



کتاب آنلاین®

مرجع تخصصی عرضه آنلاین کتاب

مشاهده

چند صفحه

اول کتاب



تقدیم به همسر عزیزم؛ «محمد جانم»

که وجودش انگیزه‌ای است برای ادامه زندگی ...

و تقدیم به دوستان خوبم؛ «مهدی هاشمی» و «احسان حسینیان»

که قدم گذاشتن در این مسیر برای من، بدون آن‌ها ممکن نبود ...

مقدمه ناشر

گپی راجع به مجموعه «ماجراهای من و درسام»

تا حالا به این فکر کردین که یه دانش‌آموز توی ۲۴ ساعت شبانه‌روز چی کار می‌کنه؟

■ هفت هشت ساعت می‌خوابه و استراحت می‌کنه.

■ حداقل هفت ساعت تو مدرسه‌ست که شیش ساعتش رو سر کلاسه و (احتمالن) داره درس گوش می‌ده.

■ حدود یک ساعت تو راه خونه به مدرسه و مدرسه به خونه‌ست.

■ سه چهار ساعتی هم توی خونه با کتابا و درساش مشغوله و گشتی می‌گیره.

■ چهار پنج ساعت از وقتش هم می‌ره برای غذاخوردن، حضور در آغوش گرم خانواده و کارای شخصی مهم و بازی‌گوشی (که شامل گوشی‌بازی هم می‌شه!).

خُب! با این حساب و کتابا معلوم می‌شه یه دانش‌آموز، ۷۵/۶۲۵ درصد از زمان بیداریش رو با درس و مشق و کتاب و مدرسه و معلم می‌گذرونه با کلی اتفاقات تلخ و شیرین؛ پس بی‌راه نیست که بگیم:

«ماجراهای من و درسام» ماجرای اصلی زندگی یه دانش‌آموزه.

ما توی خیلی‌سبز این مجموعه رو آماده کردیم چون واقعن دلمون می‌خواد داستان مدرسه‌رفتن و درس‌خوندن شما و این عمری که به پاش گذاشتین، پایان خیلی خوش و شکوهمندی داشته باشه!

اگه ماجراهای جالب خودتون با درساتون رو به صورت مطلب، عکس، سلفی، خاطره، فیلم و فیلم‌نامه و ... برامون بفرستین، خیلی رو سرمون منت گذاشتین. ما حتمن ماجراهاتون رو یه جایی (مثلن تو سایت خیلی‌سبز یا شاید هم چاپ بعدی کتاب) منتشر می‌کنیم.

ماجرای من و هندسه

یه معلم هندسه داشتیم که خیلی خوب درس می‌داد و با بچه‌ها رابطه خوبی داشت؛ ولی سخت‌گیر هم بود. مثلن بچه‌هایی که تکلیفشون رو انجام نداده بودن باید ۲ برابر جریمه می‌نوشتن و اسم این جریمه رو گذاشته بود: «خشم اقلیدس»!

اما جالب‌تر از خشم اقلیدس چک کردن تکلیف بچه‌ها بود که توی سه مرحله انجام می‌شد:

مرحله شهود: ایشون یه وقتایی به صورت شهودی حس می‌کردن که احتمالن بچه‌ها تکلیفشون رو درست انجام ندادن و ماجرا با یک جمله خوف شروع می‌شد: «امروز یه حسی بهم می‌گه باید تکلیفا رو ببینم».

مرحله استقرا: تکلیفای دو سه نفر از بچه‌ها رو می‌دیدن و اگه شهودشون اشتباه نکرده بود، وارد فاز سوم می‌شدن.

مرحله استدلال: یکی دوتا از سخت‌ترین سؤالی تکلیف رو از ما به صورت کتبی امتحان می‌گرفتن و هر کی نمی‌تونست نمره کامل بگیره، به خشم اقلیدس گرفتار می‌شد ...

پیام اصلی این ماجرا (و شاید هم پیام اصلی درس هندسه) اینه که برای قضاوت کردن و تصمیم‌گرفتن، احساسات و شهود هرگز کافی نیست و باید استدلال کرد. وقتی دارید مسئله‌های هندسه رو اثبات می‌کنید، یادتون بیاد که هندسه فقط یه درس نیست؛ یه دیدگاه و یه روش زندگیه.

در ماجراجویی‌های هندسیتون موفق باشید.

مقدمه مؤلف

«هیچ اتفاقی، اتفاقی نیست.»

یادمه سال‌های دور وقتی دانش‌آموز بودم، اکثر دوستانم با درس و کلاس هندسه مشکل داشتن و همیشه اون‌ی که عاشق هندسه بود، من بودم. شاید به خاطر ذهن خیال‌پرداز و داستان‌سرایی که داشتم، همیشه هندسه و تجسمی که برای درکش نیاز داره، برای من جذابیتی فراتر از هر درس و کتاب دیگه‌ای داشت و این علاقه اون‌قدر ادامه پیدا کرد که الان در خدمت شما هستم با تألیف کتاب هندسه دهم ماجرا ... یعنی همه‌چیز با یه عشق ساده شروع شد ... 

توی کتاب ماجراهای من و درسام هندسه دهم، سعی کردم ماجرای هر درس هندسه دهم رو یه طوری روان و ساده با هم پیش ببریم که هم دانش‌آموزان قوی و هم اون‌هایی که فکر میکنن یکم توی این درس ضعیف‌ترن، آخر سال تحصیلی بدون این‌که خودشون بفهمن، عاشق هندسه شده باشن و نمره ۲۰ رو بغل کنن ...

و اما حرف آخر، می‌خوام تشکر کنم از دوستان و عزیزانی که در تألیف این کتاب مدیون لطف و زحمت اون‌ها هستم:

■ آقای مهدی هاشمی، مدیر تألیف توانمند کتاب‌های ماجراهای من و درسام که بدون کمک و راهنمایی‌های ایشون اصلاً کتابی در کار نبود.

■ خانم مریم طاهری، مسئول پروژه کتاب و دوست عزیزم که در تمام مراحل کار یار و یاورم بود.

■ و همه دوستان تألیف و تولید انتشارات خیلی‌سبز که شبانه‌روز در تلاش‌اند تا بهترین کتاب‌ها رو به دست بهترین و سخت‌کوش‌ترین بچه‌های دنیا (شما رو می‌گم) برسونن ...

مرداد ۱۴۰۲

زهرا جالینوس



صفحه سؤال‌های امتحانی

صفحه درس‌نامه	صفحه سؤال‌های امتحانی
۷	۱۰
۱۰	۱۳
۱۳	۱۵
۱۵	۱۹
۲۰	۲۳
	۲۶

فصل اول: ترسیم‌های هندسی و استدلال
 درس‌نامه ۱: ترسیم‌های هندسی - بخش اول
 درس‌نامه ۲: ترسیم‌های هندسی - بخش دوم
 درس‌نامه ۳: ترسیم‌های هندسی - بخش سوم
 درس‌نامه ۴: استدلال - بخش اول
 درس‌نامه ۵: استدلال - بخش دوم
 پاسخ سؤال‌های امتحانی

صفحه سؤال‌های امتحانی

صفحه درس‌نامه	صفحه سؤال‌های امتحانی
۳۳	۳۶
۳۸	۴۱
۴۳	۴۶
۴۷	۴۹
۵۰	۵۲
	۵۴

فصل دوم: قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن
 درس‌نامه ۱: نسبت و تناسب در هندسه
 درس‌نامه ۲: قضیه تالس
 درس‌نامه ۳: تشابه مثلث‌ها
 درس‌نامه ۴: روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه
 درس‌نامه ۵: کاربردهایی از قضیه تالس و تشابه مثلث‌ها
 پاسخ سؤال‌های امتحانی



صفحه سؤال‌های امتحانی

صفحه درس‌نامه	صفحه سؤال‌های امتحانی
۶۲	۶۴
۶۵	۶۷
۶۸	۷۳
۷۴	۷۶
۷۶	۸۰
۸۲	۸۴
۸۵	۸۷
۸۸	

فصل سوم: چندضلعی‌ها
 درس‌نامه ۱: مقدمه و تعاریف اولیه
 درس‌نامه ۲: متوازی‌الاضلاع
 درس‌نامه ۳: خانواده متوازی‌الاضلاع
 درس‌نامه ۴: دوزنقه
 درس‌نامه ۵: مساحت مثلث و کاربردهای آن
 درس‌نامه ۶: مساحت چهارضلعی‌ها و کاربرد آن‌ها
 درس‌نامه ۷: نقاط شبکه و مساحت
 پاسخ سؤال‌های امتحانی



