



گنبد

۲۵

خط سفید

حسابان ۲

حسین ایلون کشکولی
دکتر احمد سپهریان

پیشگفتار

دروود و ادب به تمامی دبیران و مدرسان گرامی و دانش آموزان دوست داشتنی و سخت‌کوش سراسر ایران پهناور با توجه به تغییرات صورت گرفته در شرایط برگزاری کنکور سراسری و **تأثیر سوابق تحصیلی** در ورود به دانشگاه و موسسات آموزش عالی، بر آن شدیم تا منبعی مطمئن برای یادگیری و آموزش اثربخش و سنجش و ارزیابی هدفمند و موثر فراهم کرده و مسیر دانش آموزان عزیز را جهت کسب **نمره (۲۰)** در تمام امتحانات پیش رویشان هموار سازیم

درباره کتاب

مجموعه کتاب‌های **سیگنال ۲۰ خط سفید** برای تمام دروس پایه دوازدهم در ۳ رشته تحصیلی علوم ریاضی و فیزیک، علوم تجربی و علوم انسانی به تالیف و گردآوری رسیده و شامل ۴ بخش اصلی می‌باشد.

۱. آموزش (درسنامه کامل کاربردی)

محتوای تالیفی درسنامه‌ها شامل تمام مطالب آموزشی مهم و کاربردی و **مفاهیم اساسی** و **نکات کلیدی** کتاب درسی بوده که موجب **تسهیل فرآیند یادگیری** شده و امکان **مرورهای سریع** و **مانا** و همچنین **جمع‌بندی‌های دوره‌ای** را در طول سال تحصیلی فراهم می‌سازد.

۲. سنجش (سوالات امتحانات نهایی و احتمالی)

به منظور بالا بردن سطح **توانایی و مهارت** دانش‌آموزان پایه دوازدهم برای پاسخگویی کامل و درست به پرسش‌های امتحانات گوناگون و تقویت یادگیری، سوالاتی در تیپ و قالب‌های متنوع **نهایی و تالیفی-احتمالی** گردآوری و تالیف گردیده است؛ که با تمرین و تکرار مداوم این سوالات، امکان شناخت **نقاط قوت و ضعف** دانش‌آموزان را در درس‌های مختلف فراهم می‌سازد.

۳. نمونه سوال امتحان (امتحانات ۲۰ نمره‌ای نوبت اول و دوم - نهایی و احتمالی)

علاوه بر مجموعه سوالات طبقه‌بندی شده، آزمون‌های تالیفی-احتمالی نوبت اول (دی‌ماه)، آزمون‌های تالیفی-احتمالی نوبت اول (خردادماه)، آزمون‌های شبه نهایی کشوری (از سوی وزارت آموزش و پرورش) و آخرین آزمون نهایی خرداد، جهت بررسی و ارزیابی میزان یادگیری و ارتقاء هرچه بیشتر توانمندی دانش‌آموزان عزیز و کسب نتیجه عالی، فراهم شده است.

۴. پاسخنامه تشریحی آموزشی

پاسخنامه کامل تشریحی و آموزشی سوالات در پایان کتاب برای تقویت یادگیری و کاهش حداکثری خطاها و اشتباهات احتمالی دانش‌آموزان آماده سازی شده است.

۵. کیو آر کد

جدیدترین سوالات امتحان نهایی، به همراه راهنما و پاسخنامه تشریحی آموزشی در آخر کتاب، گنجانده شده است.

سیگنال بگیر تا بیست برو!

فهرست

درس‌نامه	سوال	پاسخنامه تشریحی
فصل ۱: درس اول..... ۳..... ۶..... ۹۹		
درس دوم..... ۱۰..... ۱۴..... ۱۰۵		
فصل ۲: درس اول..... ۱۷..... ۲۳..... ۱۱۳		
درس دوم..... ۲۵..... ۲۸..... ۱۱۶		
فصل ۳: درس اول..... ۳۱..... ۴۰..... ۱۲۱		
درس دوم..... ۳۷..... ۴۰..... ۱۲۱		
فصل ۴: درس اول..... ۴۸..... ۴۹..... ۱۲۵		
درس دوم..... ۵۱..... ۵۷..... ۱۲۷		
درس سوم..... ۶۰..... ۶۱..... ۱۳۳		
فصل ۵: درس اول..... ۶۲..... ۸۲..... ۱۳۵		
درس دوم..... ۷۸..... ۸۲..... ۱۳۵		
درس سوم..... ۸۴..... ۸۶..... ۱۳۹		

سوال	پاسخنامه امتحان
امتحان شماره ۱ (نوبت اول - احتمالی)..... ۴۴..... ۱۴۳	
امتحان شماره ۲ (نوبت اول - احتمالی)..... ۴۶..... ۱۴۴	
امتحان شماره ۳ (نوبت دوم - احتمالی)..... ۸۷..... ۱۴۷	
امتحان شماره ۴ (نوبت دوم - احتمالی)..... ۸۹..... ۱۴۸	
امتحان نهایی شهریور ماه ۱۴۰۱..... ۹۱..... ۱۵۱	
امتحان نهایی دی ماه ۱۴۰۱..... ۹۳..... ۱۵۲	
امتحان نهایی خرداد ماه ۱۴۰۲..... ۹۵..... ۱۵۴	
امتحان نهایی خرداد ماه ۱۴۰۳..... ۹۷..... ۱۵۵	
آزمون‌های تکمیلی (کیوآرکد)..... ۱۵۷	

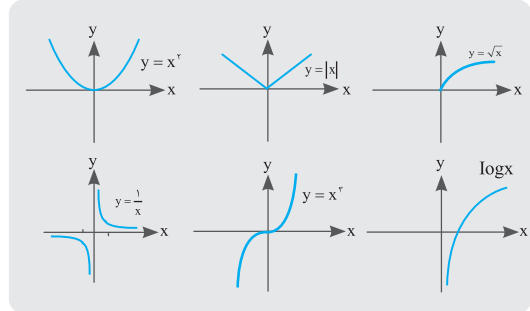
بارم‌بندی

فصل	محدوده فصل	نوبت اول دی	نوبت دوم خرداد	شهریور و دی
۱	کل	۷	۲	۳
۲	کل	۵	۲	۳
۳	کل	۵	۲	۲
۴	تا صفحه ۷۶	۳	۱	۵
	صفحه ۷۷ به بعد		۴	
	کل		۳/۵	
	کل		۳/۵	
۷	کل		۲	۱/۵
جمع نمرات		۲۰	۲۰	۲۰



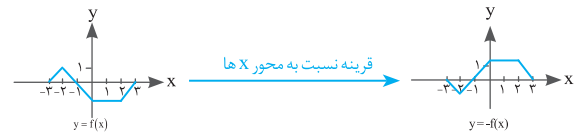
درس اول: تبدیل نمودار توابع

در سال های قبل رسم نمودار برخی از توابع مهم را یاد گرفتیم که به مرور آنها می پردازیم.

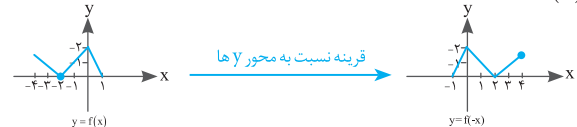


اکنون می خواهیم با استفاده از برخی تبدیلات هندسی، به کمک نمودارهای بالا نمودارهای برخی توابع دیگری را رسم کنیم.

