



کتاب آنلاین®

مرجع تخصصی عرضه آنلاین کتاب

مشاهده

چند صفحه

اول کتاب



## مقدمه ناشر

در مملکت ما از قدیم‌الایام تا به امروز مردم برای رشته تجربی سر و دست می‌شکوندن. چون از راه این رشته می‌تونن طبیب بشن و مطب بزبن و سری توی سرا در بیان. برای همین در مملکت ما از لحظه‌ای که بچه‌ای جیغ حیاتش رو می‌کشه بهش می‌گن: سلام دکتر جان! انگار انسان‌ها دو دسته‌اند: دکتر و هیچی! یعنی یا دکتر می‌شی یا هیچی نمی‌شی! این نوع تفکر باعث شده که در مملکت ما تعداد آدمایی که ستینگز (settings) کارخونه‌شون ریاضیه ولی می‌رن تجربی زیاد بشه.<sup>۱</sup> ندایی در ناخودآگاه این آدم‌ها هست که فریاد می‌زنه: «من ریاضی می‌خوام!!!!!!»

و البته این‌که توی مملکت ما خیلی چیزا افراط و تفریطیه گاهی هم چیز بدی نیست. مثلاً خدا رو شکر بچه‌های تجربی کمی افراطی ریاضی می‌خونن و این خبر خوبیه برای تجربی‌رفته‌های ریاضی‌دوستا و خلاصه این‌که در مملکت ما اگر رشته‌ات تجربیه و می‌خوای دکتر بشی باید خیلی خوب ریاضی و فیزیک بخونی (حتی گاهی بیشتر از ریاضیا!)

کتاب ماجراهای من و درسام ریاضی ۲ طوری نوشته شده که هم ریاضی رو خیلی راحت بفهمی و هم در امتحان‌های تشریحی خیلی راحت ۲۰ بگیری. چون خداوند مؤلف این کتاب رو برای خوب فهموندن ریاضی به بندگانش خلق کرده. جا داره همین‌جا به دکتر کوروش اسلامی بگم: کوروش جان ممنون که قبول کردی این کتاب رو تألیف کنی. مطمئنم که بچه‌های تجربی دعوات می‌کنن. در ضمن سپاس از همه دست‌اندرکاران تولید این کتاب از جمله خانم انسبه‌سادات میرجعفری که نیروی محرکه واحد تألیف کتابای ماجراست و ویراستاران خوبمون خانم مریم نظری، آقایان صادق محمدی و پیام ابراهیم‌نژاد و صد البته دوستان خستگی‌ناپذیرمون در واحد تولید. دست همتون درد نکنه.

شاد باشید از ته دل.

## مقدمه مؤلف

سلام

کتاب‌های ماجرا اولش قرار بود خیلی ماجراجویانه‌تر و جالب‌تر نوشته شوند. حتی توی جلسه‌هایی که در این باره داشتیم، بعضی‌ها می‌گفتند که متن کتاب ماجرا باید مثل یک داستان باشد، کلی پیشنهاد دیگر هم بود: کاریکاتور، جوک، انیمیشن و ... اما در عمل، کتاب‌های ماجرا این‌طور شدند که می‌بینید. علتش هم به نظرم کاملاً معلوم است؛ ماجرای هر کسی با هر کدام از درس‌هایش، یک ماجرای منحصر به فرد است. ممکن است من با درس ریاضی‌ام ماجرا داشته باشم، شما با درس فارسی‌تان و دیگری با هر درس دیگری، تازه ماجراهای هر کدام از ما با درس‌ها و معلم‌هایمان طیف خیلی وسیعی دارد: تراژدی، کمدی، اخلاق‌مدار، انگیزشی، سرگرم‌کننده و ...

خلاصه‌اش این که تصمیم گرفتیم متن کتاب ماجرا را به توضیح هر چه بهتر درس‌ها و طرح مجموعه‌ای از سؤال‌های خوب اختصاص دهیم. حالا بگذارید در مورد این کتاب برایتان بگویم:

شما که دانش‌آموز پایهٔ یازدهم رشتهٔ تجربی هستید باید بدانید که کتاب درسی‌تان نسبتاً پربار و پرکار است؛ یعنی این شما بید و یک کتاب درسی پرملات!

پس بهتر است از همین الآن (که البته نمی‌دانم کی و کجای سال تحصیلی است) همهٔ حرف و حدیث‌ها را بگذارید کنار و درس ریاضی را خوب و دقیق بخوانید.

سعی‌ام این بوده که بدون زیاده‌گویی، همه‌چیز را توضیح دهم و بعدش هم تمرین‌های لازم و کافی (یعنی نه کم‌تر و نه بیشتر) برای تسلط‌تان بنویسم. تا این جایش یعنی نوشتن کتاب، وظیفهٔ من بود، اما کار شما چیست؟ یا چه‌طور از این کتاب استفاده کنید: **۱** درس‌نامه‌ها را با صبر و حوصله بخوانید. به هر مثالی که رسیدید. اول سعی کنید خودتان حل کنید و بعد چه حل کردید و چه نه، جواب مثال را بخوانید و یاد بگیرید.

**۲** یک بار که درس‌نامه را خواندید، برگردید و سعی کنید مثال‌ها را خودتان حل کنید. یک کار خیلی خوب (و البته یک کم سخت!) که می‌توانید بکنید این است که در دور اول خواندن درس‌نامه، صورت مثال‌ها را در برگه‌های جداگانه‌ای بنویسید و بعد از تمام شدن درس‌نامه، مثال‌ها را بدون استفاده از کتاب حل کنید.