صفحه سؤال‌های امتحانی

صفحه درس‌نامه	صفحه سؤال‌های امتحانی
۹۸	۱۰۴
۱۰۶	۱۰۷
۱۰۸	۱۱۱
۱۱۳	۱۱۵
	۱۱۷

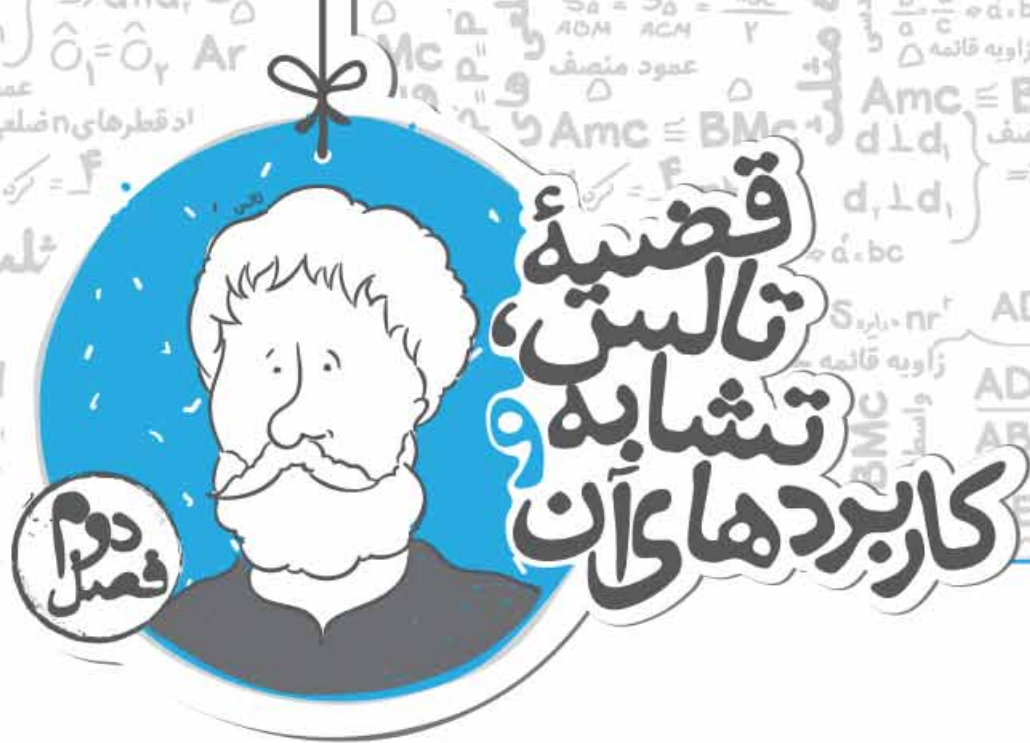
فصل چهارم: تجسم فضایی
 درس‌نامه ۱: نقطه، خط و صفحه
 درس‌نامه ۲: رسم نما
 درس‌نامه ۳: برش
 درس‌نامه ۴: دوران حول محور
 پاسخ سؤال‌های امتحانی



شماره صفحه امتحان

شماره صفحه پاسخ	شماره صفحه امتحان
۱۲۷	۱۲۶
۱۳۰	۱۲۹
۱۳۴	۱۳۲
۱۳۸	۱۳۷
۱۴۲	۱۴۱
۱۴۶	۱۴۴

امتحان شماره (۱): نمونه امتحان نیم‌سال اول
 امتحان شماره (۲): نمونه امتحان نیم‌سال اول
 امتحان شماره (۳): نمونه امتحان نیم‌سال دوم
 امتحان شماره (۴): نمونه امتحان نیم‌سال دوم
 امتحان شماره (۵): نمونه امتحان نیم‌سال دوم
 امتحان شماره (۶): نمونه امتحان نیم‌سال دوم



نسبت و تناسب در هندسه

نسبت

حاصل تقسیم عدد حقیقی a بر b که $b \neq 0$ باشد را نسبت a به b می‌نامیم و می‌نویسیم: $\frac{a}{b}$.

مثلاً فرض کنید مطابق شکل زیر نقطه M طوری روی پاره‌خط AB قرار داشته باشد که $BM = 7$, $AM = 3$ ؛ به شرطی که هر دو یک واحد اندازه‌گیری داشته باشند، در این حالت می‌توانیم بگوییم که $\frac{AM}{BM} = \frac{3}{7}$. **حالا یعنی چی؟** یعنی نسبت پاره‌خط AM به پاره‌خط BM برابر $\frac{3}{7}$ است (یا نقطه M پاره‌خط AB را به نسبت ۳ به ۷ تقسیم کرده است).



تناسب

حالا اگر دو نسبت با هم مساوی باشند، یک **تناسب** را تشکیل می‌دهند. مثلاً $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ($b, d \neq 0$) یک تناسب است که به a و d وسطین و به c و b طرفین تناسب می‌گوییم.

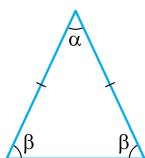
مثلاً اگر نسبت طول (a) به عرض (b) یک مستطیل ۳ به ۲ باشد، آن‌گاه تناسب آن‌ها به صورت $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$ نوشته می‌شود یا اگر زاویه‌های α ، β و γ با عددهای ۳، ۴ و ۵ متناسب باشند، داریم: $\frac{\alpha}{3} = \frac{\beta}{4} = \frac{\gamma}{5}$.

توجه: اگر $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ ، آن‌گاه همیشه می‌توانیم این‌طور در نظر بگیریم که $\begin{cases} a = mk \\ b = nk \end{cases}$. از این روش در خیلی از سؤال‌های تناسب می‌توانیم

استفاده کنیم. مثلاً اگر $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2}{7}$ می‌توانیم بگوییم: $\begin{cases} \alpha = 2x \\ \beta = 7x \end{cases}$

مثال: در یک مثلث متساوی‌الساقین، نسبت اندازه زاویه رأس به یکی از زاویه‌های ساق برابر ۴ به ۷ است. اندازه بزرگ‌ترین زاویه مثلث را به دست آورید.

پاسخ: در شکل روبه‌رو اگر زاویه رأس برابر α و زاویه ساق برابر β باشد، آن‌گاه نسبت آن‌ها برابر است با: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{4}{7}$ یا می‌توانیم بگوییم اگر $\alpha = 4x$ باشد، β برابر $7x$ است. از طرفی مجموع زوایای داخلی مثلث برابر 180° است،



پس داریم: $\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow 4x + 2(7x) = 180^\circ \Rightarrow 18x = 180^\circ \Rightarrow x = 10^\circ$

پس بزرگ‌ترین زاویه برابر است با: $7x = 70^\circ$

تناسب، چند ویژگی مهم دارد که دانستن آن‌ها به حل مسائل خیلی کمک می‌کند. جدول زیر را حتماً بلد باشید:

مثال	توضیح	ویژگی
$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} \Leftrightarrow 3 \times 10 = 6 \times 5$	طرفین وسطین کردن	۱ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = cb$
$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} \Rightarrow \begin{cases} \frac{10}{5} = \frac{6}{3} \\ \frac{3}{6} = \frac{5}{10} \end{cases}$	تعویض جای طرفین یا وسطین	۲ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \\ \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \end{cases}$
$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} \Rightarrow \frac{5}{3} = \frac{10}{6}$	می‌توانیم هر دو طرف تناسب را معکوس کنیم.	۳ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$
$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} \Rightarrow \frac{3 \pm 5}{5} = \frac{6 \pm 10}{10}$	ترکیب یا تفصیل نسبت در صورت کسرها	۴ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$
$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} \Rightarrow \frac{3}{3 \pm 5} = \frac{6}{6 \pm 10}$	ترکیب یا تفصیل نسبت در مخرج کسرها	۵ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{a \pm b} = \frac{c}{c \pm d}$
$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} \Rightarrow \frac{3+6}{5+10} = \frac{3-6}{5-10}$	می‌توانیم صورت‌ها را با هم جمع (تفریق) و مخرج‌ها را با هم جمع (تفریق) کنیم.	۶ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$

حالت کلی ویژگی ۶: طبق ویژگی شماره ۶، گفتیم که اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ ، آن‌گاه: $\frac{a+c}{b+d} = k$. این ویژگی در حالت کلی برای تناسب

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \dots = \frac{z_1}{z_2} = k \quad \text{هم برقرار است و می‌توانیم بنویسیم:}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \dots = \frac{z_1}{z_2} = k \Rightarrow \frac{a_1 + b_1 + c_1 + \dots + z_1}{a_2 + b_2 + c_2 + \dots + z_2} = k$$

مثال: ویژگی ترکیب در صورت را اثبات کنید. $(\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d})$

پاسخ: فرض می‌کنیم: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. حالا به دو طرف تساوی مقدار ثابت ۱ را اضافه می‌کنیم:

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

(مشابه تمرین صفحه ۳۳ کتاب درسی)

مثال: از عبارت $\frac{7x+1}{3} = \frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{5}$ مقدار x و y را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا بخش اول تناسب $(\frac{7x+1}{3} = \frac{x-3}{5})$ را طرفین وسطین می‌کنیم تا مقدار x را پیدا کنیم:

$$\frac{7x+1}{3} = \frac{x-3}{5} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 5(7x+1) = 3(x-3) \Rightarrow 35x+5 = 3x-9 \Rightarrow 32x = -14 \Rightarrow x = -\frac{14}{32} = -\frac{7}{16}$$

حالا مقدار x را در بخش دوم تناسب $(\frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{5})$ جای گذاری کرده و y را به دست می‌آوریم:

$$\frac{-\frac{7}{16}-3}{5} = \frac{y+2}{5} \Rightarrow \frac{-\frac{49}{16}-3}{5} = \frac{y+2}{5} \Rightarrow y+2 = -\frac{49}{16}-3 \Rightarrow y = -\frac{14}{16} = -\frac{7}{8}$$

(تمرین صفحه ۳۳ کتاب درسی)

مثال: اگر $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ باشد، حاصل $x+y+z$ را به دست آورید.

پاسخ: با استفاده از حالت کلی ویژگی (۶) می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{x+y+z}{2+3+5} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{x+y+z}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow x+y+z = \frac{30}{5} = 6$$

میانگین (واسطه) هندسی

اگر طرفین یک تساوی با هم برابر باشد، مثلاً $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ یا $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ ، آن‌گاه b را واسطه هندسی بین a و c می‌نامیم و همواره داریم: $b^2 = ac$

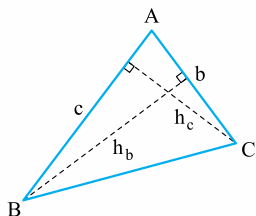
مثلاً ۸ واسطه هندسی بین اعداد ۴ و ۱۶ است؛ زیرا: $8^2 = 4 \times 16$

مثال: اگر $3x$ واسطه هندسی بین $3x-3$ و $3x+1$ باشد، مقدار x را به دست آورید.