قبل از بررسی حالت های ممکن تبدیلات نمودار، ۴ تبدیل خاص را بررسی می کنیم.
۱- برای رسم نمودار تابع $y = -f(x)$ از روی نمودار تابع $y = f(x)$ ، کافی است قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ را نسبت به محور x ها رسم کنیم.



۲- برای رسم نمودار تابع $y = f(-x)$ از روی نمودار تابع $y = f(x)$ ، کافی است که قرینه نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور y ها رسم کنیم.



۳- برای رسم نمودار تابع $y = |f(x)|$ از روی نمودار تابع $y = f(x)$ ، کافی است قرینه قسمتی از نمودار تابع $y = f(x)$ که زیر محور x ها قرار دارد را نسبت به محور x ها رسم کنیم.



۴- برای رسم نمودار $y = f(|x|)$ ، قسمتی از نمودار f که سمت چپ محور y ها است را حذف می کنیم و قرینه سمت راست را نسبت به محور y ها، در سمت چپ رسم می کنیم.



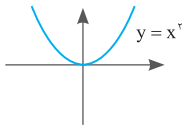
انتقال قائم

برای رسم نمودار $y = f(x) + k$

الف) اگر $k > 0$ باشد نمودار تابع $y = f(x)$ را با حفظ طول، k واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال می دهیم.

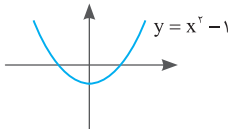
ب) اگر $k < 0$ باشد نمودار تابع $y = f(x)$ را با حفظ طول، $|k|$ واحد در راستای قائم به سمت پایین انتقال می دهیم.

مثال: با توجه به نمودار تابع $y = x^2$ نمودار تابع های $y = x^2 - 1$ و $y = x^2 + 3$ را به کمک انتقال نمودار رسم کنید.

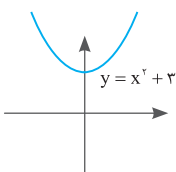


ابتدا نمودار تابع $y = x^2$ را رسم می کنیم.

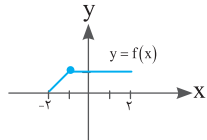
برای رسم نمودار تابع $y = x^2 - 1$ باید نمودار تابع $y = x^2$ را یک واحد به پایین



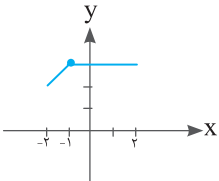
و برای رسم نمودار تابع $y = x^2 + 3$ باید نمودار تابع $y = x^2$ را ۳ واحد به بالا انتقال دهیم.



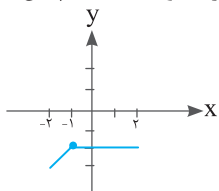
مثال: اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد نمودار تابع های $y = f(x) - 3$ و $y = f(x) + 2$ را رسم کنید.



برای رسم نمودار تابع $y = f(x) + 2$ باید نمودار تابع را دو واحد به سمت بالا انتقال دهیم.



برای رسم نمودار تابع $y = f(x) - 3$ باید نمودار تابع را سه واحد به سمت پایین انتقال دهیم.



تذکره!

در رسم تابع $y = f(x) + k$ از روی تابع $y = f(x)$ ، دامنه تابع ثابت اما عرض نقاط با k جمع می شود.

به عبارتی اگر $[a, b]$ و $[c, d]$ به ترتیب دامنه و برد تابع $y = f(x)$ باشد آنگاه دامنه و برد تابع $y = f(x) + k$ به ترتیب $[a, b]$ و $[c + k, d + k]$ خواهد بود.

مثال: اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به ترتیب $[-1, 3]$ و $[0, 2]$ باشد دامنه و برد تابع $y = f(x) - 1$ را بیابید.

دامنه تابع تغییر نمی کند اما برد تابع یک واحد کاهش می یابد $D = [-1, 3]$ دامنه برد $R = [-1, 2] = [0 - 1, 2 - 1]$

انتقال افقی

برای رسم نمودار تابع $y = f(x + k)$ از روی نمودار تابع $y = f(x)$

الف) اگر $k > 0$ آنگاه نمودار تابع $y = f(x)$ را با حفظ عرض ها، k واحد در جهت افقی

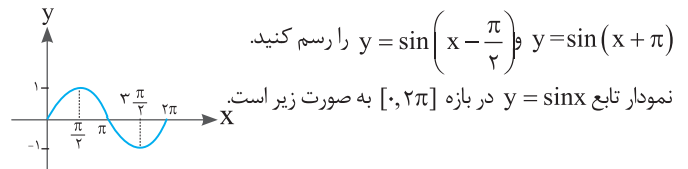
و به سمت چپ انتقال می‌دهیم.

ب) اگر $k < 0$ آنگاه نمودار تابع $y = f(x)$ با حفظ عرض ها، $|k|$ واحد در جهت افقی و به سمت راست انتقال می‌دهیم.

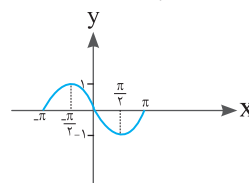
نکته

انتقال افقی در خلاف جهت علامت k خواهد بود به عبارتی x ها لیج باز هستند.

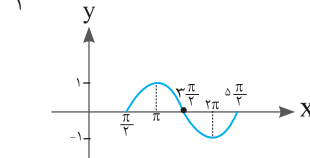
مثال: ابتدا نمودار تابع $y = \sin x$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید پس نمودار تابع های



نمودار تابع $y = \sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ به صورت زیر است. برای رسم نمودار تابع $y = \sin(x + \pi)$ باید نمودار تابع $y = \sin x$ را به اندازه π واحد به سمت چپ انتقال دهیم.



برای رسم نمودار تابع $y = \sin(x - \frac{\pi}{3})$ باید نمودار تابع $y = \sin x$ را به اندازه $\frac{\pi}{3}$ واحد به سمت راست انتقال دهیم.



تذکر

برد تابع $y = f(x + k)$ با برد تابع $y = f(x)$ برابر است اما دامنه آن به اندازه $(-k)$ واحد با دامنه تابع $y = f(x)$ جمع می‌شود. به عبارتی اگر $[a, b]$ و $[c, d]$ به ترتیب دامنه و برد تابع $y = f(x)$ باشد دامنه و برد تابع $y = f(x + k)$ به ترتیب $[a - k, b - k]$ و $[c, d]$ خواهد بود.

مثال: اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به ترتیب $[-2, 2]$ و $[0, 4]$ باشد دامنه و برد تابع $y = f(x - 3)$ را بیابید.

برای بدست آوردن دامنه تابع جدید باید دامنه تابع قبلی را با ۳ جمع کنیم.

$$\text{دامنه } D = [-2 + 3, 2 + 3] = [1, 5]$$

$$\text{برد } R = [0, 4]$$

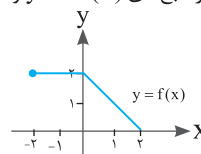
برد تابع تغییر نمی‌کند

انبساط و انقباض عمودی

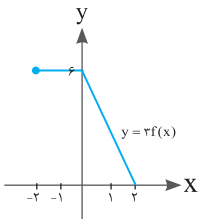
برای رسم نمودار تابع $y = kf(x)$ از روی نمودار تابع $y = f(x)$ کافی است که با حفظ طول ها (دامنه)، عرض نقاط را در k ضرب کنیم.