**۳** حالا بروید سراغ «سؤالات امتحانی»؛ علت این که اسم این قسمت را گذاشته‌ایم سؤالات امتحانی، این است که سؤالات این قسمت طوری طراحی شده‌اند که ممکن است نمونه‌شان را در هر آزمونی ببینید.

**۴** در آخر هر فصل یک آزمون منتخب از سؤال‌های امتحانی مدارس سراسر کشور آورده‌ایم، تا با حال و هوای انواع سؤال‌ها بیشتر آشنا شوید. از حل این سؤالات هم غفلت نکنید!

**۵** برای حل سؤال‌ها زمانتان را برنامه‌ریزی کنید. ممکن است تعداد سؤال‌های یک فصل برای یک بار حل کردن زیاد باشد، در این صورت سؤال‌ها را به چند قسمت تقسیم کنید و در زمان‌های مشخصی آن‌ها را حل کنید.

**۶** در فاصله‌های منظم و قبل از هر آزمون یا امتحان جدی، دوباره تمرین‌ها را حل کنید.

پیشنهاد می‌کنم هر ماجرای را که در مورد هر قسمت از درس‌های ریاضی مربوط به این کتاب (چه در خانه یا در کلاس) برایتان اتفاق می‌افتد بنویسید و برایمان بفرستید. ما این ماجراها را می‌خوانیم و آن‌هایی را که جالب‌تر باشند در کتاب سال آینده چاپ می‌کنیم.

تشخیص این جالب بودن هم با ماست. به هر حال با همین نوشتن‌هاست که چیزهایی که برای شما یا ما خاطره (ماجرا) است برای دیگران جوک می‌شود!

در پایان از خانم‌ها سمیرا هاشمی و مهشاد زاهدی که با تماس‌های خود در رفع اشکالات این کتاب در چاپ جدید ما را یاری کردند، بسیار تشکر می‌کنیم.

خندان و پیروز باشید.



۲۴	درسنامه ۶: معادله‌های گویا	۷
۲۶	درسنامه ۷: معادلات رادیکیالی	۱۰
۲۸	آزمون جمع‌بندی فصل اول	۱۴
۲۹	پاسخ سؤال‌های امتحانی	۱۶
۳۹	پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل اول	۱۸

فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر

درسنامه ۱: هندسه تحلیلی - یادآوری
درسنامه ۲: هندسه تحلیلی
درسنامه ۳: تابع درجه ۲ و معادله درجه دوم
درسنامه ۴: مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله درجه ۲
درسنامه ۵: ماکسیمم یا مینیمم سهمی

۶۳	درسنامه ۵: روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه	۴۴
۶۶	آزمون جمع‌بندی فصل دوم	۵۰
۶۸	پاسخ سؤال‌های امتحانی	۵۵
۷۶	پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل دوم	۵۹

فصل دوم: هندسه

درسنامه ۱: ترسیم‌های هندسی
درسنامه ۲: استدلال و نسبت
درسنامه ۳: قضیه تالس
درسنامه ۴: تشابه مثلث‌ها



۹۳	درسنامه ۵: اعمال روی تابع	۷۹
۹۹	آزمون جمع‌بندی فصل سوم	۸۴
۱۰۰	پاسخ سؤال‌های امتحانی	۸۷
۱۱۳	پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل سوم	۹۰

فصل سوم: تابع

درسنامه ۱: آشنایی با برخی از انواع توابع
درسنامه ۲: تابع جزء صحیح
درسنامه ۳: وارون تابع و تابع یک‌به‌یک
درسنامه ۴: به دست آوردن ضابطه تابع وارون

۱۴۳	آزمون جمع‌بندی فصل چهارم	۱۱۶
۱۴۴	پاسخ سؤال‌های امتحانی	۱۲۴
۱۵۳	پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل چهارم	۱۳۵

فصل چهارم: مثلثات

درسنامه ۱: واحدهای اندازه‌گیری زاویه
درسنامه ۲: روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی
درسنامه ۳: توابع مثلثاتی



۱۷۰	درسنامه ۵: نمودارها و کاربردهای توابع لگاریتمی و نمایی	۱۵۵
۱۷۵	آزمون جمع‌بندی فصل پنجم	۱۶۰
۱۷۶	پاسخ سؤال‌های امتحانی	۱۶۴
۱۸۵	پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل پنجم	۱۶۸

فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی

درسنامه ۱: تابع نمایی و ویژگی‌های آن
درسنامه ۲: تابع لگاریتمی
درسنامه ۳: ویژگی‌ها و قوانین لگاریتم
درسنامه ۴: معادله‌های لگاریتمی

۲۱۰	آزمون جمع‌بندی فصل ششم	۱۸۹
۲۱۱	پاسخ سؤال‌های امتحانی	۱۹۳
۲۲۴	پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل ششم	۲۰۱

فصل ششم: حد و پیوستگی

درسنامه ۱: فرایندهای حدی
درسنامه ۲: محاسبه حد تابع
درسنامه ۳: پیوستگی



۲۳۸	آزمون جمع‌بندی فصل هفتم	۲۲۶
۲۳۹	پاسخ سؤال‌های امتحانی	۲۳۱
۲۴۵	پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل هفتم	۲۳۳