پاسخ: از آنجا که $3x$ واسطه هندسی بین $3x-3$ و $3x+1$ است، می‌توانیم بنویسیم:

$$(3x)^2 = (3x-3)(3x+1) \Rightarrow 9x^2 = 9x^2 - 6x - 3 \Rightarrow -6x - 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

رابطه نسبت دو ارتفاع یک مثلث با نسبت قاعده‌های نظیر آن‌ها



در مثلث ABC روبه‌رو، ارتفاع‌های h_b و h_c را رسم می‌کنیم و مساحت مثلث ABC را یک بار با ارتفاع h_b و قاعده b و بار دیگر با ارتفاع h_c و قاعده c می‌نویسیم. می‌دانیم مساحت مثلث در هر دو حالت برابر است، پس:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} c \times h_c = \frac{1}{2} b \times h_b \Rightarrow c \cdot h_c = b \cdot h_b \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{h_b}{h_c}$$

یعنی: در هر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با عکس نسبت ارتفاع‌های وارد بر آن‌ها برابر است.

$$a > b > c \Leftrightarrow h_a < h_b < h_c$$

نتیجه: همیشه بزرگ‌ترین ارتفاع به کوچک‌ترین ضلع وارد می‌شود:

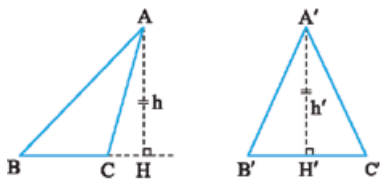
مثال: طول اضلاع مثلثی برابر ۴، $\sqrt{3}$ و $\sqrt{7}$ است و طول کوتاه‌ترین ارتفاع آن ۱ است. طول دو ارتفاع دیگر مثلث را به دست آورید.

پاسخ: می‌دانیم در هر مثلث، بزرگ‌ترین ارتفاع، نظیر کوچک‌ترین ضلع است؛ یعنی در این‌جا داریم: $4 > \sqrt{7} > \sqrt{3} \Rightarrow 1 < h_a < h_b$ پس ضلع c برابر ۴ و ارتفاع آن $h_c = 1$ است. حالا ارتفاع وارد بر دو ضلع دیگر مثلث را به دست می‌آوریم:

$$\frac{c}{a} = \frac{h_a}{h_c} \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{h_a}{1} \Rightarrow h_a = \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{7} \quad \frac{c}{b} = \frac{h_b}{h_c} \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{h_b}{1} \Rightarrow h_b = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

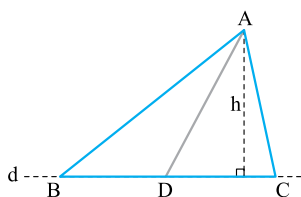
نسبت مساحت‌های دو مثلث هم‌ارتفاع

اگر دو مثلث، ارتفاع‌های برابر داشته باشند، نسبت مساحت آن‌ها برابر است با نسبت اندازه قاعده‌های نظیر آن ارتفاع‌ها. مثلاً در شکل روبه‌رو داریم:



$$h = h' \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} BC \times h}{\frac{1}{2} B'C' \times h'} = \frac{BC}{B'C'}$$

نتیجه: در شکل روبه‌رو، اگر دو مثلث مثل ABD و ADC در رأس A مشترک باشند و قاعده‌های مقابل به رأس A یعنی BD و DC روی یک خط مثل d باشند، آن‌گاه ارتفاع این دو مثلث برابر می‌شود. در نتیجه نسبت مساحت آن‌ها برابر با نسبت قاعده‌ها است، ببینید:

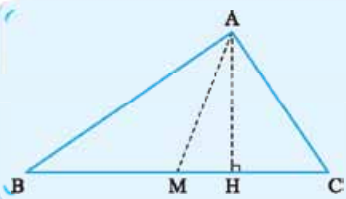


$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2} BD \times h}{\frac{1}{2} DC \times h} = \frac{BD}{DC}$$

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{BD}{BC}, \quad \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{DC}{BC}$$

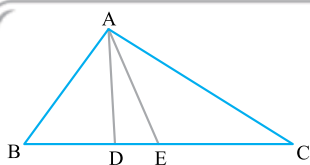
این رابطه را می‌توانیم برای مثلث‌های هم‌ارتفاع دیگر هم بنویسیم:

نکته



میانه هر مثلث، آن را به دو مثلث با مساحت برابر تقسیم می‌کند. مثلاً در شکل روبه‌رو داریم:

$$AM \Rightarrow BM = MC \Rightarrow \frac{S_{\triangle AMC}}{S_{\triangle AMB}} = \frac{\frac{1}{2} AH \times MC}{\frac{1}{2} \times AH \times MB} = 1 \Rightarrow S_{\triangle AMC} = S_{\triangle AMB}$$



مثال: در شکل مقابل، مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث ADE و دو برابر مساحت مثلث ABD است. نسبت‌های $\frac{BC}{DE}$ و $\frac{DE}{BD}$ را به دست آورید. (تمرین صفحه ۳۳ کتاب درسی)

$$S_{\triangle ACE} = 3S_{\triangle ADE} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ACE}}{S_{\triangle ADE}} = 3$$

پاسخ: تعیین نسبت $\frac{DE}{BD}$ ؛ گفته‌های صورت سؤال را به صورت ریاضی می‌نویسیم تا ببینیم پی می‌گه:

چون مثلث‌های ACE و ADE در رأس A مشترک‌اند و ارتفاع‌های برابر دارند، نسبت مساحت آن‌ها با نسبت قاعده‌ها برابر است و داریم:

$$\frac{CE}{DE} = 3 \Rightarrow DE = \frac{1}{3} CE \quad (1)$$

همین موضوع برای دو مثلث ACE و ABD هم برقرار است:

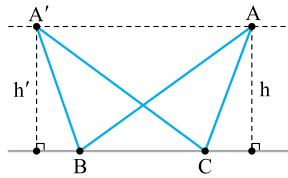
$$\frac{S_{\triangle ACE}}{S_{\triangle ABD}} = \frac{CE}{BD} = 2 \Rightarrow BD = \frac{1}{2} CE \quad (2)$$

حالا نسبت‌های خواسته شده مسئله را به دست می‌آوریم. با تقسیم کردن طرفین طبق رابطه‌های (۱) و (۲) داریم: $\frac{DE}{BD} = \frac{\frac{1}{3} CE}{\frac{1}{2} CE} = \frac{2}{3}$ تعیین نسبت $\frac{BC}{DE}$: از آنجا که ضلع BC برابر $BD + DE + EC$ است، می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{BC}{DE} = \frac{BD + DE + CE}{DE} = \frac{\frac{1}{2} CE + \frac{1}{3} CE + CE}{\frac{1}{3} CE} = \frac{\frac{11}{6} CE}{\frac{1}{3} CE} = \frac{11}{2}$$

نسبت مساحت‌های دو مثلث هم‌قاعده و هم‌ارتفاع

اگر دو مثلث، قاعده‌های برابر داشته باشند و رأس سوم آن‌ها روی خطی موازی با قاعده قرار بگیرد، در این صورت، مساحت‌های این دو مثلث با هم برابرند. مثلاً به شکل زیر دقت کنید. برای دو مثلث ABC و A'BC که قاعده‌های مشترک دارند، داریم:



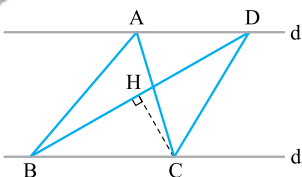
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \times h$$

$$S_{\triangle A'BC} = \frac{1}{2} BC \times h'$$

فاصله بین دو خط موازی همواره یکسان است. ($h = h'$)

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A'BC}$$

مثال در شکل مقابل، $d' \parallel d$ و مساحت مثلث ABC برابر ۸ است. اگر $BD = 6$ باشد، فاصله نقطه C از BD چه قدر است؟
(تمرین صفحه ۳۳ کتاب درسی)



پاسخ فاصله بین خطوط موازی همواره برابر است، بنابراین در شکل بالا ارتفاع دو مثلث ABC و DBC برابر است. قاعده هر دو مثلث هم BC است؛ پس مساحت مثلث‌های ABC و DBC برابر است، حالا مسئله مقدار CH را از ما می‌خواهد:

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle DBC} = 8 \Rightarrow S_{\triangle DBC} = \frac{1}{2} CH \times BD \Rightarrow 8 = \frac{1}{2} \times CH \times 6 \Rightarrow CH = \frac{8}{3}$$

در امتحان چه خبر؟

بریم سراغ تیپ سؤال‌هایی که معلمان توی این درس بهش علاقه دارن.

تیپ ۱ یک تناسب با مقادیر مجهول در سؤال وجود دارد و از شما می‌خواهند مقدار یک کسر شامل آن مقادیر مجهول را به دست آورید. برای حل این سؤال‌ها کافی است جدول مربوط به ویژگی‌های تناسب را خوب تمرین کرده باشید.

حالا تو حل کن سؤال‌های ۱ و ۲ / ۷ / ۸ / ۱۰ تا ۱۳

تیپ ۲ میانگین هندسی: دیگه واضح‌تر از این سؤال نداریم. فرمول $b^2 = ac$ رو سرلوحه حل این سؤال‌ها بذار، بقیه‌ش مناسباته ...

