟! می گفت

$$A(BC) = (AB)C$$

سؤال از ما B^T خواسته و عباراتی را هم به ما داده که به کمک آن ها پاسخ را پیدا کنیم.

$$B^T = B \times B^T \xrightarrow{B=BA} B^T = (BA)B^T$$

$$= B(AB^T) \xrightarrow{AB^T=A} B^T = BA \xrightarrow{BA=B} B^T = B$$

$$A^T = 2A + I$$

۶۴- گزینه ۲ داریم:

طرفین تساوی بالا را در A^T ضرب می کنیم و هر جا A^T دیدیم به جای آن $2A + I$ قرار می دهیم.

$$A^T \times A^T = A^T (2A + I) \Rightarrow A^4 = (2A + I)(2A + I)$$

$$\Rightarrow A^4 = 4A^2 + 4A + I \Rightarrow A^4 = 4(2A + I) + 4A + I$$

$$\Rightarrow A^4 = 12A + 5I$$

کافی است طرفین تساوی بالا را در A ضرب کنیم تا A^5 به دست آید.

$$A \times A^4 = A(12A + 5I) \Rightarrow A^5 = 12A^2 + 5A$$

$$\Rightarrow A^5 = 12(2A + I) + 5A \Rightarrow A^5 = 29A + 12I$$

$$A^5 - A^4 = (29A + 12I) - (12A + 5I) = 17A + 7I$$

بنابراین:

حواسمان هست! که:

۱ I به هر توانی برسد خودش می شود ($I^n = I$).

۲ ضرب هر ماتریسی در I خودش می شود ($AI = IA = A$).

۶۵- گزینه ۲ را داریم. (از کجا؟! فور سؤال داده!)

$$A^T = A - I$$

A^T ماتریس خاصی نیست که بتوانیم A^{2021} را راحت پیدا کنیم.

A^3 را به دست می آوریم، شاید کمکی کرد.

$$A^T = A^T \times A = (A - I) \times A$$

$$= A^T - A = (A - I) - A = -I$$

دقت کنید! به جای A^T ، $A - I$ جایگزین کردیم.

A^{2021} را تبدیل به توان های ۳ از A می کنیم:

$$A^{2021} = (A^T)^{673} \times A^T$$

$$\Rightarrow A^{2021} = (-I)^{673} \times A^T = -I \times (A - I) = (I - A)$$

۶۶- گزینه ۲ برای رسیدن به B^{1401} باید B^T را به دست آوریم.

$$A + B = I - A \Rightarrow B = I - 2A$$

$$\Rightarrow B^T = (I - 2A)^T = I^T - 4AI + 4A^T = 4A^T - 4A + I$$

$$B^T = 4(A) - 4A + I = I$$

سؤال گفته $A^T = A$ است، پس:

آخرین مرحله، ساختن B^{1401} است.

$$B^{1401} = (B^T)^{700} \times B = I^{700} \times B = I \times B = B$$

دقت کنید! ۱ $I^T = I$ (اصولاً) به توان عدد حسابی برسد، برابر

با I می شود.

۲ A و I تعویض پذیرند، یعنی $AI = IA$.

۶۷- گزینه ۳ از قبل با خاصیت شرکت پذیری در ضرب ماتریس ها آشنا هستیم:

$$(AB)C = A(BC)$$

با استفاده از خاصیت شرکت پذیری و مفروضات داده شده در تست داریم:

$$B^T = B \times B = (BA)B = B(AB) = BA = B$$

۶۸- گزینه ۲ با فاکتورگیری A از رابطه $A^T - AB + kB$ و

جایگزین کردن $-kI$ به جای $A - B$ داریم:

$$A(A - B) + kB = A(-kI) + kB = -kA + kB$$

$$= -k(A - B) = -k(-kI) = k^2 I$$

۷۲- گزینه ۴ طرفین رابطه $B - A = I$ را از چپ در B ضرب می‌کنیم

تا B^T ایجاد شود.

$$B - A = I \xrightarrow{B \times} B^T - BA = BI \Rightarrow B^T - BA = B \quad (1)$$