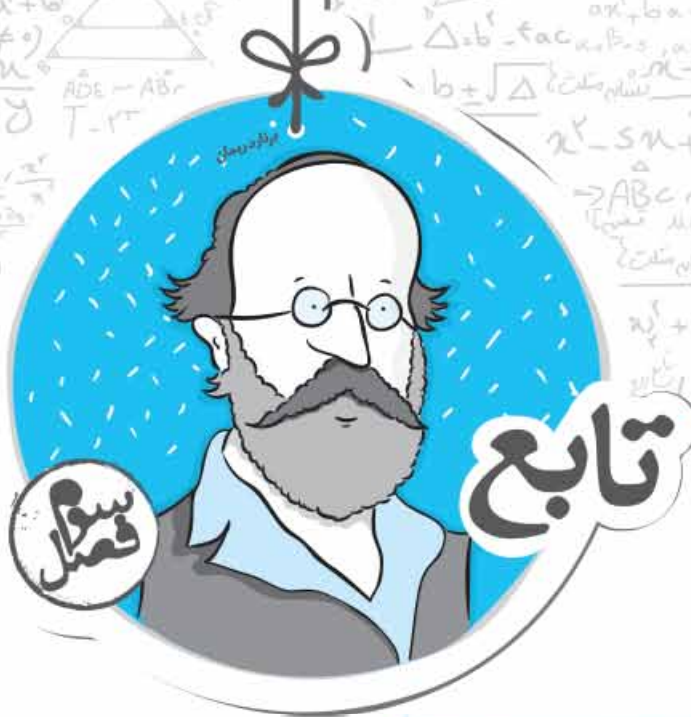
فصل هفتم: آمار و احتمال

درسنامه ۱: احتمال شرطی
درسنامه ۲: پیشامدهای مستقل
درسنامه ۳: آمار توصیفی

شماره صفحه امتحان

شماره صفحه پاسخ	شماره صفحه امتحان
۲۴۹	۲۴۷
۲۵۳	۲۵۱
۲۵۷	۲۵۵
۲۶۲	۲۶۰
۲۶۷	۲۶۵
۲۷۱	۲۶۹

امتحان شماره (۱): نمونه امتحان نیم‌سال اول
امتحان شماره (۲): نمونه امتحان نیم‌سال اول
امتحان شماره (۳): نمونه امتحان نیم‌سال دوم
امتحان شماره (۴): نمونه امتحان نیم‌سال دوم
امتحان شماره (۵): نمونه امتحان نیم‌سال دوم - نهایی خرداد ۱۴۰۲ (نوبت صبح)
امتحان شماره (۶): نمونه امتحان نیم‌سال دوم - نهایی خرداد ۱۴۰۲ (نوبت عصر)

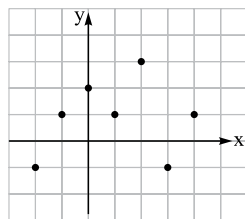


## آشنایی با برخی از انواع تابع

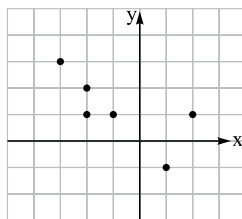
سال گذشته با مفهوم تابع آشنا شدیم. یادآوری

دیدیم: تابع مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است که در آن هیچ دو زوج مرتب متفاوتی مؤلفه‌های اول یکسان نداشته باشند. به بیان دیگر تابع، رابطه‌ای بین  $X$  و  $Y$  است که در آن به ازای هر مقدار  $X$  دقیقاً یک مقدار برای  $Y$  به دست آید. اگر نمودار یک تابع را در دستگاه مختصات رسم کنیم هر خط موازی محور  $Y$ ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

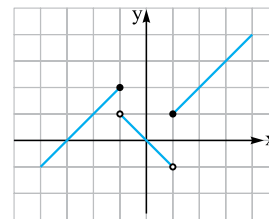
**مثال** کدامیک از نمودارهای زیر یک تابع را مشخص می‌کند؟



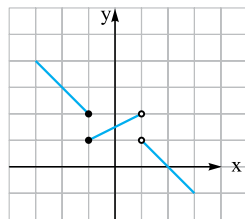
(الف)



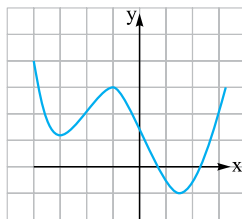
(ب)



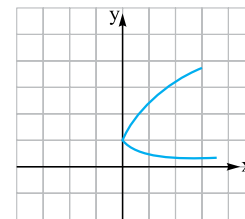
(پ)



(ت)



(ث)



(ج)

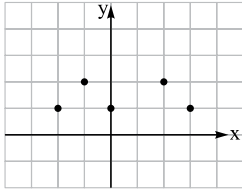
**پاسخ** طبق توضیحات بالا , , و تابع‌اند و بقیه تابع نیستند.

## دامنه

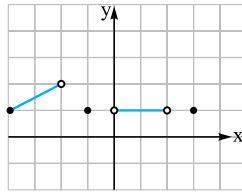
دامنه تابع مجموعه‌ای از مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب یا مجموعه  $X$ های تابع است. روی نمودار تابع نیز، مجموعه  $X$ های نقاط نمودار (یا همان تصویر نمودار روی محور  $X$ ها) نشان‌دهنده دامنه تابع است.