حالا تو حل کن سؤال‌های ۳ / ۱۴ و ۱۵

تیپ ۳ برای حل سؤال‌های مربوط به مساحت مثلث‌ها که قاعده برابر یا ارتفاع برابر یا ... دارند، فقط همان چندتا نکته داخل درس‌نامه کافی است. (تنوع این سؤال‌ها زیاده ولی کافیه مثلث‌های درست رو انتخاب کنی!)

حالا تو حل کن سؤال‌های ۴ تا ۶ / ۹ / ۱۶ تا ۲۶

سؤال‌های امتحانی

جاهای خالی را با عبارت یا اعداد مناسب پر کنید.

۱- اگر $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ آن گاه $\frac{a+b}{a}$ برابر است.

$$2- \frac{a}{2} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{a+b+c}{2} = \frac{3}{2}$$

۳- اگر b میانگین هندسی بین a و c باشد، آن گاه $b^2 = \dots\dots\dots$

۴- در هر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دو ضلع با عکس نسبت وارد بر آن‌ها برابر است.

۵- اگر دو مثلث قاعده‌های برابر داشته باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با

(مشابه تمرین صفحه ۳۳ کتاب درسی)

(مشابه تمرین صفحه ۳۳ کتاب درسی)

❑ درستی و نادرستی عبارتهای زیر را بیان کنید، برای نادرستها علت بنویسید.

۶- در مثلث ABC ، اگر AM میانه باشد، نسبت مساحت مثلثهای ABM و ACM برابر یک است.

۷- اگر بدانیم $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ آن گاه $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$.

۸- در یک مثلث، نسبت زاویههای داخلی ۱، ۲ و ۹ است. اندازه کوچکترین زاویه این مثلث برابر 10° است.

۹- در مثلث ABC ، پاره‌های BH و CH' به ترتیب ارتفاعهای وارد بر AC و AB هستند. اگر $AC = 2AB$ آن گاه $BH = 2CH'$.

❑ به سؤالات زیر پاسخ کامل دهید.

۱۰- اگر $\frac{2a}{3} = \frac{b-2}{3} = \frac{2c+1}{4}$ و $3a+b+2c=11$ باشد، مقادیر a ، b و c را به دست آورید. (مشابه تمرین صفحه ۳۳ کتاب درسی)

۱۱- اگر برای اعداد غیر صفر a ، b و c داشته باشیم: $\frac{2a+c}{b} = \frac{a+2b}{c} = \frac{b+2c}{a}$ ، آن گاه حاصل $\frac{(a+2b)(b+2c)(2a+c)}{abc}$ را به دست آورید.

۱۲- اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{4}{5}$ باشد، حاصل $\frac{3a-2c+8}{3b-2d+10}$ را به دست آورید.

۱۳- پاره خط AB به طول ۱۵ و دو نقطه C و D را روی این پاره خط طوری در نظر می‌گیریم که $\frac{AC}{CB} = \frac{BD}{AD} = 3$ باشد. طول پاره خط DC را به دست آورید.

۱۴- طول پاره خطی را به دست آورید که واسطه هندسی بین دو پاره خط به طولهای ۸ و ۱۰ باشد. (تمرین صفحه ۳۳ کتاب درسی)

۱۵- اگر M واسطه هندسی بین دو عدد ۲، ۸ و N واسطه هندسی ۹ و M باشد، واسطه هندسی M و N را بیابید.

۱۶- ثابت کنید در هر مثلث نسبت اندازه‌های هر دو ضلع برابر عکس نسبت ارتفاعهای وارد بر آنهاست. (فعالیت صفحه ۳۰ کتاب درسی)

۱۷- ثابت کنید هرگاه ارتفاعهای نظیر دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت آنها برابر با نسبت اندازه قاعده‌هایی است که این ارتفاعها به آنها وارد می‌شود. (فعالیت صفحه ۳۱ کتاب درسی)

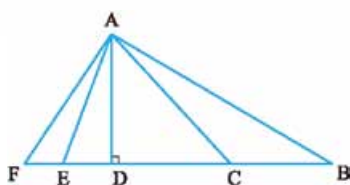
۱۸- ثابت کنید اگر در دو مثلث، یک رأس مشترک و قاعده‌های مقابل به این رأس‌ها روی یک خط باشند، نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت اندازه قاعده‌ها است. (کار در کلاس صفحه ۳۱ کتاب درسی)

۱۹- ثابت کنید اگر دو مثلث قاعده مشترک داشته باشند و رأس روبه‌روی این قاعده‌ها روی خطی موازی قاعده باشد، مساحت این دو مثلث برابر است. ۲۰- طول ارتفاعهای یک مثلث ۱۲، ۱۵، ۳۳ و طول کوچک‌ترین ضلع آن ۱۱ است. محیط این مثلث را به دست آورید.

۲۱- ثابت کنید هر میانه در مثلث، آن را به دو مثلث با مساحت برابر تقسیم می‌کند. (کار در کلاس صفحه ۳۲ کتاب درسی)

۲۲- در شکل زیر رأس همه مثلث‌ها در A مشترک است. نسبت مساحت‌های مثلث‌های داده شده را بنویسید.

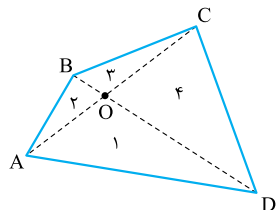
(کار در کلاس صفحه ۳۱ کتاب درسی)



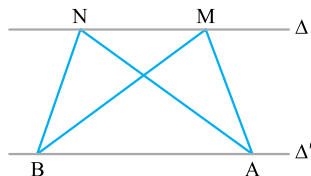
$$\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABF}} \quad (ب)$$

$$\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle AFC}} \quad (الف)$$

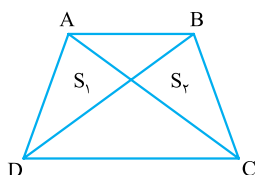
۲۳- در چهارضلعی محدب شکل مقابل، با رسم قطرها ۴ مثلث ایجاد می‌شود. ثابت کنید: $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$. (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)



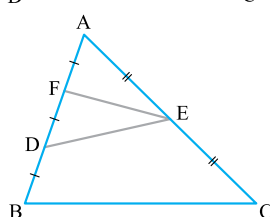
۲۴- در شکل مقابل، اگر Δ و Δ' موازی باشد و مساحت مثلث ABM برابر ۲۰ باشد و $NB = 4$ ، فاصله A تا ضلع NB چه قدر است؟ (مشابه تمرین صفحه ۳۳ کتاب درسی)



۲۵- در دوزنقه $ABCD$ مطابق شکل قطرها رسم شده‌اند، ثابت کنید: $S_1 = S_2$. (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

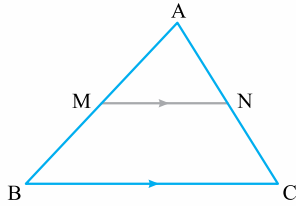


۲۶- در مثلث ABC مطابق شکل، E وسط AC و $AF = DF = BD$ است. ثابت کنید مساحت مثلث DEF ، $\frac{1}{6}$ مساحت مثلث ABC است.



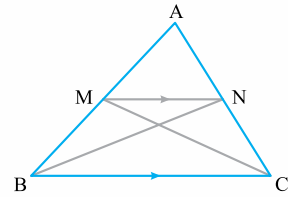
آقای تالس دانشمند و ریاضی‌دان متولد قبل از میلاد مسیح و حتی قبل از آقای فیثاغورس بوده که کلی نظریه داشته. یکی از آن‌ها، معروف به قضیه تالس است. توی این درس می‌فوییم قضیه تالس و هر چی مربوط به اون می‌شه رو یاد بگیریم.

قضیه تالس



هرگاه در مثلثی، خطی موازی یکی از اضلاع رسم کنیم تا دو ضلع دیگر را قطع کند، آن‌گاه چهار پاره‌خط ایجاد شده روی این دو ضلع متناسب‌اند، مثلاً در مثلث ABC مقابل داریم:

$$MN \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$



اثبات برای اثبات این قضیه: ابتدا دو خط NB و MC را رسم می‌کنیم. می‌دانیم اگر دو مثلث در یک رأس مشترک باشند و قاعده‌های آن‌ها روی یک خط باشند، نسبت مساحت آن‌ها برابر نسبت قاعده‌ها است، پس در مثلث‌های AMN و MNC که در رأس M مشترک و هم ارتفاع‌اند، می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle MNC}} = \frac{AN}{NC} \quad (1)$$

به همین ترتیب نسبت مساحت‌های مثلث‌های AMN و MNB که در رأس M مشترک و هم ارتفاع‌اند، برابر است با:

$$\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle MNB}} = \frac{AM}{MB} \quad (2)$$

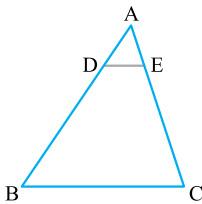
از طرفی چون در مثلث‌های MNB و MNC، قاعده MN مشترک و فاصله B و C از قاعده MN یکسان است (MN \parallel BC)، پس:

$$S_{\triangle MNB} = S_{\triangle MNC}$$

$$\frac{AN}{NC} = \frac{AM}{MB} \quad (\text{قضیه تالس})$$

در نتیجه $\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle MNC}} = \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle MNB}}$ و طبق روابط (1) و (2) می‌توانیم بنویسیم:

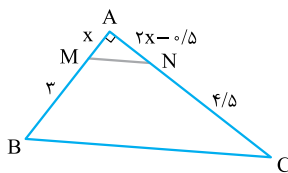
مثال در شکل مقابل، $DE \parallel BC$ ، $AD = 1$ ، $DB = 3$ و $AE = 0.8$ ، به کمک قضیه تالس طول AC را به دست آورید.