یک بار هم طرفین رابطه را از راست در B ضرب می‌کنیم.

$$B - A = I \xrightarrow{\times B} B^T - AB = IB \Rightarrow B^T - AB = B \quad (2)$$

از دو رابطه (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$AB = BA$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) و $B^T = B + I$ نتایج دیگری هم می‌توانیم بگیریم:

$$B^T - BA = B \xrightarrow{B^T = B + I} (B + I) - BA = B$$

$$\Rightarrow BA = I \xrightarrow{B \times} B^T A = B$$

$$B^T - AB = B \xrightarrow{B^T = B + I} (B + I) - AB = B$$

$$\Rightarrow AB = I \xrightarrow{A \times} A^T B = A$$

۷۳- گزینه ۱ باید سعی کنیم از رابطه‌های داده‌شده به توان‌های A برسیم.

اگر طرفین رابطه $BA = 2A$ را از چپ در A ضرب کنیم، داریم:

$$ABA = A(2A) \Rightarrow (AB)A = 2A^2 \xrightarrow{AB=B} BA = 2A^2$$

با توجه به فرض سؤال، A^2 به دست می‌آید.

$$\begin{cases} BA = 2A^2 \\ BA = 2A \end{cases} \Rightarrow 2A^2 = 2A \Rightarrow A^2 = A$$

به راحتی می‌توانیم A^4 و A^5 را از روی $A^2 = A$ به دست آوریم.

$$A^2 = A \xrightarrow{\text{توان } 2} A^4 = A^2 \xrightarrow{A^2=A} A^4 = A$$

$$\xrightarrow{\times A^2} A^6 = A^3 \xrightarrow{\times A} A^5 = A^4 \xrightarrow{A^4=A} A^5 = A$$

$$2A^5 - 3A^4 = 2A - 3A = -A$$

بنابراین:

نکته کنید! اگر $A^2 = A$ باشد به ماتریس A خودتوان گویند؛ یعنی A به هر توانی (البته توان طبیعی) برسد، خودش می‌شود.

$$A^2 = A \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} A^n = A$$

$$A^4 = A^5 = A \Rightarrow 2A^5 - 3A^4 = 2A - 3A = -A$$

پس:

۷۴- گزینه ۲ $B(A)^4$ را از ما خواسته! بازش کنیم ببینیم با چه چیزی روبه‌رو هستیم ...

$$A(BA)^4 B = A(BA)(BA)(BA)(BA)B$$

$$= (AB)(AB)(AB)(AB)(AB) = (AB)^5$$

در واقع سؤال $(AB)^5$ را می‌خواسته اما با کمی شیطنت!!!

اول $(AB)^2$ را پیدا می‌کنیم و کم‌کم پیش می‌رویم تا به $(AB)^5$ برسیم.

$$(AB)^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^5 = (AB)^4 (AB) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ماتریس $(AB)^5$ برابر با $0 = 1 + (-1) + 2 + (-2)$ است.

۷۵- گزینه ۲ باید بتوانیم از روی $AB = 2BA$ ، AB^T و $B^T A$ بسازیم.

اگر طرفین رابطه $AB = 2BA$ را از راست در B^T ضرب کنیم، داریم:

$$AB = 2BA \xrightarrow{\times B^T} AB^T = 2BAB^T \Rightarrow AB^T = 2B(AB)B$$

$$\xrightarrow{AB=2BA} AB^T = 2B(2BA)B \Rightarrow AB^T = 4B^T(AB)$$

$$\xrightarrow{AB=2BA} AB^T = 4B^T(2BA) \Rightarrow AB^T = 8B^T A$$

$$\xrightarrow{\div 8} B^T A = \frac{1}{8} AB^T$$

بنابراین $k = \frac{1}{8}$ است.