مثلاً در تابع  $f = \{(0, 2), (1, 3), (5, -3)\}$  دامنه برابر است با  $D_f = \{0, 1, 5\}$ .

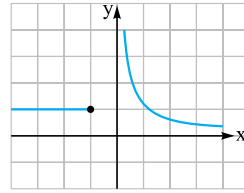
**مثال:** دامنه هر کدام از تابع‌های زیر را تعیین کنید.



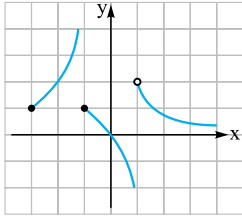
(الف)



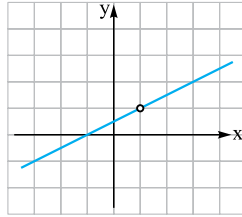
(ب)



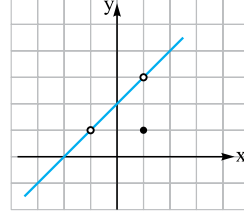
(پ)



(ت)



(ث)



(ج)

**پاسخ:** دامنه تابع شکل (الف) برابر مجموعه نقاط  $\{-2, -1, 0, 2, 3\}$  است. دقت کنید که دامنه (و نمودار) این تابع از نقاط مجزا تشکیل شده است. در شکل (ب) دامنه برابر است با  $(-4, -2) \cup \{-1\} \cup (0, 2) \cup \{3\}$ . در شکل (پ) دامنه برابر است با  $(-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$ . دقت کنید که وقتی نمودار تابع تا انتهای محور ادامه دارد منظورمان این است که دامنه تا  $+\infty$  یا  $-\infty$  می‌رود. در (ت) دامنه برابر است با  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ . دقت کنید که نقطه  $x = -1$  مقدار مشخصی ( $y = 1$ ) دارد و متعلق به دامنه تابع است. دامنه شکل (ث) برابر است با  $\mathbb{R} - \{1\}$ . و در آخر دامنه شکل (ج) برابر است با  $\mathbb{R} - \{-1\}$ . دقت کنید که با این که در  $x = 1$  یک نقطه توخالی داریم ولی چون تابع در  $x = 1$  تعریف شده است (و  $y$  اش برابر ۱ است) پس  $x = 1$  جزء دامنه تابع است.

### ضابطه تابع

رابطه‌ای که  $y$  را به  $x$  مرتبط می‌کند یا از آن مقدار  $y$  را برحسب  $x$  به دست می‌آوریم، ضابطه تابع است. هر تابع با ضابطه و دامنه‌اش مشخص می‌شود. یعنی برای مشخص بودن یک تابع باید همیشه ضابطه و دامنه‌اش را داشته باشیم. اگر در تابعی فقط ضابطه را داشته باشیم بنا به قرارداد دامنه را بزرگ‌ترین مجموعه ممکن برای تعریف شده بودن تابع در نظر می‌گیریم.

**مثال:** تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف)  $f(x) = 2x$

دامنه  $= \{-1, 0, 1, 2\}$

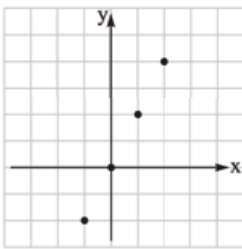
ب)  $f(x) = 2x$

دامنه  $= (-1, 2]$

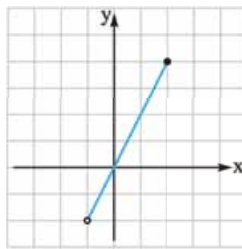
پ)  $f(x) = 2x$

دامنه  $= \mathbb{R}$

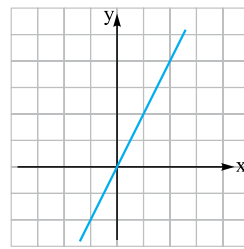
**پاسخ:** نمودار تابع تمام یا قسمتی از خط  $y = 2x$  است. فقط موقع رسم نمودار باید به دامنه توجه کنیم و نمودار را با توجه به دامنه رسم کنیم:



(الف)



(ب)



(پ)

### ضابطه تابع خطی

برای نوشتن ضابطه یک تابع خطی، اول شیب خط را با استفاده از مختصات دو نقطه از آن از رابطه  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  پیدا می‌کنیم و بعد معادله خط را با استفاده از رابطه  $y = mx + h$  یا  $(y - y_1) = m(x - x_1)$  می‌نویسیم. در این حالت هم باید دامنه تابع را مشخص کنیم.

### توابع گویا

به هر تابعی که ضابطه‌اش به شکل  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  نوشته می‌شود که در آن  $p(x)$  و  $q(x)$  چندجمله‌ای باشند می‌گوییم یک تابع گویا. در این تعریف دقت کنید:

۱  $q(x)$  باید مخالف صفر باشد (چرا؟)

۲  $q(x)$  می‌تواند برابر یک عدد ثابت (و در حالت خاص ۱) باشد؛ یعنی به عنوان مثال سه تابع  $f(x) = 3$  و  $f(x) = 3x$  و  $f(x) = \frac{3}{x}$  هر سه گویا هستند.