پاسخ طبق تالس اگر $DE \parallel BC$ باشد، داریم:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{0.8}{EC} \Rightarrow EC = 2.4 \Rightarrow AC = AE + EC = 0.8 + 2.4 = 3.2$$

مثال در شکل مقابل $MN \parallel BC$ است. به کمک قضیه تالس، مقدار x و سپس مساحت مثلث ABC را به دست آورید.



پاسخ وجود دو تا خط موازی در یک شکل باید سریع ما را به یاد قضیه تالس بیندازد:

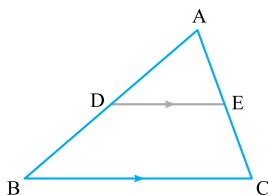
$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AN}{NC} = \frac{AM}{MB} \Rightarrow \frac{2x - 0.5}{4/5} = \frac{x}{3} \Rightarrow 6x - 1.5 = 4/5x \Rightarrow x = 1$$

پس اضلاع AB و AC به ترتیب برابر 4 و 6 است و مساحت ABC برابر است با:

$$\hat{A} = 90^\circ \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{4 \times 6}{2} = 12$$

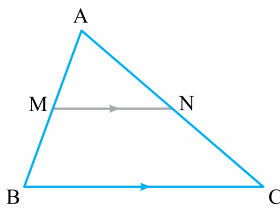
نتایج قضیه تالس

به کمک ویژگی‌های تناسب، قضیه تالس به شکل‌های زیر هم نوشته می‌شود که خیلی هم کاربرد دارند:



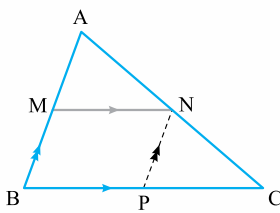
$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad (\text{جزء به کل})$$

$$\frac{BD}{AB} = \frac{EC}{AC} \quad (\text{جزء به کل})$$



اگر خطی دو ضلع مثلثی را در دو نقطه قطع کند و با ضلع سوم آن موازی باشد، مثلثی تشکیل می‌شود که اندازه ضلع‌های آن با ضلع‌های مثلث اصلی متناسب‌اند. مثلاً در مثلث ABC مقابل، خط MN دو ضلع AB و AC را قطع کرده و با BC موازی است. نسبت اضلاع مثلث AMN و ABC را ببینید:

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$



اثبات برای اثبات این قضیه، مطابق شکل از نقطه N خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در P قطع کند. چون داشتیم $BC \parallel MN$ و حالا می‌دانیم $AB \parallel NP$ ، در نتیجه چهارضلعی با داشتن دو ضلع روبه‌روی موازی MNPB متوازی‌الاضلاع است و اضلاع مقابل با هم برابرند: $MN = BP$ (*)

حالا یک بار در مثلث ABC و با پاره‌خط‌های موازی MN و BC و بار دیگر در مثلث ABC و با پاره‌خط‌های موازی NP و AB تالس جزء به کل را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} & (1) \\ NP \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AN}{AC} = \frac{BP}{BC} & (2) \end{cases}$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{BP}{BC}$$

از رابطه (1) و (2) نتیجه می‌گیریم:

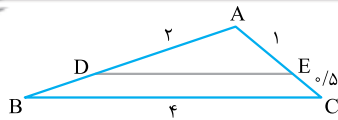
و چون طبق (*), مقدار BP برابر MN بود، پس:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \quad (\text{تعمیم قضیه تالس})$$

دقت کنید تعمیم قضیه تالس معمولاً جاهایی استفاده می‌شود که طول پاره‌خط‌های موازی مدنظر سؤال باشد.



مثال: در شکل مقابل: $DE \parallel BC$. طول‌های DE و AB را به دست



(تمرین صفحه ۳۶ کتاب درسی)

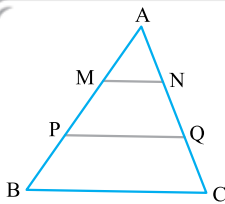
آورید.

پاسخ: طول پاره‌خط موازی DE را می‌خواهیم پس از تعمیم تالس استفاده می‌کنیم:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{1+2} = \frac{2}{AB} \Rightarrow AB = 3 \\ \frac{1}{1+2} = \frac{DE}{4} \Rightarrow DE = \frac{4}{3} \end{cases}$$

یکم سؤال‌ها رو سخت‌تر کنیم:

مثال: در شکل مقابل، $AM = MP = PB$ و $BC \parallel MN \parallel PQ$ است. ثابت کنید: $MN + PQ = BC$.



پاسخ: کافی است دو بار تعمیم قضیه تالس را بنویسیم. ببینید:

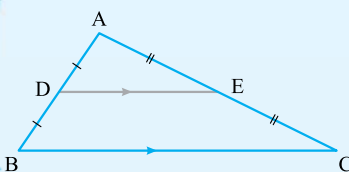
$$\triangle APQ : MN \parallel PQ \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{AM}{AP} = \frac{MN}{PQ} \xrightarrow{\frac{AM=MP}{AP=2AM}} \frac{1}{2} = \frac{MN}{PQ} \Rightarrow 2MN = PQ \quad (1)$$

$$\triangle ABC : MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \xrightarrow{\frac{AM=MP=PB}{AB=3AM}} \frac{1}{3} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow 3MN = BC \quad (2)$$

$$MN + PQ = MN + 2MN = 3MN = BC$$

حالا طبق (1) و (2) داریم:

نکته

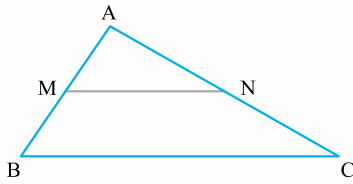


در مثلث ABC مقابل، اگر از D در وسط ضلع AB پاره‌خط DE را موازی ضلع BC رسم کنیم، آن‌گاه از E از وسط AC می‌گذرد و پاره‌خط DE نصف ضلع BC است:

$$AD = DB, DE \parallel BC \Rightarrow AE = EC, \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}$$

تالس یک قضیه دوشروطی است و عکس آن هم همواره برقرار است، یعنی:

«اگر خطی دو ضلع مثلثی را قطع کند و روی آن‌ها چهار پاره‌خط با اندازه‌های متناسب جدا کند، آن‌گاه با ضلع سوم مثلث موازی است.»



مثلاً در مثلث روبه‌رو، اگر خط MN ، ضلع‌های AB و AC را قطع کند و رابطه $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ برقرار باشد، می‌توانیم نتیجه بگیریم که:

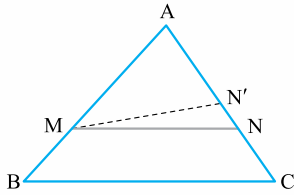
$$MN \parallel BC$$

اثبات برای اثبات این قضیه از **برهان خلف** استفاده می‌کنیم. در مثلث زیر می‌دانیم: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$. فرض می‌کنیم حکم برقرار نباشد و داشته باشیم $MN \not\parallel BC$.

پس می‌توانیم از نقطه M پاره‌خط MN' را موازی BC رسم کنیم. به طوری که N' منطبق بر N نباشد، حالا با توجه به قضیه تالس داریم:

$$MN' \parallel BC \Rightarrow \frac{AN'}{AC} = \frac{AM}{AB}$$

از مقایسه این تناسب با فرض مسئله داریم $\frac{AN}{AC} = \frac{AN'}{AC}$ پس باید: $AN = AN'$ و N بر N' منطبق باشد، پس MN' همان MN است و موازی BC است.



مثال در شکل مقابل، می‌دانیم $AB \parallel A'B'$ و $BC \parallel B'C'$. با استفاده از قضیه تالس و عکس آن ثابت کنید: $AC \parallel A'C'$.

(تمرین صفحه ۳۷ کتاب درسی)

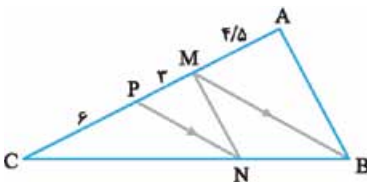
پاسخ باید قضیه تالس را برای دو جفت مثلث بنویسیم:

$$\left. \begin{array}{l} \triangle OA'B' \Rightarrow AB \parallel A'B' \Rightarrow \frac{OA}{AA'} = \frac{OB}{BB'} \\ \triangle OC'B' \Rightarrow BC \parallel B'C' \Rightarrow \frac{OC}{CC'} = \frac{OB}{BB'} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{OA}{AA'} = \frac{OC}{CC'}$$

حالا طبق عکس قضیه تالس در مثلث $OA'C'$ داریم:

$$\frac{OA}{AA'} = \frac{OC}{CC'} \Rightarrow AC \parallel A'C'$$

(مشابه تمرین صفحه ۳۷ کتاب درسی)



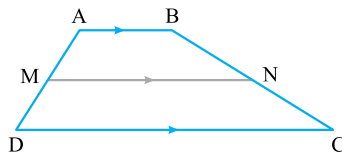
مثال در شکل زیر $MB \parallel PN$ ، با توجه به اندازه‌های روی شکل ثابت کنید: $AB \parallel MN$.

پاسخ اگر $MB \parallel PN$ باشد طبق تالس در مثلث CMB داریم:

$$\frac{CN}{CB} = \frac{CP}{CM} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

از طرفی طبق اندازه‌های روی شکل می‌دانیم: $\frac{CM}{CA} = \frac{9}{13/5} = \frac{2}{3}$ (۲).