۷۶- گزینه ۲ از $2A + 3B = \vec{0}$ نتیجه می‌گیریم: $B = -\frac{2}{3}A$

از $A^2 = -\frac{3}{4}A$ هم نتیجه می‌گیریم:

$$A^4 = \left(-\frac{3}{4}A\right)^2 = \frac{9}{16}A^2 = \frac{9}{16}\left(-\frac{3}{4}A\right) = -\frac{27}{64}A$$

$$A(A+B)(2A-B)(A-B)$$

بنابراین:

$$= A\left(A - \frac{2}{3}A\right)\left(2A + \frac{2}{3}A\right)\left(A + \frac{2}{3}A\right)$$

$$= A\left(\frac{A}{3}\right)\left(\frac{8A}{3}\right)\left(\frac{5A}{3}\right) = \frac{40}{27}A^3 = \frac{40 \cdot \left(-\frac{27}{64}A\right)}{27} = -\frac{5}{4}A$$

۷۷- گزینه ۴ اگر $A \times B = C$ باشد، درایه‌های واقع در سطر i ام و

ستون j ام ماتریس C از حاصل ضرب سطر i ام ماتریس A در ستون j ام ماتریس B به دست می‌آید.

از ما درایه واقع در سطر چهارم و ستون سوم AB (یعنی C_{43}) را خواسته، بنابراین این درایه از ضرب سطر چهارم A در ستون سوم B به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = (0 \times (-1)) + (5 \times 2) + (2 \times 5) + ((-1) \times 0) = 20$$

۷۸- گزینه ۱ باید ضرب کنیم درگه

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & x \\ -x & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+8 & -3 & x+3 \end{bmatrix}$$

حالا باید ماتریس بالا را در $\begin{bmatrix} -2 \\ -10 \\ -x \end{bmatrix}$ ضرب کنیم.

$$\begin{bmatrix} x+8 & -3 & x+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -10 \\ -x \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -2x - 16 + 30 - x^2 - 3x = 0$$

$$\Rightarrow -x^2 - 5x + 14 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x - 14 = 0$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = -\frac{14}{1} = -14$$

تذکره می‌دانیم حاصل ضرب ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ برابر

$-\frac{c}{a}$ است.

$$A^{1400} = (A^7)^{200} = I^{200} = I \quad \text{په قدر فوق شد!}$$

$$A^{1399} = (A^7)^{198} \times A = I^{198} \times A = I \times A = A \quad \text{بنابراین:}$$

$$A^{1400} - A^{1399} = I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

دقت کنید! ۱) ماتریس همانی (I) به هر توانی (منظورم توان حسابی است) برسد، خودش می شود. $I^n = I$

۲) ماتریس همانی (I) در هر ماتریس هم مرتبه ای مانند A ضرب شود، حاصل A می شود. $I \times A = A \times I = A$

۸۴- گزینه ۲ سعی می کنیم از روی A، A^2 ، A^3 ، ... و A^n را حدس

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{بزنیم.}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{می توان گفت } A^n \text{ به صورت } \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ است.}$$

بنابراین $A^n - A^{n-1}$ برابر است با:

$$\begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^n - 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^n(1 - \frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

می توانستید A^2 و A^3 را به دست آورید و تفاضل آن ها را در گزینه ها پیدا کنید. (چرا؟ چون حاصل گزینه ها باید به ازای هر توان طبیعی n برقرار باشد).

$$A^3 - A^2 = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

باید ببینیم به ازای $n=3$ ، کدام گزینه $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ را به ما می دهد.

۲) همان گزینه مطلوب ما است.

۸۵- گزینه ۲ اول باید بدانیم اگر A به توان برسد چه شکلی می شود.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{۲}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{۳}$$

می توان حدس زد که A^n به شکل $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ خواهد بود.

$$BA^n = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4n+1 \\ 3 & 3n+2 \end{bmatrix} \quad \text{بنابراین:}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4n+1 \\ 3 & 3n+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 41 \\ 3 & 32 \end{bmatrix} \Rightarrow 4n+1=41 \Rightarrow n=10 \quad \text{پس باید: } n=10$$

دقت کنید! اگر از $3n+2=32$ نیز، n را به دست می آورید ۱۰ می شد!