**مثال:** کدام یک از ضابطه‌های زیر متعلق به یک تابع گویا است؟

الف)  $f(x) = \sqrt{2}$

ب)  $f(x) = \sqrt{3x}$

پ)  $f(x) = \sqrt{3x}$

ت)  $f(x) = \frac{2x}{x+1}$

ث)  $f(x) = \frac{3x^2+1}{\sqrt{2}-1}$

ج)  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x+1}$

چ)  $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + \frac{1}{2}x - 1}}{2x^2 - x + \sqrt{3}}$

ح)  $f(x) = \frac{2x - \frac{1}{x+1}}{3x + \frac{1}{x}}$

خ)  $f(x) = 2|x| + 1$

**پاسخ:** در هر کدام که بتوانیم تابع را به صورت  $\frac{p(x)}{q(x)}$  بنویسیم که در  $p(x)$  و  $q(x)$  توان  $x$  اعداد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد، تابع گویا است. با این حساب **الف**، **ب**، **ت**، **ث**، **ج** و **ح** گویا هستند ولی **پ** (چون توان  $x$  برابر  $\frac{1}{2}$  است) و **خ** (توان  $x$  صورت برابر  $\frac{1}{3}$  است) و **د** (داخل قدرمطلق است) گویا نیستند.

### دامنه توابع گویا

دیدیم ضابطه توابع گویا به صورت کسری است، پس تابع در هر نقطه‌ای که مخرج کسر برابر صفر شود تعریف نشده است. یعنی برای پیدا کردن دامنه یک تابع گویا مخرج کسر را برابر صفر قرار می‌دهیم و بعد دامنه را به صورت {ریشه‌های مخرج} -  $\mathbb{R}$  می‌نویسیم. مثلاً برای پیدا کردن دامنه تابع

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$$

عبارت مخرج یعنی  $x-2=0 \Rightarrow x=2$  پس دامنه برابر است با  $\mathbb{R} - \{2\}$ .

**توجه:** دقت کنید که قبل از پیدا کردن دامنه تابع، نباید ضابطه تابع را ساده کنیم. مثلاً در تابع  $f(x) = \frac{2x-6}{x-3}$  دامنه برابر است با  $\mathbb{R} - \{3\}$ . چون ریشه مخرج  $x=3$  است و اگر تابع را به صورت  $f(x) = 2 \Rightarrow f(x) = 2$  ساده کنیم، دامنه این تابع جدید می‌شود  $\mathbb{R}$  که درست نیست.

**مثال:** دامنه توابع زیر را پیدا کنید.

الف)  $f(x) = \frac{2x-3}{x-2}$

ب)  $f(x) = \frac{x^2+3}{(x-1)(x+2)}$

پ)  $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$

ت)  $f(x) = \frac{2x-6}{x^2-7x+12}$

ث)  $f(x) = \frac{x+3}{x^2+2x+3}$

ج)  $f(x) = \frac{2x^2-x}{x^3-x^2-2x}$

**پاسخ:** در هر کدام مخرج را برابر صفر قرار می‌دهیم و ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم:

**الف**  $f(x) = \frac{2x-3}{x-2}$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

**ب**  $f(x) = \frac{x^2+3}{(x-1)(x+2)}$

$$(x-1)(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{1, -2\}$$

**پ**  $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$

$$x^2-9=0 \Rightarrow (x-3)(x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{3, -3\}$$

**ت**  $f(x) = \frac{2x-6}{x^2-7x+12}$

$$x^2-7x+12=0 \Rightarrow (x-3)(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=4 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{3, 4\}$$

**ث**  $f(x) = \frac{x+3}{x^2+2x+3}$

$$x^2+2x+3=0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2} \Rightarrow \text{ریشه ندارد} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

**ج**  $f(x) = \frac{2x^2-x}{x^3-x^2-2x}$

$$x^3-x^2-2x=0 \Rightarrow x(x^2-x-2)=0 \Rightarrow x(x-2)(x+1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \\ x=-1 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0, 2, -1\}$$

### تساوی دو تابع

دو تابع  $f$  و  $g$  با هم مساوی اند اگر: **۱** دامنه‌هایشان با هم برابر باشد. **۲** به ازای  $x$ های یکسان،  $f(x)$ ها و  $g(x)$ ها یکسان باشند که معمولاً شرط دوم به این منجر می‌شود که ضابطه دو تابع به ازای اعضای دامنه با هم برابر باشند. نمودار دو تابع مساوی دقیقاً روی هم منطبق می‌شوند.

**مثال** تعیین کنید کدام جفت از تابع‌های زیر با هم مساوی‌اند؟

الف)  $f(x) = 3x$  ،  $g(x) = \frac{3x^2}{x}$

ب)  $f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + 1}$  ،  $g(x) = x$

پ)  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$  ،  $g(x) = \frac{x}{|x|}$

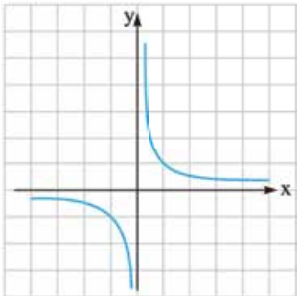
پس دو تابع مساوی نیستند  $\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$  ،  $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$

**پاسخ**

ب)  $f(x) = \frac{x(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = x$  ،  $g(x) = x$  ،  $D_f = \mathbb{R}$  ،  $D_g = \mathbb{R}$  دو تابع مساوی‌اند