اگر $k > 1$ ، نمودار $y = kf(x)$ از انبساط عمودی نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود. و اگر $0 < k < 1$ باشد نمودار $y = kf(x)$ از انقباض عمودی نمودار $y = f(x)$ به دست می‌آید.

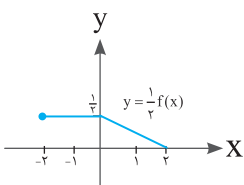
مثال: اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد نمودار تابع های $y = 2f(x)$ و $y = \frac{1}{2}f(x)$ را رسم کنید.



برای رسم نمودار تابع $y = 3f(x)$ باید عرض نقاط تابع $y = f(x)$ را ۳ برابر کنیم.



برای رسم نمودار تابع $y = \frac{1}{2}f(x)$ باید عرض نقاط تابع $y = f(x)$ را در $\frac{1}{2}$ ضرب کنیم



تذکر

دامنه تابع های $y = kf(x)$ و $y = f(x)$ با هم برابر است. اما برد تابع $y = kf(x)$ ، k برابر برد تابع $y = f(x)$ است.

مثال: اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به ترتیب برابر با $[-1, 1]$ و $[-4, 6]$ باشد دامنه و برد تابع $y = 2f(x)$ را بیابید.

$$D_g = [-1, 1]$$

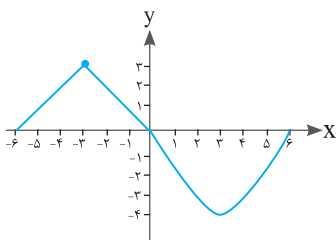
$$R_g = [-8, 12]$$

انبساط و انقباض افقی

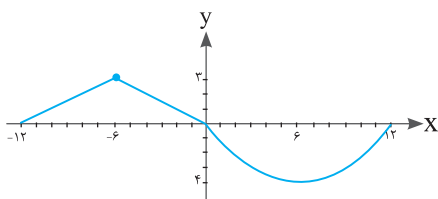
برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ از روی نمودار تابع $y = f(x)$ با حفظ عرض نقاط، طول آنها را در $\frac{1}{k}$ ضرب می‌کنیم.

اگر $k > 1$ باشد نمودار $y = f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور x ها به دست می‌آید و اگر $0 < k < 1$ باشد این نمودار از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود.

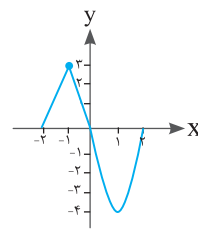
مثال: اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد نمودار تابع های $y = f(\frac{x}{2})$ و $y = f(2x)$ را رسم کنید.



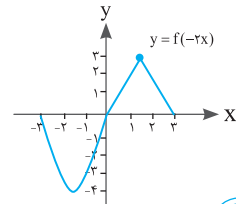
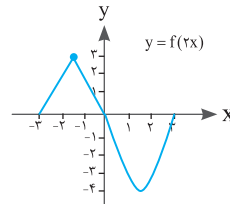
برای رسم نمودار تابع $y = f(\frac{x}{2})$ ، باید طول نقاط تابع $y = f(x)$ را ۲ برابر کنیم.



برای رسم نمودار تابع $y = f(3x)$ باید طول نقاط تابع $y = f(x)$ را در $\frac{1}{3}$ ضرب کنیم.



برای رسم نمودار تابع $y = f(-2x)$ باید طول نقاط تابع $y = f(x)$ را در $\frac{1}{2}$ ضرب کنیم سپس قرینه نمودار حاصل را نسبت به محور y ها رسم می کنیم.



تذکر

برد تابع های $y = f(kx)$ و $y = f(x)$ با هم برابر است. اما دامنه تابع $y = f(kx)$ $\frac{1}{k}$ برابر دامنه تابع $y = f(x)$ است.

مثال: دامنه و برد تابع $y = f(x)$ ، به ترتیب $[-4, 6]$ و $[0, 5]$ است.

دامنه و برد تابع $f(-2x)$ را بیابید.

$$R_g = [0, 5]$$

برد تابع g با برد تابع f برابر است.

$$D_g = -\frac{1}{2} \times [-4, 6] = [-3, 2]$$

دامنه تابع g ، $\frac{1}{2}$ برابر دامنه تابع f است پس

نکته طلایی

برای رسم نمودار ترکیبی تابع $y = a f(bx + c) + d$ از روی نمودار تابع $y = f(x)$ ۴ مرحله زیر را به ترتیب انجام می دهیم.

۱- انتقال افقی طول ها - c واحد در خلاف جهت علامت آن

۲- ضرب طول ها در $\frac{1}{b}$

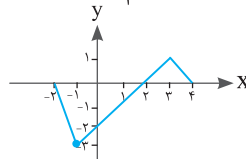
۳- ضرب عرض ها در a

۴- انتقال عمودی به اندازه d واحد در جهت علامت آن.

نکته

برای رسم تابعی از روی تابع دیگر، باید نقاطی که مشخص هستند، همچنین نقاط گوشه و نقاط خاص توابع را در نظر بگیریم سپس ۴ عمل بالا را به ترتیب روی آنها اعمال کنیم. اگر مرحله ای از بین ۴ مرحله بالا نبود آن مرحله را حذف می کنیم.

مثال: نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. نمودار تابع $y = -2f\left(\frac{x}{2} - 1\right) + 3$ را رسم کنید سپس دامنه و برد آن را بیابید.



نقاط $(-2, 0)$ ، $(-1, -3)$ ، $(2, 0)$ ، $(3, 1)$ ، $(4, 0)$ را از تابع $y = f(x)$ در نظر می گیریم حال ۴ مرحله را به ترتیب انجام می دهیم.

مرحله اول: طول نقاط را با یک جمع می کنیم.

مرحله اول $(-1, 0) \rightarrow (-2, 0)$

مرحله اول $(0, -3) \rightarrow (-1, -3)$

مرحله اول $(2, 0) \rightarrow (3, 0)$

مرحله اول $(3, 1) \rightarrow (4, 1)$

مرحله اول $(4, 0) \rightarrow (5, 0)$

مرحله دوم: طول نقاط جدید را در ۲ ضرب می کنیم.

مرحله دوم $(-2, 0) \rightarrow (-1, 0)$

مرحله دوم $(0, -3) \rightarrow (0, -3)$

مرحله دوم $(3, 0) \rightarrow (6, 0)$

مرحله دوم $(4, 1) \rightarrow (8, 1)$

مرحله دوم $(5, 0) \rightarrow (10, 0)$

مرحله سوم: عرض همه نقاط جدید را در -۲ ضرب می کنیم.