پس طبق روابط (۱) و (۲): $\frac{CN}{CB} = \frac{CM}{CA} = \frac{2}{3}$ و با استفاده از عکس قضیه تالس می‌توانیم بگوییم در مثلث ABC داریم: $MN \parallel AB$.



$$AB \parallel MN \parallel DC \Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$$

تالس در ذوزنقه

در هر ذوزنقه، اگر خطی موازی دو قاعده آن رسم شود، روی ساق‌ها، پاره‌خط‌های متناظر متناسب ایجاد می‌کند، مثلاً در ذوزنقه $ABCD$ روبه‌رو داریم:

(تمرین صفحه ۳۷ کتاب درسی)

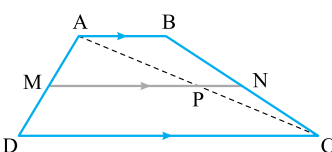
مثال قضیه تالس را در ذوزنقه مقابل ثابت کنید.

پاسخ برای اثبات قضیه تالس در ذوزنقه $ABCD$ ، ابتدا قطر AC را رسم می‌کنیم سپس در مثلث‌های ایجادشده قضیه تالس را می‌نویسیم:

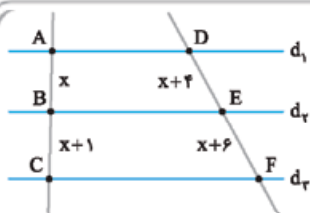
$$\triangle ABC : AB \parallel PN \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{CN}{BN} = \frac{CP}{AP} \xrightarrow{\text{عکس}} \frac{BN}{CN} = \frac{AP}{CP} \quad (۱)$$

$$\triangle ADC : MP \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AM}{MD} = \frac{AP}{CP} \quad (۲)$$

حالا طبق (۱) و (۲) داریم: $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$



مثال در شکل روبه‌رو $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3$. مقدار x را به دست آورید. (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)



پاسخ اگر $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3$ پس می‌توانیم بگوییم که شکل $ACFD$ یک دوزنقه است، آن‌گاه طبق قضیه تالس در دوزنقه داریم:

$$AD \parallel BE \parallel CF \Rightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{x+4}{x+6} \Rightarrow x^2 + 6x = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow x = 4$$

جمع‌بندی بیاید به بار هر پی از تالس یاد گرفتیم رو مرور کنیم.

قضیه تالس		$MN \parallel BC \Rightarrow \begin{cases} 1) \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \\ 2) \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \end{cases}$ (جزء به جزء) (جزء به کل)
تعمیم تالس		$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$
عکس تالس		$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow MN \parallel BC$
تالس در دوزنقه		$AB \parallel MN \parallel DC \Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$

در امتحان چه خبر؟

بریم ببینیم از تالس چه سؤال‌هایی توی امتحان‌ها میاد:

تپ ۱ ساده‌ترین تپ سؤال در این درس، مربوط به اثبات خود قضیه‌ها یا درستی و نادرستی فرمول‌های اصلی است. کارى نداره! فقط باید به درس‌نامه این کتاب مسلط باشید.

حالا تو حل کن سؤال‌های ۲۷ تا ۳۸ و ۴۸

تپ ۲ یک مثلث با یک‌سری اضلاع معلوم و مجهول و صد البته یک یا چند خط موازی داخل آن وجود دارد که شما باید مقادیر مجهول را به دست بیاورید. گفتیم هر جا خط‌های موازی داخل مثلث دیدید به تالس یا تعمیم آن مشکوک شوید.

حالا تو حل کن سؤال‌های ۳۹ تا ۴۷ و ۴۹

تپ ۳ تپ آخر سؤالات این درس هم مربوط به تالس در دوزنقه است که هم باید اثبات آن را بلد باشید و هم بتوانید از رابطه درس‌نامه سؤال‌های کمی سخت‌تر را حل کنید.

حالا تو حل کن سؤال‌های ۵۰ تا ۵۲

سؤال‌های امتحانی

جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

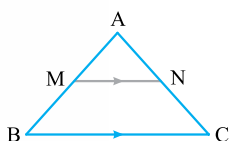
۲۷- اگر خطی دو ضلع مثلثی را قطع کند و روی آن چهار پاره‌خط متناسب ایجاد کند، آن‌گاه با ضلع سوم است.

$$\frac{AM}{AB} = \frac{\dots\dots\dots (الف)}{AC} = \frac{MN}{\dots\dots\dots (ب)}$$

۲۸- اگر در مثلث ABC ، MN را موازی BC رسم کنیم، آن‌گاه:

در شکل مقابل، پاره‌خط MN موازی با BC رسم شده است. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

(تمرین صفحه ۳۶ کتاب درسی)



$$\frac{MB}{AB} = \frac{MN}{BC} \quad -35$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \quad -36$$

$$AM \times NC = AN \times MB \quad -37$$

$$\frac{AM}{BM} = \frac{MN}{BC} \quad -32$$

$$\frac{MB}{MA} = \frac{NC}{NA} \quad -33$$

$$\frac{MB}{AB} = \frac{NC}{CA} = \frac{MN}{BC} \quad -34$$

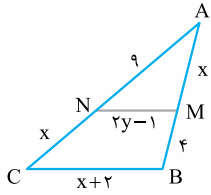
$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{MN}{BC} \quad -29$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \quad -30$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \quad -31$$

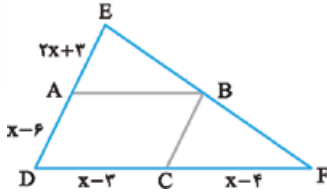
۳۸- قضیه تالس و عکس آن را بیان و اثبات کنید.

۳۹- در شکل روبه‌رو، $MN \parallel BC$ ، مقادیر x و y را به دست آورید.



(تمرین صفحه ۳۶ کتاب درسی)

۴۰- در شکل روبه‌رو، چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است. مقدار x را محاسبه کنید.

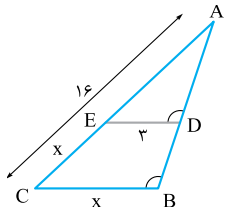


۴۱- در شکل روبه‌رو، اگر طول سایه درخت ۶۰ متر، طول سایه شاخص ۳ متر و طول شاخص

۱ متر باشد، بلندی درخت چه قدر است؟

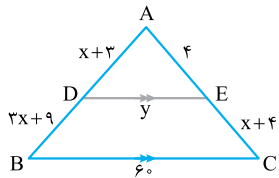


۴۲- در شکل روبه‌رو، زاویه‌های B و D برابرند. مقدار x را به دست آورید.



(مشابه تمرین صفحه ۳۶ کتاب درسی)

۴۳- محیط چهارضلعی DECB را بیابید.

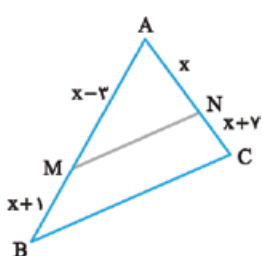


(مشابه تمرین صفحه ۳۶ کتاب درسی)

۴۴- در شکل روبه‌رو، اگر $MN \parallel BC$ باشد، آن‌گاه:

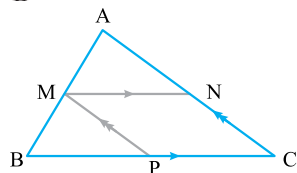
الف) طول ضلع AC را به دست آورید.

ب) اگر $MN = 10$ باشد، طول ضلع BC را بیابید.



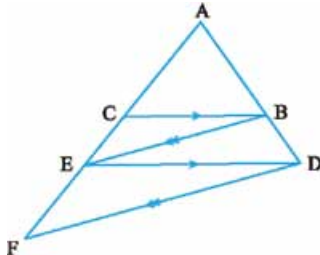
۴۵- در مثلث ABC، از نقطه M روی ضلع AB دو خط موازی اضلاع BC و AC رسم

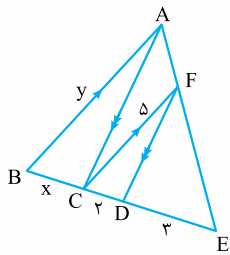
شده است. ثابت کنید: $\frac{MN}{BC} + \frac{MP}{AC} = 1$.



۴۶- در شکل مقابل می‌دانیم $DE \parallel BC$ و $BE \parallel DF$. به کمک قضیه تالس ثابت کنید که

AE واسطه هندسی بین AC و AF است.





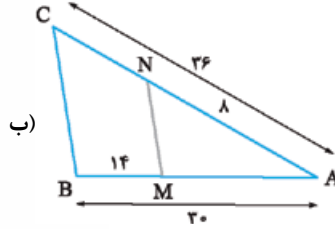
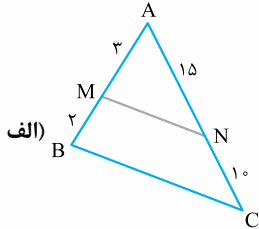
(مشابه تمرین صفحه ۳۷ کتاب درسی)

۴۷- در شکل مقابل، مقادیر x و y را به دست آورید.

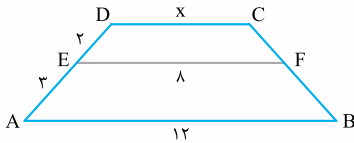
۴۸- ثابت کنید، خطی که از وسط یک ضلع از مثلث موازی ضلع دیگر رسم می‌شود، از وسط ضلع مقابل می‌گذرد و اندازه آن، نصف ضلع موازی است.

(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

۴۹- با دلیل مشخص کنید در کدام یک از شکل‌های زیر $MN \parallel BC$ است؟

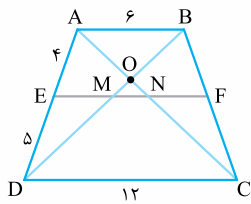


۵۰- در شکل روبه‌رو اگر $AB \parallel EF \parallel CD$ باشد، طول DC را به دست آورید.