پ)  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \frac{|x|}{x} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$  ،  $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$   
 $g(x) = \frac{x}{|x|} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$  ،  $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$  }  $\Rightarrow$  دو تابع مساوی‌اند

### رسم توابع گویا

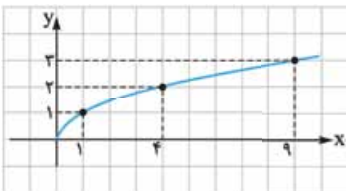


نمودار تابع‌های گویای ساده را می‌توانیم با استفاده از نقطه‌یابی رسم کنیم. بیایید با هم نمودار تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  را ببینیم:

نمودار تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  نه محور عرض‌ها را قطع می‌کند و نه محور طول‌ها را. دامنهٔ تابع  $\mathbb{R} - \{0\}$  است. (برد این تابع هم  $\mathbb{R} - \{0\}$  است)

در تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  در محدودهٔ  $x > 0$  با افزایش مقدار  $x$ ، مقدار  $y$  کاهش می‌یابد و همین‌طور در محدودهٔ  $x < 0$  هم با افزایش مقدار  $x$ ، مقدار  $y$  کاهش می‌یابد.

### رسم توابع رادیکالی



نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  را می‌توانیم با نقطه‌یابی رسم کنیم.

دامنه و برد تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  برابر بازهٔ  $[0, +\infty)$  است.

نمودار تابع‌های به شکل  $f(x) = \sqrt{x-a} + b$  را می‌توانیم با انتقال نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  (که در سال قبل یاد گرفتیم) رسم کنیم.

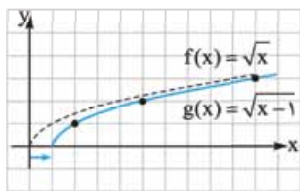
**مثال** نمودار تابع‌های زیر را با استفاده از انتقال نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  رسم کنید و سپس دامنه و برد هر کدام را بنویسید.

الف)  $g(x) = \sqrt{x-1}$

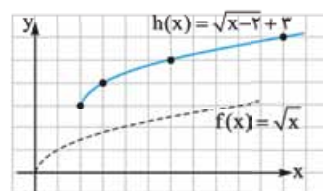
ب)  $h(x) = \sqrt{x-2} + 3$

برای رسم  $g(x)$  کافی است نمودار تابع  $f(x)$  را یک واحد در راستای محور  $x$  انتقال دهیم و برای رسم  $h(x)$  باید نمودار

تابع  $f(x)$  را ۲ واحد در راستای محور  $x$ ‌ها و ۳ واحد در راستای محور  $y$ ‌ها انتقال دهیم.



دامنهٔ تابع  $g(x) = \sqrt{x-1}$  بازهٔ  $[1, +\infty)$  و برد آن بازهٔ  $[0, +\infty)$  است.



دامنهٔ تابع  $h(x) = \sqrt{x-2} + 3$  بازهٔ  $[2, +\infty)$  و برد آن بازهٔ  $[3, +\infty)$  است.



# سؤال‌های امتحانی

جاهای خالی را پر کنید.

۱- دامنهٔ یک تابع گویا برابر است با .....

۲- دو تابع  $f$  و  $g$  وقتی با هم مساوی‌اند که ... (۱)... و ... (۲)...

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

نادرست      درست



۳- دو تابع  $f(x) = \frac{x}{|x|}$  و  $g(x) = \frac{|x|}{x}$  با هم مساوی‌اند.

۴- دو تابع  $f(x) = \frac{x^2}{|x|}$  و  $g(x) = |x|$  با هم مساوی‌اند.

۵- یک بازیکن فوتبال ده پنالتی زده و ۶۰ درصد آن‌ها را گل کرده است. اگر این بازیکن بتواند تمام پنالتی‌هایی که از این به بعد می‌زند را گل کند:

(الف) ضابطهٔ تابعی را که نشان‌دهندهٔ درصد پنالتی‌های گل شده بعد از زدن  $x$  پنالتی دیگر است، بنویسید.

(ب) او حداقل چند پنالتی دیگر باید بزند تا درصد گل شدن پنالتی‌هایش بالاتر از ۹۵ درصد باشد؟

کدام‌یک از ضابطه‌های زیر متعلق به یک تابع گویا است؟

۶-  $f(x) = \frac{2x^2 - x + 3}{x - \sqrt{2}}$

۷-  $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x-1}}$

۸-  $f(x) = \frac{x + \frac{1}{x}}{x^2 - \frac{1}{x}}$

۹-  $f(x) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{x+1}$

۱۰-  $f(x) = \frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x}$

۱۱-  $f(x) = \left(\frac{\sqrt{x}}{x-1}\right)^2$

دامنهٔ تابع‌های زیر را پیدا کنید.

۱۲-  $f(x) = \frac{2x+1}{2x^2+x-1}$

۱۳-  $f(x) = \frac{x+3}{x+1} - \frac{x+1}{x+3}$

۱۴-  $f(x) = \frac{1}{x^2-x}$

۱۵-  $f(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x-1}-1}$

۱۶-  $f(x) = \frac{1}{\frac{x-2}{x+1}}$

۱۷-  $f(x) = \frac{x}{x^4 - 5x^2 + 4}$

۱۸- ضابطهٔ تابع گویایی را بنویسید که دامنه‌اش مجموعه‌های زیر باشد.