۷۹- گزینه ۳ A^2 را به دست می آوریم و بعد تصمیم می گیریم چه طور

به A^6 برسیم.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 3A$$

$$A^3 = A^2 \times A = 3A \times A = 3A^2 = 3(3A) = 9A \quad \text{بنابراین:}$$

$$A^6 = A^3 \times A^3 = 9A \times 9A = 81A^2 = 81(3A)$$

$$= 3^4 \times 3^1 A = 3^5 A$$

مجموع درایه های ماتریس A برابر ۹ یا 3^2 است.

بنابراین مجموع درایه های ماتریس A^6 برابر $3^5 \times 3^2 = 3^7$ است.

اگر از ما A^n را خواسته بود از روی $A^2=3A$ ، $A^3=3A^2$ و ... می گفتیم $A^n = 3^{n-1} A$ است.

۸۰- گزینه ۲ از تکنیک جایگزینی! برای حل سؤال استفاده می کنیم:

$$BA = 2AB \Rightarrow AB = \frac{BA}{2}$$

$$mAB^2 = B^2 A \Rightarrow m(AB)B^2 = B^2 A \quad \text{بنابراین:}$$

$$\Rightarrow m\left(\frac{BA}{2}\right)B^2 = B^2 A \Rightarrow m\left(\frac{B}{2}\right)(AB)B = B^2 A$$

$$\Rightarrow m\left(\frac{B}{2}\right)\left(\frac{BA}{2}\right)B = B^2 A \Rightarrow m\left(\frac{B}{2}\right)\left(\frac{B}{2}\right)(AB) = B^2 A$$

$$\Rightarrow m\left(\frac{B}{2}\right)\left(\frac{B}{2}\right)\left(\frac{BA}{2}\right) = B^2 A$$

بعد از جایگزینی های نفس گیر، می توانیم جواب سؤال را بدهیم.

$$\frac{m}{27} B^2 A = B^2 A \Rightarrow m = 27$$

۸۱- گزینه ۱ از $A+B=I$ نتیجه می گیریم: $B=I-A$

کافی است یک بار از راست و یک بار از چپ، رابطه بالا را در A ضرب کنیم.

$$B=I-A \xrightarrow{A \times} AB = A - A^2$$

$$\xrightarrow{A^2=A} AB = A - A = \bar{O}$$

$$B=I-A \xrightarrow{\times A} BA = A - A^2$$

$$\xrightarrow{A^2=A} BA = A - A = \bar{O}$$

$$AB = BA \quad \text{بنابراین:}$$

۸۲- گزینه ۲ در حالت کلی ضرب دو ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$ به صورت $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a+b & 1 \end{bmatrix}$ است. بنابراین:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -11 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(0-1) + (2-3) + \cdots + (10-11) = \underbrace{-1-1-\cdots-1}_{6 \text{ جمله}} = -6 \quad \text{دقت کنید!}$$

۸۳- گزینه ۳ A^2 را به دست بیاوریم، شاید فرجی شد ...

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

۸۶- گزینه ۴ از $A^T - A = \bar{O}$ نتیجه می گیریم $A^T = A$ است.

توان دوم ماتریس $(2A - I)$ را به دست می آوریم ببینیم چه پیش می آید ...

$$(2A - I)^T = 4A^T - 4AI + I^T = 4A^T - 4A + I$$

$$\xrightarrow{A^T = A} (2A - I)^T = 4A - 4A + I \Rightarrow (2A - I)^T = I$$

ما $(2A - I)^{1399}$ را می خواهیم، پس:

$$(2A - I)^{1399} = (2A - I)^{1398} (2A - I) = I^{699} (2A - I) = 2A - I$$

بد نیست بدانید! 

اگر $A^T = I$ شود، به ماتریس A متناوب گویند. ماتریس متناوب به توان

زوج برسد برابر I است و اگر به توان فرد برسد، خودش می شود.

$$A^T = I \xrightarrow{k \in \mathbb{N}} \begin{cases} A^{2k} = I \\ A^{2k-1} = A \end{cases}$$