(مشابه تمرین صفحه ۳۷ کتاب درسی)

۵۱- در دوزنقه $ABCD$ ، $AB \parallel EF$ است، اندازه MN را بیابید.



۵۲- ثابت کنید پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق دوزنقه را به هم وصل می‌کند، موازی دو قاعده است و طول آن برابر میانگین طول‌های دو قاعده دوزنقه است.

(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

پاسخ سؤال‌های امتحانی

۱۲- روش اول: اگر در یک تناسب، صورت و مخرج در عدد ثابتی ضرب شود، آن نسبت تغییر نمی‌کند؛ یعنی در این‌جا:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{3a}{3b} = \frac{4}{5} \\ \frac{c}{d} &= \frac{-2c}{-2d} = \frac{4}{5} \end{aligned} \right\} \xrightarrow[\text{تناسب}]{\text{طبق ویژگی‌ها}} \frac{3a-2c+8}{3b-2d+10} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{2 \times 4}{2 \times 5} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

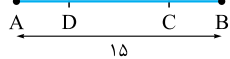
روش دوم:

نکته

اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ باشد، هر نسبت خطی از صورت‌ها به روی همان نسبت خطی در مخرج‌ها برابر k است، یعنی
مثلاً: $\frac{na+mc}{nb+md} = k$

حالا در این سؤال هم می‌بینید که صورت و مخرج کسرهای نسبت در یک عدد خاص ضرب شده‌اند، پس داریم:

۱۳- مطابق شکل روبه‌رو داریم:



$$\frac{AC}{CB} = 3 \Rightarrow AC = 3CB$$

$$AC + CB = AB = 15 \Rightarrow BC = \frac{15}{4}$$

$$AD = \frac{15}{4}$$

به همین ترتیب:

پس مقدار DC برابر است با:

$$AD + CB + DC = 15 \Rightarrow DC = 15 - 2 \times \frac{15}{4} = \frac{15}{2}$$

۱۴- اگر طول پاره‌خط را b در نظر بگیریم، داریم:

$$8, b, 10 \Rightarrow b^2 = 8 \times 10 = 80 \Rightarrow b = \sqrt{80}$$

۱۵- M واسطه هندسی بین ۲ و ۸ است؛ پس:

$$M^2 = 2 \times 8 = 16 \Rightarrow M = 4$$

N هم واسطه هندسی بین M و ۹ است و داریم:

$$N^2 = 9 \times M = 9 \times 4 = 36 \Rightarrow N = 6$$

حالا اگر واسطه هندسی بین M و N برابر P باشد:

$$P^2 = 4 \times 6 = 24 \Rightarrow P = \sqrt{24}$$

۱۶- به صفحه ۳۵ درس‌نامه مراجعه شود.

۱۷- به صفحه ۳۵ درس‌نامه مراجعه شود.

۱۸- به صفحه ۳۵ درس‌نامه مراجعه شود.

۱۹- به صفحه ۳۶ درس‌نامه مراجعه شود.

۲۰- کوچک‌ترین ضلع مثلث همیشه روبه‌روی بزرگ‌ترین ارتفاع

$$a = 11 \Rightarrow h_a = 33$$

است، پس:

$$-1 \left(\frac{y}{3} \right)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{4} \xrightarrow{\text{عکس}} \frac{b}{a} = \frac{4}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} \frac{b+a}{a} = \frac{4+3}{3} = \frac{7}{3}$$

$$-2 (14)$$

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{2+5+7} = \frac{3}{14}$$

$$-3 \quad b^2 = ac$$

۴- ارتفاع‌های

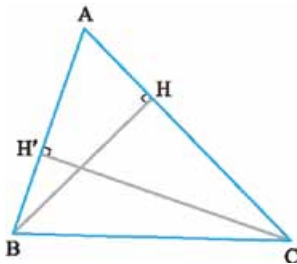
۵- نسبت ارتفاع‌های نظیر آن قاعده‌ها

۶- درست

۸- نادرست

کوچک‌ترین زاویه	مجموع زوایا
۱	۱۲
x	180°

$$\Rightarrow x = \frac{180^\circ}{12} = 15^\circ$$



۹- نادرست، نسبت ارتفاع‌ها

عکس نسبت اضلاع نظیر است.

$$\frac{AC}{AB} = 2 \Rightarrow \frac{BH}{CH'} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow BH = \frac{1}{2} CH'$$

۱۰- طبق ویژگی‌های تناسب داریم:

$$\frac{3a}{2} = \frac{b-3}{3} = \frac{2c+1}{4} = \frac{3a+b-3+2c+1}{2+3+4}$$

$$= \frac{3a+b+2c-2}{9} = \frac{9}{9} = 1$$

حالا هر کسر را می‌توانیم برابر ۱ قرار دهیم:

$$\frac{3a}{2} = 1 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$\frac{b-3}{3} = 1 \Rightarrow b = 6$$

$$\frac{2c+1}{4} = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

۱۱- طبق ویژگی‌های تناسب داریم:

$$\frac{2a+c}{b} = \frac{a+2b}{c} = \frac{b+2c}{a} = \frac{2a+c+a+2b+b+2c}{a+b+c}$$

$$= \frac{3a+3b+3c}{a+b+c} = 3$$

حالا کسر مورد نظر صورت سؤال برابر است با:

$$\frac{(a+2b)(b+2c)(2a+c)}{abc} = \frac{a+2b}{c} \times \frac{b+2c}{a} \times \frac{2a+c}{b}$$

$$= 3 \times 3 \times 3 = 27$$

از طرفی چون $AE = EC$ ، پس: $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle BEC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$

طبق (۱) داریم: $3S_r = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} \Rightarrow S_r = \frac{1}{6} S_{\triangle ABC}$

۲۷- موازی

۲۸- الف) AN ب) BC

۲۹- نادرست، حالت درست این رابطه به شکل زیر است:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

۳۰- درست ۳۱- درست

۳۲- نادرست، حالت درست این رابطه به شکل زیر است:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$$

۳۳- درست

۳۴- نادرست، حالت درست این رابطه به شکل زیر است:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

۳۵- نادرست، حالت درست این رابطه به شکل زیر است:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$$

۳۶- درست ۳۷- درست

۳۸- به صفحه ۳۸ و ۳۹ درسنامه مراجعه شود.

۳۹- اگر $MN \parallel BC$ ، آن گاه طبق

تالس جزء به جزء در مثلث ABC روبه‌رو

داریم:

$$\frac{AN}{CN} = \frac{AM}{MB} \Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{x}{4} \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$$

حالا برای به دست آوردن مقدار y تالس جزء به کل می‌نویسیم:

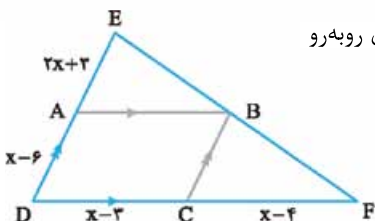
$$\frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{9}{6+9} = \frac{2y-1}{6+2} \Rightarrow \frac{9}{15} = \frac{2y-1}{8}$$

$$\Rightarrow 2y-1 = \frac{24}{5} \Rightarrow y = \frac{2}{9}$$

۴۰- در متوازی‌الاضلاع $ABCD$

شکل مقابل، ضلع‌های روبه‌رو

موازی‌اند، پس داریم:



$$AB \parallel DF \xrightarrow[\text{جزء به جزء}]{\text{تالس}} \frac{2x+2}{x-6} = \frac{EB}{BF} \quad (1)$$

$$BC \parallel ED \xrightarrow[\text{جزء به جزء}]{\text{تالس}} \frac{x-4}{x-3} = \frac{BF}{EB} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{\text{طبق (۱) و (۲)}} \frac{2x+2}{x-6} = \frac{x-3}{x-6}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2x^2 - 5x - 12 = x^2 - 9x + 18$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x - 30 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{136}}{2}$$

حالا طول دو ضلع دیگر را به دست می‌آوریم:

$$\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a} \Rightarrow \frac{11}{b} = \frac{12}{33} \Rightarrow b = \frac{121}{4}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{h_c}{h_a} \Rightarrow \frac{11}{c} = \frac{15}{33} \Rightarrow c = \frac{121}{5}$$

پس محیط مثلث برابر است با:

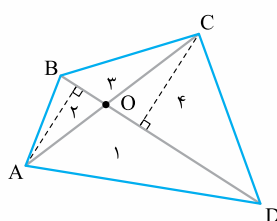
$$P = a + b + c = 11 + \frac{121}{4} + \frac{121}{5} = 65 \frac{45}{20}$$

۲۱- به نکته صفحه ۳۵ درسنامه مراجعه شود.