مرحله سوم $(-2, 0) \rightarrow (-2, 0)$

مرحله سوم $(0, -3) \rightarrow (0, 6)$

مرحله سوم $(6, 0) \rightarrow (6, 0)$

مرحله سوم $(8, 1) \rightarrow (8, -2)$

مرحله سوم $(10, 0) \rightarrow (10, 0)$

مرحله چهارم: عرض همه نقاط جدید را با ۳ جمع می کنیم.

مرحله چهارم $(-2, 0) \rightarrow (-2, 3)$

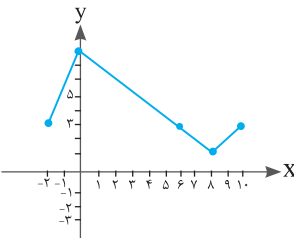
مرحله چهارم $(0, 6) \rightarrow (0, 9)$

مرحله چهارم $(6, 0) \rightarrow (6, 3)$

مرحله چهارم $(8, -2) \rightarrow (8, 1)$

مرحله چهارم $(10, 0) \rightarrow (10, 3)$

حال آخرین نقاط بدست آمده را در دستگاه مختصات مشخص و به ترتیب به هم وصل می کنیم تا نمودار تابع جدید به دست آید.



نکته

اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به ترتیب $[a, b]$ و $[c, d]$ باشد آنگاه برای بدست آوردن دامنه و برد تابع $y = kf(mx + n) + L$ عبارت $mx + n$ را در محدوده دامنه قرار می دهیم و نامعادله را حل می کنیم تا دامنه جدید بدست آید.

(ب) برد تابع f را در k ضرب کرده سپس با L جمع می کنیم تا برد تابع جدید به دست آید. (اگر k منفی باشد جهت نامعادله عوض می شود.)

مثال: اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به ترتیب $[-1, 3]$ و $[2, 5]$ باشد دامنه و برد تابع

$$g(x) = f(x - 2) - 3$$

برای بدست آوردن دامنه تابع g ، باید نامعادله زیر را حل کنیم.

$$-1 \leq x - 2 \leq 3 \xrightarrow{+2} 1 \leq x \leq 5 \Rightarrow D_g = [1, 5] \text{ دامنه}$$

برد تابع y را در یک ضرب کرده سپس منهای ۳ می کنیم تا برد تابع g بدست آید.

را بیابید.

$$-7 \leq -3f(2x+1) + 5 \leq 2 \xrightarrow{-5} -12 \leq -3f(2x+1) \leq -3$$

$$\xrightarrow{+(-3)} \rightarrow 4 \geq f(2x+1) \geq 1 \rightarrow 4 \geq f(x) \geq 1 \rightarrow \text{برد } R_f = [1, 4]$$

دقت شود که اگر نامعادله‌ای را در یک عدد منفی ضرب یا تقسیم کنیم جهت نامعادله عوض می‌شود.

مثال: اگر نقطه‌ی $A(2, -1)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ باشد مختصات نقطه متناظر آن روی نمودار تابع $y = f(2x-1) + 3$ را بیابید.

$$f(x) \longrightarrow f(x-1) \longrightarrow f(2x-1) \longrightarrow f(2x-1)+3$$

$$(2, -1) \xrightarrow{\text{مرحله اول}} (3, -1) \xrightarrow{\text{مرحله دوم}} \left(\frac{3}{2}, -1\right) \xrightarrow{\text{مرحله چهارم}} \left(\frac{3}{2}, 2\right)$$

پس نقطه متناظر $A'(2, -1)$ است.

مثال: نقطه $(3, -1)$ روی نمودار $f(x)$ متناظر با چه نقطه‌ای روی تابع $g(x) = -2f(2x-1) + 1$ است.

متناظر با نقطه $(2, 3)$ است زیرا

$$f(x) \longrightarrow f(x-1) \longrightarrow f(2x-1) \longrightarrow -f(2x-1) \longrightarrow -f(2x-1)+1$$

$$(3, -1) \xrightarrow{\text{مرحله دوم}} (4, -1) \xrightarrow{\text{مرحله اول}}$$

$$(2, -1) \xrightarrow{\text{مرحله سوم}} (2, 2) \xrightarrow{\text{مرحله چهارم}}$$

مثال: نقطه $(2, -1)$ در تابع $y = f(2x+1) - 1$ متناظر با چه نقطه‌ای در تابع $y = f(x)$ (شهریور ۹۹)

نقطه $(2, -1)$ در تابع $y = f(2x+1) - 1$ صدق می‌کند. با جایگذاری آن در ضابطه تابع داریم که

$$y = f(2x+1) - 1 \xrightarrow{(2, -1)} -1 = f(5) - 1 \Rightarrow f(5) = 0 \Rightarrow (5, 0) \in f$$

$$(2, 5) \xrightarrow{\times 1} (2, 5) \xrightarrow{-3} (-1, 2) \Rightarrow \text{برد } R_g = (-1, 2]$$

مثال: اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به ترتیب $[-1, 1]$ و $[0, 2]$ باشد دامنه و برد تابع $g(x) = 3f(2x-4) + 1$ را بیابید.

$$-1 \leq 2x-4 \leq 1 \xrightarrow{+4} +3 \leq 2x \leq 5 \xrightarrow{+2} \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$$

$$\text{دامنه } D_g = \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$$

برای بدست آوردن برد تابع g ، باید برد تابع $y = f(x)$ را در ۳ ضرب کنیم سپس با یک جمع می‌کنیم.

$$[0, 2] \xrightarrow{\times 3} [0, 6] \xrightarrow{+1} [1, 7]$$

$$\text{برد } R_g = [1, 7]$$

نکته ۳

برای به دست آوردن دامنه تابع $y = f(x)$ از روی دامنه تابع $g(x) = kf(mx+n) + L$ باید x را در محدوده دامنه تابع g قرار داده و ببینیم $mx+n$ در چه محدوده‌ای قرار می‌گیرد.

مثال: اگر دامنه تابع $g(x) = f(2x+1)$ برابر با $[-4, 2]$ باشد دامنه تابع $y = f(x)$ را بیابید. (دی ۹۸)

باید عبارت $2x+1$ را بسازیم پس:

$$-4 \leq x \leq 2 \xrightarrow{\times 2} -8 \leq 2x \leq 4 \xrightarrow{+1} -7 \leq 2x+1 \leq 5$$

$$\Rightarrow D_f = [-7, 5]$$

نکته ۴

برای بدست آوردن برد تابع $y = f(x)$ از روی برد تابع $g(x) = kf(mx+n) + L$ باید مرحله ۴ و سپس مرحله ۳ را برخلاف روش آنها انجام دهیم به عبارتی بردها ابتدا با $-L$ جمع و سپس در $\frac{1}{k}$ ضرب می‌کنیم.