(الف)  $\mathbb{R}$

(ب)  $\mathbb{R} - \{-1\}$

(پ)  $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

(ت)  $\mathbb{R} - \{0, 1, -1\}$

نمودار تابع‌های زیر را در بازه‌های داده‌شده رسم کنید.

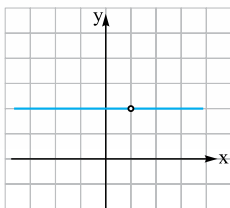
۱۹-  $f(x) = \frac{1}{|x|}$   $[-3, 3]$

۲۰-  $f(x) = \frac{1}{x-3}$   $[-1, 7]$

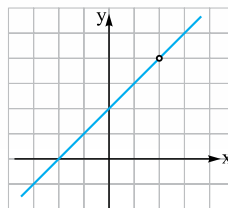
۲۱-  $f(x) = -\frac{4}{x}$   $[-8, 8]$

۲۲-  $f(x) = \frac{2}{x}$   $[-4, 4]$

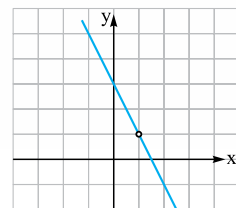
۲۳- ضابطهٔ تابع گویایی را بنویسید که نمودارش در زیر داده شده است.



(الف)



(ب)



(پ)

دامنهٔ تابع‌های زیر را پیدا کنید.

۲۴-  $f(x) = \sqrt{x-3} + 3$

۲۵-  $f(x) = \sqrt{x+2} - 1$

۲۶-  $f(x) = \sqrt{4-x} + 1$

۲۷-  $f(x) = \sqrt{-5-x}$

نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

۲۸-  $f(x) = \sqrt{x+2} + 1$

۲۹-  $f(x) = \sqrt{x-3} - 2$

(نوبتی فردار ۱۴۰۲)

 ۳۰- نمودار تابع  $f(x) = 1 - \sqrt{x-3}$  را با استفاده از انتقال نمودار  $y = \sqrt{x}$  رسم کنید. دامنه و برد آن را مشخص کنید.

کدام یک از جفت تابع‌های زیر با هم مساوی‌اند؟

۳۱-  $f(x) = \frac{x^4-1}{x^2-1}$ ,  $g(x) = x^2+1$

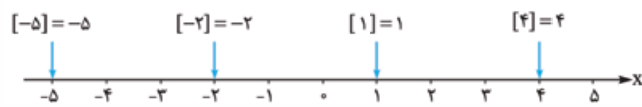
۳۲-  $f(x) = \frac{x^4-1}{x^2+1}$ ,  $g(x) = x^2-1$

۳۳-  $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x-1}$ ,  $g(x) = \frac{x^2-3x^2+3x-1}{x^2-2x+1}$

 ۳۴- اگر دو تابع زیر با هم برابر باشند، مقادیر  $a$  و  $b$  را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & x \neq a \\ b-1 & x = a \end{cases} \text{ و } g(x) = x+2$$

## تابع جزء صحیح

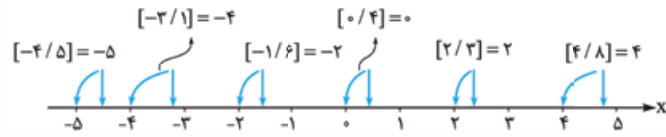

 جزء صحیح هر عدد مثل  $x$  که آن را با  $[x]$  نشان می‌دهیم برابر است با بزرگ‌ترین عدد صحیحی که کوچک‌تر یا مساوی آن عدد باشد. با این تعریف


نتیجه می‌گیریم:

اگر عددی صحیح باشد، جزء صحیحش برابر خودش است.

اگر عددی صحیح نباشد، جزء صحیحش برابر اولین عدد صحیح

سمت چپش روی محور اعداد است.


 اگر  $k$  عددی صحیح باشد داریم  $[x+k] = [x] + k$ 
**مثال:** مقدار جزء صحیح‌های زیر را پیدا کنید.

الف) $[-\infty / 4]$	ب) $[0 / \infty]$	پ) $[\frac{6}{5}]$	ت) $[-\frac{17}{4}]$
ث) $[\pi]$	ج) $[\tan 60^\circ]$	چ) $[8 \cos 45^\circ]$	ح) $[-\frac{\pi}{4}]$
خ) $[\sin 30^\circ]$	د) $[-238 / 26]$	ذ) $[3\frac{4}{7}]$	ر) $[-(7\frac{11}{15})]$

**پاسخ:** طبق آن چه دیدید، داریم:

الف) -۱	ب) ۰	پ) ۱	ت) -۴
ب) ۱ (چون $\frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$ )	ج) -۵	چ) ۸	ح) $-\frac{17}{4}$ (چون $-\frac{17}{4} = -4\frac{1}{4}$ )
ث) ۳ (چون $\pi = 3\frac{14}{14}$ )	د) ۱	ذ) ۳	ر) $-\frac{11}{15}$ (چون $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ )
خ) ۵ (چون $8 \cos 45^\circ = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} \approx 5\frac{6}{7}$ )	پ) -۲	ر) -۲۳۹	ح) $-\frac{\pi}{4}$ (چون $-\frac{\pi}{4} = -1\frac{57}{57}$ )
ث) ۰ (چون $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ )	د) -۲۳۹	ذ) -۸	ر) $-\frac{11}{15}$ (چون $-(7\frac{11}{15}) = -7\frac{11}{15}$ )
خ) ۳ (چون $3\frac{4}{7} = 3 + \frac{4}{7}$ )	پ) -۲	ر) -۸	ر) $-\frac{11}{15}$ (چون $-(7\frac{11}{15}) = -7\frac{11}{15}$ )

## تابع جزء صحیح

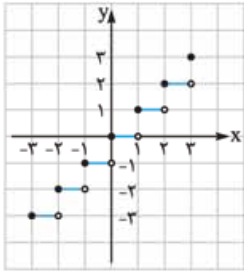
 به تابع  $f(x) = [x]$  می‌گوییم تابع جزء صحیح، دامنه این تابع برابر  $\mathbb{R}$  است.