۲۲-

$$\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle AFC}} = \frac{FE}{FC} \quad \text{الف)}$$

$$\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABF}} = \frac{DC}{BF} \quad \text{ب)}$$



۲۳- در چهارضلعی مقابل:

مثلث‌های BOC و DOC رأس مشترک و ارتفاع‌های یکسان دارند:

$$\frac{S_r}{S_f} = \frac{BO}{DO} \quad (1)$$

مثلث‌های ADO و ABO رأس مشترک و ارتفاع‌های یکسان دارند:

$$\frac{S_r}{S_1} = \frac{BO}{DO} \quad (2)$$

طبق (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{S_r}{S_f} = \frac{S_r}{S_1} \Rightarrow S_1 \cdot S_r = S_r \cdot S_f$$

۲۴- در شکل زیر، $\Delta \parallel \Delta'$ ، M و N روی Δ است و قاعده‌های

مثلث‌های NBA و MBA روی یک خط قرار دارند، پس مساحت

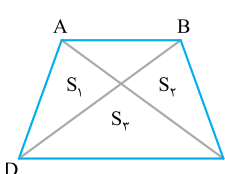
این مثلث‌ها با هم برابر است و داریم:

$$S_{\triangle ABN} = S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} AH \times NB = 20$$

$$\xrightarrow{NB=4} AH=10$$

۲۵- در دوزنقه $ABCD$ زیر، داریم $AB \parallel CD$ پس مساحت

مثلث‌های ADC و BDC برابر است، بنابراین:



$$S_{\triangle ADC} = S_{\triangle BDC}$$

$$\Rightarrow S_1 + S_3 = S_2 + S_4$$

$$\Rightarrow S_1 = S_2$$

۲۶- در مثلث ABC زیر، از B وصل می‌کنیم:

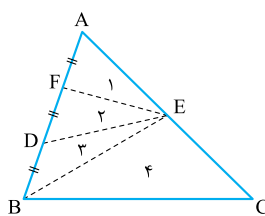
در سه مثلث، (۱) و (۲) و (۳) قاعده‌ها و

ارتفاع برابرند. پس مساحت‌های آن با

هم برابر است:

$$S_1 = S_r = S_3$$

$$\Rightarrow 3S_r = S_{\triangle ABE} \quad (1)$$



۴۱- مطابق اطلاعات مسئله، در شکل ساده شده زیر، شاخص و درخت موازی اند، پس طبق تعمیم قضیه تالس داریم:

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 20 \text{ m}$$

۴۲- در مثلث ABC زیر داریم: $\hat{B} = \hat{D}$ آن گاه طبق عکس قضیه موازی مورب می توانیم بگوییم $ED \parallel CB$ ؛ بنابراین طبق قضیه تعمیم قضیه تالس داریم:

$$\frac{16-x}{16} = \frac{3}{x} \Rightarrow 16x - x^2 - 48 = 0$$

$$x^2 - 16x + 48 = 0 \Rightarrow x = 12, 4$$

۴۳- مطابق شکل، $DE \parallel BC$ ، پس

طبق قضیه تالس (جزء به جزء) در مثلث ABC داریم:

$$\frac{x+3}{3x+9} = \frac{4}{x+4} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{4}{x+4} \Rightarrow x = 8$$

$$\xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{y}{6} = \frac{4}{16} \Rightarrow y = 15$$

و محیط چهارضلعی DECB برابر است با:

$$P = 15 + 12 + 6 + 3 = 36$$

۴۴- الف) می دانیم $MN \parallel BC$

است، پس در مثلث ABC، از رابطه تالس جزء به جزء مقدار X را به دست می آوریم:

$$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{x-2}{x+1} = \frac{x}{x+7}$$

$$\Rightarrow x^2 + x = x^2 + 4x - 21 \Rightarrow x = 7$$

$$AC = x + x + 7 = 21$$

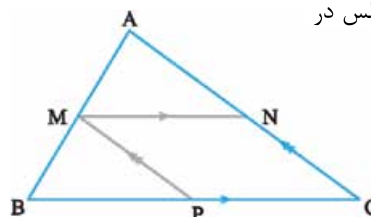
ب) چون اندازه یکی از اضلاع موازی را خواسته، از رابطه تعمیم تالس استفاده می کنیم:

$$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{x}{x+x+7} = \frac{MN}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{10}{BC} \Rightarrow BC = 30$$

۴۵- طبق تعمیم قضیه تالس در

مثلث ABC مقابل داریم:



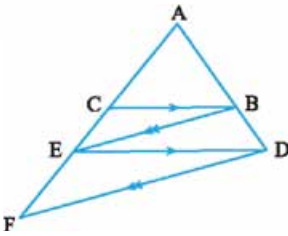
$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} \quad (1)$$

$$MP \parallel AC \Rightarrow \frac{MP}{AC} = \frac{MB}{AB} \quad (2)$$

حالا اگر دو طرف رابطه های (۱) و (۲) را با هم جمع کنیم، داریم:

$$\frac{MN}{BC} + \frac{MP}{AC} = \frac{AM}{AB} + \frac{MB}{AB} = \frac{AM+MB}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1$$

۴۶- مطابق شکل مقابل، با استفاده از قضیه تالس در دو مثلث ADE و ADF داریم:



$$\Delta ADE : BC \parallel DE \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD} \quad (1)$$

$$\Delta ADF : BE \parallel FD \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AD} \quad (2)$$

چون طرف دوم روابط (۱) و (۲) هم با هم برابرند می توانیم بنویسیم:

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow AE^2 = AC \times AF$$

یعنی AE واسطه هندسی بین AC و AF است.

۴۷- چون در مثلث AEB،

$CF \parallel AB$ و $AC \parallel DF$

EC واسطه هندسی ED و EB

است و داریم:

$$(EC)^2 = ED \times EB$$

$$\Rightarrow 5^2 = 3 \times (5+x) \Rightarrow x = \frac{10}{3}$$

حالا طبق تعمیم قضیه تالس در AEB داریم:

$$FC \parallel AB \Rightarrow \frac{EC}{EB} = \frac{FC}{y}$$

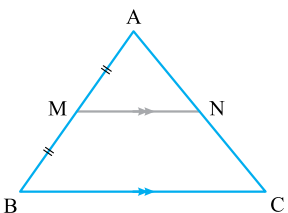
$$\Rightarrow y = \frac{\frac{25}{3} \times 5}{5} = \frac{25}{3}$$

۴۸- در مثلث ABC مقابل، M

را وسط AB در نظر گرفته و از

خطی موازی BC رسم می کنیم تا

AC را در N قطع کند، آن گاه:



$$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

$$\xrightarrow{AB=2AM} \frac{1}{2} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

چون $2AN = AC$ است و همچنین داریم

$$MN = \frac{1}{2} BC$$

برای اثبات این حکم، ابتدا قطر BD را رسم می‌کنیم. طبق عکس قضیه تالس در دوزنقه داریم:

$$\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow MN \parallel AB \parallel DC$$

از طرفی در دو مثلث ABD و BDC تعمیم تالس را می‌نویسیم:

$$\triangle ABD : MO \parallel AB \Rightarrow \frac{MD}{AD} = \frac{MO}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow MO = \frac{AB}{2} \quad (1)$$

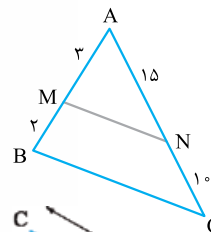
$$\triangle BCD : NO \parallel CD \Rightarrow \frac{BN}{BC} = \frac{NO}{DC} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow NO = \frac{DC}{2} \quad (2)$$

$$(1) + (2) = MO + NO = MN = \frac{AB + DC}{2}$$

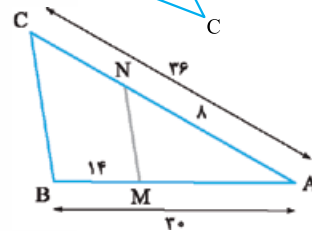
۴۹- باید طبق عکس قضیه تالس نسبت ضلع‌های متناظر برابر باشد، در نتیجه:

(الف)



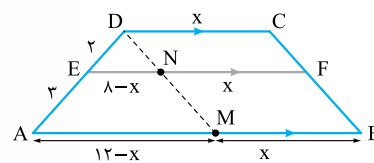
$$\frac{3}{2} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} \Rightarrow MN \parallel BC$$

(ب)



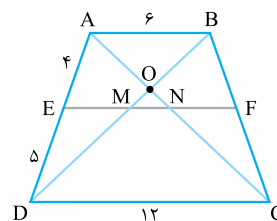
$$\frac{8}{9} = \frac{36}{36} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15} \Rightarrow MN \parallel BC$$

۵۰- برای حل این سؤال ابتدا از رأس D خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا AB را در M قطع کند، چون $DC \parallel MB$ و $DM \parallel CB$ است؛ پس DCBM متوازی‌الاضلاع است و داریم: $DC = NF = MB = x$ حالا قضیه تالس را در مثلث AMD می‌نویسیم:



$$\triangle AMD : EN \parallel AM \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{2}{5} = \frac{8-x}{12-x}$$

$$\Rightarrow 24 - 2x = 40 - 5x \Rightarrow x = \frac{16}{3}$$



۵۱- می‌دانیم در هر دوزنقه، قاعده‌ها با هم موازی‌اند، پس طبق اطلاعات مسئله داریم:

$$AB \parallel EF \parallel DC$$

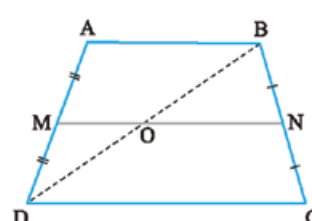
حالا طبق تعمیم تالس در مثلث‌های ADB و ADC داریم:

$$\triangle ADC : EN \parallel DC \Rightarrow \frac{4}{9} = \frac{EN}{12} \Rightarrow EN = \frac{16}{3}$$

$$\triangle ADB : EM \parallel AB \Rightarrow \frac{5}{9} = \frac{EM}{6} \Rightarrow EM = \frac{10}{3}$$

پس مقدار MN برابر است با:

$$MN = EN - EM = \frac{16}{3} - \frac{10}{3} = 2$$



۵۲- در دوزنقه ABCD زیر، MN از وسط ساق‌های BC و AD می‌گذرد:

$$MN \parallel AB, MN \parallel CD, MN = \frac{AB + CD}{2}$$