مثال: اگر برد تابع $y = -3f(2x+1) + 5$ برابر با $[-7, 2]$ باشد آنگاه برد تابع $y = f(x)$

سوالات امتحان نهایی و احتمالی فصل اول (درس اول)

۱- درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

(الف) دامنه تابع $y = kf(x)$ همان دامنه تابع $y = f(x)$ است. (تجربی دی ۹۹)

(ب) دامنه تابع $y = -kf\left(\frac{x}{p}\right)$ همان دامنه تابع $y = -kf(x)$ است. (تجربی ۹۹ خارج)

(پ) برد تابع $y = kf(x)$ همان برد تابع $y = f(x)$ است. (تجربی دی ۹۸)

(ت) اگر دامنه تابع f برابر $[-1, 3]$ باشد، دامنه تابع $g(x) = -3f(2x)$ بازه $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ است. (دی ۹۵)

(ج) برای رسم نمودار تابع $f\left(\frac{x}{p}\right)$ با استفاده از نمودار تابع $f(x)$ ، کافی است طول نقاط نمودار $f(x)$ را نصف کنیم. (خرداد ۱۴۰۰ خارج)

(چ) نمودار تابع $y = f(-x)$ ، قرینه نمودار $y = f(x)$ نسبت به محور x ها است. (دی ۱۴۰۰ خارج)

(ح) اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور x ها بدست می‌آید.

(خ) نقطه $(-8, 6)$ روی نمودار $y = f(2x)$ با نقطه $(-8, 12)$ روی نمودار $y = \frac{1}{3}f(x) + 1$ متناظر است.

د) نمودار تابع $y = (x+2)^2$ را می توان با ۲ واحد انتقال نمودار تابع $y = x^2$ به سمت چپ رسم کرد. (خرداد ۹۹)

س) اگر $k > 1$ باشد نمودار $y = f(kx)$ از انقباض نمودار $y = f(x)$ در راستای محور x ها به دست می آید. (شهریور ۹۸ خارج)
۲- جاهای خالی را پر کنید.

الف) اگر بازه $[-2, 1]$ دامنه تابع $f(x)$ باشد، دامنه تابع $f(-3x+1)$ برابر است. (احتمالی)

ب) اگر $f(x) = \sqrt{2-x}$ باشد آنگاه برد این تابع مجموعه است. (شهریور ۹۵)

پ) اگر دامنه و برد تابع $y = f(1-2x) + 3$ به ترتیب $[-2, 1]$ و $[0, 3]$ باشد، دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به ترتیب برابر با و است.

۳- تابع $y = f(x)$ را با دامنه $[-2, 1]$ در نظر بگیرید. دامنه تابع $g(x) = -f(2x) + 1$ را بیابید. (خرداد ۹۴)

۴- اگر بازه $[-2, 1]$ دامنه تابع $f(x)$ باشد، دامنه تابع $g(x) = f(3x+1)$ را بیابید. (شهریور ۹۹)

۵- اگر دامنه و برد تابع f ، به ترتیب $[1, 4]$ و $[2, 6]$ باشد دامنه و برد تابع $y = 1 - 3f(\frac{1}{3}x + 1)$ را بیابید. (احتمالی)

۶- اگر دامنه و برد تابع f به ترتیب برابر با $D_f = [-2, 8]$ و $R_f = [-1, 3]$ باشد، دامنه و برد تابع $y = 1 + 2f(3x+1)$ را بدست آورید. (احتمالی)

۷- اگر دامنه تابع $f(x)$ برابر با $[-1, 4]$ باشد دامنه تابع $y = -3f(1-x)$ را بیابید. (احتمالی)

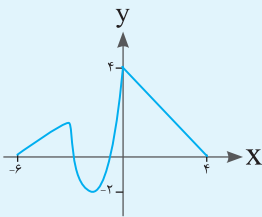
۸- اگر دامنه تابع $y = 1 + f(\frac{1}{3}x - 1)$ بازه $[-3, 6]$ باشد، دامنه تابع $g(x) = -1 - f(1-3x)$ را بیابید. (احتمالی)

۹- اگر دامنه و برد تابع $f(x)$ به ترتیب $[-1, 5]$ و $[0, 6]$ باشد دامنه و برد تابع $y = 3 - f(x-2)$ را مشخص کنید. (احتمالی)

۱۰- اگر دامنه تابع $y = f(x)$ به صورت $[-3, 2]$ باشد دامنه تابع $y = 2f(1-2x) + 1$ کدام است؟ (احتمالی)

۱۱- اگر دامنه تابع $y = 2f(-x+1)$ برابر $[-2, 1]$ باشد دامنه تابع $g(x) = f(2x-1) + 1$ را بیابید. (احتمالی)

۱۲- نمودار زیر مربوط به تابع $y = f(x)$ است. دامنه و برد تابع $g(x) = -3f(3x-2) + 2$ را بیابید. (احتمالی)



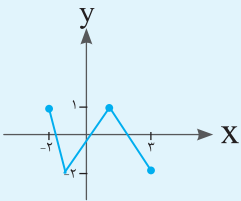
۱۳- اگر دامنه و برد تابع $y = 2f(x) + 1$ به ترتیب $[-1, 1]$ و $[0, 2]$ باشد دامنه و برد تابع $g(x) = f(2x+1)$ را بیابید. (احتمالی)

۱۴- نقطه $A(-3, 1)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ قرار دارد. در تابع $y = -f(2x)$ این نقطه به چه نقطه ای متناظر می گردد؟ (احتمالی)

۱۵- نقطه $(3, -1)$ روی نمودار تابع $f(x)$ متناظر با چه نقطه ای روی تابع $g(x) = -2f(2x-1) + 1$ است؟ (احتمالی)

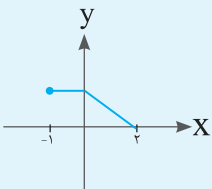
۱۶- نقطه $A(1, -5)$ روی نمودار تابع $y = 3 - f(x)$ قرار دارد. مختصات نقطه نظیر A روی تابع $y = \frac{1}{3}f(x-2)$ کدام است؟ (احتمالی)

۱۷- اگر نقطه $A(2, 1)$ روی تابع $y = 2f(x-1)$ باشد آنگاه مختصات نقطه A' متناظر روی تابع $y = f(x)$ را بیابید. (احتمالی)

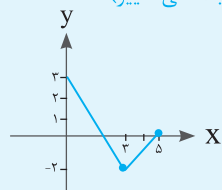


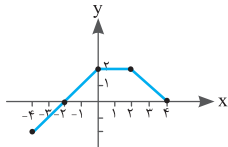
۱۸- نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y = f(\frac{1}{3}x) + 1$ را رسم و دامنه و برد آن را بیابید. (شهریور ۹۴)

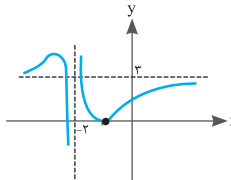
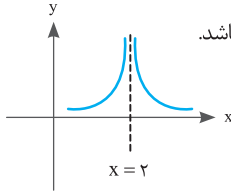
۱۹- نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. نمودار تابع $g(x) = -f(x-1) + 2$ را رسم کرده و دامنه تابع $g(x)$ را تعیین کنید. (احتمالی)

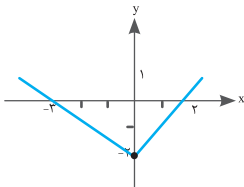
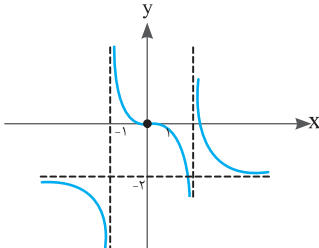


۲۰- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = 2f(3-x) - 1$ را رسم و دامنه و برد آن را تعیین کنید. (شهریور و دی ۹۸ با اندکی تغییر)



امتحان شماره ۱		حسابان (۲)	رشته: ریاضی و فیزیک	امتحان احتمالی نوبت اول	زمان امتحان: ۱۲۰ دقیقه
ردیف	سوالات				نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید. (الف) چند جمله‌ای $f(x) = (x+1)^2(x-2)^2$ از درجه ۶ است. (ب) هر تابع یک به یک، اکیداً یکنواست. (ج) حاصل حد $\lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}} \frac{-1 + \frac{2}{x}}{\frac{5}{x^2} + 4}$ برابر با -۴ است. (د) تابع $y = x^2 $ در دامنه‌اش صعودی است.				۱
۱	(الف) اگر دامنه‌ی تابع $y=f(x)$ بازه $[-2, 1]$ باشد دامنه‌ی تابع $g(x) = 2f(3x+1) - 1$ برابر با است. (ب) اگر تابع f در یک بازه باشد آنگاه در این بازه هم صعودی و هم نزولی است. (ج) تابع $f(x) = 2x^2 - 1$ روی بازه $[a, +\infty)$ اکیداً صعودی است. حداقل مقدار a برابر با است. (د) در ناحیه چهارم مقدار سینوس همواره از مقدار تانژانت است.				۱
۳	 اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد نمودار تابع $g(x) = -f(-x) + 2$ را رسم کنید.				۱
۴	نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^x & ; x \geq -1 \\ x^2 & ; x < -1 \end{cases}$ را رسم کنید و مشخص کنید این تابع در چه فاصله‌ای و در چه فاصله‌ای نزولی است؟				۱/۵
۵	هر یک از چند جمله‌ای‌های زیر را بر حسب عامل‌های خواسته شده را تجزیه کنید. (الف) $x^7 - 128$ با عامل $x-2$ (ب) $a^5 + b^5$ بر $a+b$				۱/۵
۶	فرض کنید تابع f در یک بازه اکیدا نزولی باشد و a و b متعلق به این بازه باشند اگر $f(a) \leq f(b)$ نشان دهید که $a \geq b$.				۰/۵
۷	نامعادله زیر را حل کنید. $\text{Log}_{\frac{1}{5}} x^{x^2-x} \leq \text{Log}_{\frac{1}{5}} x^2$				۱
۸	اگر باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x-2$ و $x-1$ به ترتیب مساوی ۵ و ۳ باشد باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - 3x + 2$ را بیابید.				۱/۵
۹	معادله مثلثاتی $\tan(2x-1) = 0$ را حل کنید.				۰/۵
۱۰	ضابطه تابع مثلثاتی به فرم $y = a \sin bx + c$ بنویسید که دوره تناوب آن π و مقدار ماکزیمم آن ۵ و مقدار مینیمم آن -۱ باشد.				۱/۵
۱۱	جواب‌های کلی معادلات مثلثاتی زیر را به دست آورید. (الف) $\sin x - \tan x = 0$ (ب) $\sin(2x) \cos(2x) = -\frac{1}{4}$				۲
۱۲	حاصل حدهای زیر را بیابید. (الف) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{4-x^2}{x^2+4x+4}$ (ب) $\lim_{x \rightarrow (\frac{2\pi}{3})^+} \tan x$				۳

امتحان شماره		حسابان (۲)		رشته: ریاضی و فیزیک		امتحان احتمالی نوبت اول		زمان امتحان: ۱۲۰ دقیقه				
ردیف	سوالات						نمره					
	الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$ ج) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left[\frac{1}{f(x)} \right]$ د) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$								اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد حاصل حدهای خواسته شده را بیابید. 			
۱۶							۱					
۱۵	مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که تساوی $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a-1)x^2 + 2x^2 + 5x - 1}{(b+2)x^2 + 3x - 1} = 2$ برقرار باشد.						۱					
۱۴	مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x}{2x^2 + ax + b}$ در همسایگی عدد ۲ به صورت زیر تعریف شده باشد. 						۱					
۱۳	مجانب های قائم و افقی منحنی تابع $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2+x}$ را در صورت وجود بیابید.						۱					
	ج) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-2)^2 - x^2}{5x+1}$ د) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]-1}{1-\cos x}$											
۲۰	موفق و سر بلند باشید						جمع نمرات	۲۰				

امتحان شماره ۳		حسابان (۲)		رشته: ریاضی و فیزیک		امتحان احتمالی نوبت دوم		زمان امتحان: ۱۲۰ دقیقه	
ردیف	سوال				نمره				
۱	درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید. (الف) هر تابع درجه سوم دقیقاً یک نقطه عطف دارد. (ب) برای $\frac{3\pi}{4} < \theta < \pi$ همواره مقدار $\tan \theta$ از مقدار $\sin \theta$ کوچکتر است. (ج) هر نقطه دلخواه از دامنه تابع ثابت، یک نقطه بحرانی است. (د) هر نقطه ای که در آن مقدار $f''(x)$ تغییر علامت دهد نقطه عطف تابع است.				۱				
۲	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. (الف) مقداری عددی $\tan \frac{\pi}{4}$ برابر با است. (ب) دوره تناوب تابع $y = -3 \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) + 7$ برابر با است. (ج) اگر f تابعی مشتق پذیر و $f(3) = 9$ و $f'(3) = 1$ مقدار $f'(3)$ برابر $(4\sqrt{f'})$ برابر است. (د) باقی مانده تقسیم عبارت $5x^2 - 3x + 1$ بر $x - 3$ برابر است.				۱				
۳	نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. نمودار تابع $g(x) = -2f(x+1)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.				۱/۲۵				
۴	$f(x) = \begin{cases} -2x - 3 & x < -4 \\ 3 & -4 \leq x < 2 \\ 3x - 2 & x \geq 2 \end{cases}$ نمودار تابع $f(x)$ را رسم و بازه هایی که در آنها تابع صعودی یا نزولی است را مشخص کنید.				۱/۵				
۵	معادله مثلثاتی $5 \sin x - 6 \sin^2 x$ را حل کنید.				۱/۵				
۶	حدود زیر را بیابید. (الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{25x^2 + 1} - x)$ (ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{[x]}{ 3x + 1 }$				۱/۵				
۷	با توجه به نمودار زیر مجانب های قائم و افقی تابع را بنویسید.				۰/۷۵				
۸	اگر $27^x \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x+4}$ آنگاه حدود x را بیابید.				۰/۷۵				
۹	معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$ را در نقطه ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.				۱				
۱۰	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن الزامی نیست) (الف) $f(x) = \sqrt{\frac{9x-2}{x+1}}$ (ب) $g(x) = \cos^2\left(\frac{x-1}{3x+2}\right)$ (ج) $h(x) = (x^2 + 4x - 1)^5 \tan(\sqrt{x})$				۳				

پاسخ نامه تشریحی آموزشی



فصل اول

درس اول

۱- الف) درست

ب) نادرست، دامنه تابع $y = -kf(\frac{x}{p})$ ، دو برابر دامنه تابع $y = -kf(x)$ است

پ) نادرست، برد تابع $y = kf(x)$ ، k برابر برد تابع $y = f(x)$ است.

ت) درست زیرا $-\frac{1}{p} \leq x \leq \frac{3}{p} \Rightarrow -1 \leq 2x \leq 3$

ج) نادرست، برای رسم نمودار $y = f(\frac{x}{p})$ ، باید طول نقاط نمودار $y = f(x)$ را دو برابر کنیم.

چ) نادرست، نسبت به محور y ها قرینه است.

ح) نادرست، انبساط می یابد.

خ) نادرست زیرا $f(2x) \rightarrow f(x) \rightarrow \frac{1}{3}f(x) \rightarrow \frac{1}{3}f(x) + 1$

$(-8, 6) \rightarrow (-16, 6) \rightarrow (-16, 2) \rightarrow (-16, 3)$

د) درست س) درست

۲- الف)

$-2 \leq -3x + 1 \leq 1 \Rightarrow -3 \leq -3x \leq 0 \Rightarrow 1 \geq x \geq 0 \Rightarrow D = [0, 1]$

ب) می دانیم که همواره $\sqrt{2-x} \geq 0$ پس برد تابع برابر است با: $R = [0, +\infty)$

پ) باید ببینیم که عبارت $1-2x$ در کدام بازه قرار می گیرد.

$-2 \leq x \leq 1 \xrightarrow{\times(-2)} -2 \leq -2x < 4 \xrightarrow{+1} -1 \leq 1-2x \leq 5 \Rightarrow D = [-1, 5]$ دامنه

می دانیم که برد تابع $y = f(x)$ با برد تابع $y = f(1-2x)$ برابر است.

$0 \leq f(1-2x) + 3 \leq 3 \xrightarrow{-3} -3 \leq f(1-2x) \leq 0$

$\Rightarrow -3 \leq f(x) \leq 0 \Rightarrow R_f = [-3, 0]$

۳- برای بدست آوردن دامنه تابع g ، باید دامنه تابع f را در $\frac{1}{p}$ ضرب کنیم.

$-2 \leq 2x \leq 1 \xrightarrow{\div 2} -1 \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow D_g = [-1, \frac{1}{2}]$

۴-

$-2 \leq 3x + 1 \leq 1 \xrightarrow{-1} -3 \leq 3x \leq 0 \xrightarrow{\div 3} -1 \leq x \leq 0 \Rightarrow D_g = [-1, 0]$

۵-

$1 \leq \frac{1}{p}x + 1 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{p}x \leq 3 \Rightarrow 0 \leq x \leq 6 \Rightarrow D = [0, 6]$ دامنه

برای بدست آوردن برد تابع y ، باید برد f را در ۳- ضرب کنیم سپس حاصل را با یک جمع می کنیم.

$[2, 6] \xrightarrow{\times(-3)} [-18, -6] \xrightarrow{+1} [-17, -5] \Rightarrow R = [-17, -5]$ برد

۶-

$-2 \leq 3x + 1 \leq 8 \Rightarrow -3 \leq 3x \leq 7 \Rightarrow -1 \leq x \leq \frac{7}{3} \Rightarrow D_y = [-1, \frac{7}{3}]$ دامنه

برای بدست آوردن برد تابع y ، باید برد تابع f را در ۲ ضرب کنیم سپس آن را با یک جمع کنیم.

$[-1, 3] \xrightarrow{\times 2} [-2, 6] \xrightarrow{+1} [-1, 7] \Rightarrow R_y = [-1, 7]$ برد

۷-

$-1 \leq 1-x \leq 4 \xrightarrow{-1} -2 \leq -x \leq 3 \xrightarrow{\div(-1)} 2 \geq x \geq -3 \Rightarrow D_f = [-3, 2]$

۸- ابتدا به کمک دامنه تابع y ، دامنه تابع f را پیدا می کنیم.

$-3 \leq x \leq 6 \xrightarrow{\times \frac{1}{3}} -1 \leq \frac{1}{3}x \leq 2 \xrightarrow{+(-1)} -2 \leq \frac{1}{3}x - 1 \leq 1 \Rightarrow D_f = [-2, 1]$

حال به کمک دامنه تابع f ، دامنه تابع g را پیدا می کنیم.

$-2 \leq 1-3x \leq 1 \xrightarrow{+(-1)} -3 \leq -3x \leq 0 \xrightarrow{\div(-3)} 1 \geq x \geq 0 \Rightarrow D_g = [0, 1]$

۹- $-1 \leq x-2 \leq 5 \xrightarrow{+2} 1 \leq x \leq 7 \Rightarrow D_y = [1, 7]$ دامنه

برای بدست آوردن برد تابع y ، باید برد تابع f را در ۱- ضرب کنیم سپس حاصل را با عدد ۳ جمع کنیم.

$[0, 6] \xrightarrow{\times(-1)} [-6, 0] \xrightarrow{+3} [-3, 3] \Rightarrow R_y = [-3, 3]$ برد

البته برد تابع y را می توان به صورت زیر هم بدست آورد.

$0 \leq f(x) \leq 6 \Rightarrow 0 \leq f(x-2) \leq 6 \Rightarrow -6 \leq -f(x-2) \leq 0$

$\Rightarrow -3 \leq 3-f(x-2) \leq 3 \Rightarrow R_y = [-3, 3]$

۱۰-

$-3 \leq 1-2x \leq 2 \xrightarrow{-1} -4 \leq -2x \leq 1 \xrightarrow{\div(-2)} 2 \geq x \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow D_y = [-\frac{1}{2}, 2]$ دامنه

۱۱-

ابتدا به کمک دامنه تابع y ، دامنه تابع f را بدست می آوریم سپس به کمک دامنه تابع f ، دامنه تابع g را پیدا می کنیم.

$-2 \leq x < 1 \xrightarrow{\times(-1)} -1 < -x \leq 2 \xrightarrow{+1} 0 < -x + 1 \leq 3 \Rightarrow D_{f(x)} = (0, 3]$

حال به کمک دامنه تابع f ، دامنه تابع g را پیدا می کنیم.

$0 < 2x - 1 \leq 3 \xrightarrow{+1} 1 < 2x \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{2} < x \leq 2 \Rightarrow D_g = (\frac{1}{2}, 2]$

۱۲- با توجه به شکل دامنه تابع f برابر با $[-6, 4]$ است.

$D_g = [-6, 4] \Rightarrow -6 \leq 3x - 2 \leq 4 \Rightarrow -4 \leq 3x \leq 6 \Rightarrow -\frac{4}{3} \leq x \leq 2$

$\Rightarrow D_f = [-\frac{4}{3}, 2]$

برای بدست آوردن برد تابع g ، باید برد تابع y را در عدد ۳- ضرب کنیم سپس

آن را با عدد ۲ جمع کنیم.

$R_f = [-2, 4] \xrightarrow{\times(-3)} [-12, 6] \xrightarrow{+2} [-10, 8] \Rightarrow R_g = [-10, 8]$

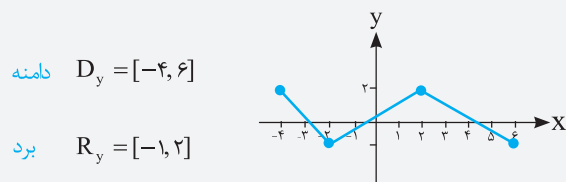
$$f(x) \longrightarrow f\left(\frac{1}{2}x\right) \longrightarrow f\left(\frac{1}{2}x\right) + 1$$

$$(-2, 1) \xrightarrow{\text{مرحله ۲}} (-4, 1) \xrightarrow{\text{مرحله ۴}} (-4, 2)$$

$$(-1, -2) \xrightarrow{\text{مرحله ۲}} (-2, -2) \xrightarrow{\text{مرحله ۴}} (-2, -1)$$

$$(1, 1) \xrightarrow{\text{مرحله ۲}} (2, 1) \xrightarrow{\text{مرحله ۴}} (2, 2)$$

$$(3, -2) \xrightarrow{\text{مرحله ۲}} (6, -2) \xrightarrow{\text{مرحله ۴}} (6, -1)$$



۱۹- نقاط $(1, -1)$ ، $(0, 1)$ ، $(2, 0)$ از تابع f را در نظر می‌گیریم

طول آنها را با یک و عرض آنها را با دو جمع می‌کنیم تا نقاط تابع جدید به دست آید. با وصل کردن نقاط به هم، نمودار تابع جدید بدست می‌آید.

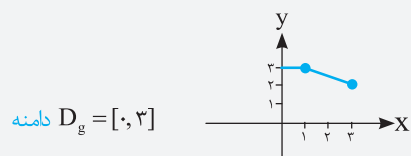


$$f(x) \longrightarrow f(x-1) \longrightarrow f(x-1) + 2$$

$$(-1, 1) \xrightarrow{\text{مرحله ۱}} (0, 1) \xrightarrow{\text{مرحله ۴}} (0, 3)$$

$$(0, 1) \xrightarrow{\text{مرحله ۱}} (1, 1) \xrightarrow{\text{مرحله ۴}} (1, 3)$$

$$(2, 0) \xrightarrow{\text{مرحله ۱}} (3, 0) \xrightarrow{\text{مرحله ۴}} (3, 2)$$



۲۰- نقاط $(3, 0)$ ، $(2, -2)$ ، $(0, 3)$ و $(5, 0)$ از تابع f را در نظر می‌گیریم. و ۴ عمل را به ترتیب

بر روی آنها انجام می‌دهیم

ابتدا تابع $g(x)$ را مرتب شده می‌نویسیم: $g(x) = 2f(-x+3) - 1$

$$f(x) \longrightarrow f(x+3) \longrightarrow f(-x+3) \longrightarrow 2f(-x+3) \longrightarrow 2f(-x+3) - 1$$

$$(0, 3) \xrightarrow{\text{مرحله ۱}} (-3, 1) \xrightarrow{\text{مرحله ۲}} (3, 3) \xrightarrow{\text{مرحله ۳}} (3, 6) \xrightarrow{\text{مرحله ۴}} (3, 5)$$

$$(3, -2) \xrightarrow{\text{مرحله ۱}} (0, -2) \xrightarrow{\text{مرحله ۲}} (0, -2) \xrightarrow{\text{مرحله ۳}} (0, -4) \xrightarrow{\text{مرحله ۴}} (0, -5)$$

$$(5, 0) \xrightarrow{\text{مرحله ۱}} (2, 0) \xrightarrow{\text{مرحله ۲}} (-2, 0) \xrightarrow{\text{مرحله ۳}} (-2, 0) \xrightarrow{\text{مرحله ۴}} (-2, -1)$$

حال نقاط بدست آمده را در دستگاه مختصات مشخص کرده و به هم وصل

می‌کنیم تا نمودار تابع y بدست آید.

۱۳- دامنه تابع $y = 2f(x) + 1$ برابر با $[-1, 1]$ است پس دامنه تابع $y = f(x)$ هم برابر با $[-1, 1]$ است. حال می‌خواهیم دامنه تابع $g(x) = f(2x+1)$ را بدست آوریم.

$$-1 \leq 2x+1 \leq 1 \xrightarrow{-1} -2 \leq 2x \leq 0 \xrightarrow{+2} -1 \leq x \leq 0 \Rightarrow D_g = [-1, 0]$$

برد تابع $y = 2f(x) + 1$ برابر با $[0, 2]$ است پس:

$$0 \leq 2f(x) + 1 \leq 2 \Rightarrow -1 \leq 2f(x) \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$$

$$R_g = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

برد تابع $f(2x+1)$ با برد تابع $f(x)$ برابر است پس

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq f(2x+1) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow R_g = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

۱۴- زیرا $A'(-\frac{3}{2}, -1)$

$$f(x) \longrightarrow f(2x) \longrightarrow -f(2x)$$

$$(-3, 1) \xrightarrow{\text{مرحله ۲}} (-\frac{3}{2}, 1) \xrightarrow{\text{مرحله ۳}} (-\frac{3}{2}, -1)$$

۱۵-

$$f(x) \longrightarrow f(x-1) \longrightarrow f(2x-1) \longrightarrow -2f(2x-1) \longrightarrow -2f(2x-1) + 1$$

$$(3, -1) \xrightarrow{\text{مرحله ۱}} (4, -1) \xrightarrow{\text{مرحله ۲}} (2, -1) \xrightarrow{\text{مرحله ۳}} (2, 2) \xrightarrow{\text{مرحله ۴}} (2, 3)$$

۱۶-

ابتدا مختصات نقطه نظیر A روی تابع $y = f(x)$ پیدا می‌کنیم.

نقطه A روی نمودار تابع $y = 3 - f(x)$ قرار دارد.

$$y = 3 - f(x) \xrightarrow{\substack{x=1 \\ y=-5}} -5 = 3 - f(1) \rightarrow f(1) = 8$$

نقطه $A(1, 8)$ روی تابع $f(x)$ قرار دارد.

$$f(x) \longrightarrow f(x-2) \longrightarrow \frac{1}{2}f(x-2)$$

$$(1, 8) \xrightarrow{\text{مرحله ۱}} (3, 8) \xrightarrow{\text{مرحله ۳}} (3, 4)$$

نقطه $A''(3, 4)$ روی تابع $y = \frac{1}{2}f(x-2)$ قرار دارد.

۱۷- مختصات نقطه A در تابع $y = 2f(x-1)$ صدق می‌کند پس:

$$y = 2f(x-1) \xrightarrow{\substack{x=2 \\ y=1}} 1 = 2f(1)$$

$$\Rightarrow f(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow A' = (1, \frac{1}{2})$$

نقطه $A'(1, \frac{1}{2})$ روی تابع f قرار دارد.

۱۸- نقاط $(1, -1)$ ، $(0, 1)$ ، $(3, -2)$ از تابع f را در نظر می‌گیریم

سپس طول هم نقاط را در ۲ ضرب و عرض آنها را با یک جمع می‌کنیم تا نمودار تابع جدید به دست آید.

مشخصات کتاب

سیگنال ۲۰ حسابان ۲
پایه دوازدهم - رشته ریاضی و فیزیک

عنوان کتاب

پایه دوازدهم

گروه سنی

حسین ایلون کشکولی
دکتر احمد سپهریان

مؤلفان

رحلی

قطع کتاب

۱۶۰

تعداد صفحات