تابع جزء صحیح یک تابع پله‌ای است، یعنی می‌توان دامنه‌اش را به صورت بازه‌های مجزایی نوشت که به اعداد متعلق به هر کدام از این بازه‌ها فقط

 یک عدد (در برد تابع) نسبت داده می‌شود. مثلاً در مورد تابع جزء صحیح یعنی  $f(x) = [x]$  در بازه  $[-3, 3]$  می‌توانیم بنویسیم:

$-3 \leq x < -2 \Rightarrow f(x) = [x] = -3$	$-2 \leq x < -1 \Rightarrow f(x) = [x] = -2$
$-1 \leq x < 0 \Rightarrow f(x) = [x] = -1$	$0 \leq x < 1 \Rightarrow f(x) = [x] = 0$
$1 \leq x < 2 \Rightarrow f(x) = [x] = 1$	$2 \leq x < 3 \Rightarrow f(x) = [x] = 2$
$x = 3 \Rightarrow f(x) = [x] = 3$	

حالا برای رسم تابع نقاط ابتدایی و انتهایی هر کدام از بازه‌ها را رسم و با یک پاره خط افقی به هم وصل می‌کنیم. دقت کنید نقاطی را که متعلق به Xهای دارای مساوی هستند، توپر و نقاطی را که متعلق به Xهای بدون علامت مساوی هستند توخالی رسم می‌کنیم:



از همین روش می‌توانیم برای رسم نمودار توابع ساده شامل  $[X]$  استفاده کنیم.

**مثال** نمودار تابع‌های زیر را در بازه  $[-2, 2]$  رسم کنید.

الف)  $f(x) = [x] + 1$

ب)  $f(x) = x[x] - 1$

**پاسخ** بازه  $[-2, 2]$  را به بازه‌های  $-2 \leq x < -1$  و  $-1 \leq x < 0$  و  $0 \leq x < 1$  و  $1 \leq x < 2$  و نقطه  $x = 2$  تقسیم می‌کنیم و در هر کدام ابتدا ضابطه تابع را با قراردادن مقدار جزء صحیح ساده می‌کنیم و بعد مختصات دو نقطه ابتدا و انتهای هر بازه را مشخص می‌کنیم.

**الف**  $f(x) = [x] + 1$

$-2 \leq x < -1 \Rightarrow f(x) = [x] + 1 = -2 + 1 = -1$

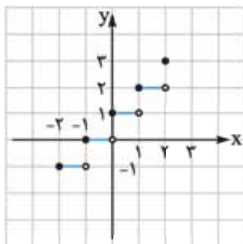
$-1 \leq x < 0 \Rightarrow f(x) = [x] + 1 = -1 + 1 = 0$

$0 \leq x < 1 \Rightarrow f(x) = [x] + 1 = 0 + 1 = 1$

$1 \leq x < 2 \Rightarrow f(x) = [x] + 1 = 1 + 1 = 2$

$x = 2 \Rightarrow f(x) = [x] + 1 = 2 + 1 = 3$

توپر	توخالی
-2	-1
-1	-1
-1	0
0	0
0	1
1	1
1	2
2	2
2	3
3	



حالا نقاط را مشخص و نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

**ب**  $f(x) = x[x] - 1$

$-2 \leq x < -1 \Rightarrow f(x) = x[x] - 1 = -2x - 1$

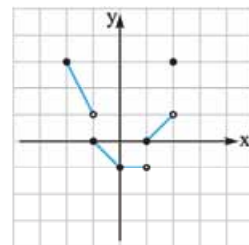
$-1 \leq x < 0 \Rightarrow f(x) = x[x] - 1 = -x - 1$

$0 \leq x < 1 \Rightarrow f(x) = x[x] - 1 = -1$

$1 \leq x < 2 \Rightarrow f(x) = x[x] - 1 = x - 1$

$x = 2 \Rightarrow f(x) = x[x] - 1 = 3$

توپر	توخالی
-2	-1
3	1
-1	0
0	-1
0	1
-1	-1
1	2
0	1
2	
3	





بیاید یک مثال دیگر هم ببینیم:

**مثال** نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$y = [2x] \quad [-1, 1]$$

**پاسخ** اول حدود تغییرات  $2x$  را با توجه به بازه داده شده پیدا می‌کنیم:

$$-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2x \leq 2$$

حالا بازه  $-2 \leq 2x \leq 2$  را به بازه‌هایی به طول ۱ واحد تقسیم می‌کنیم. در هر قسمت مقدار جزء صحیح و اول و آخر بازه (برحسب  $x$ ) و نقاط اول و آخر بازه را تعیین می‌کنیم:

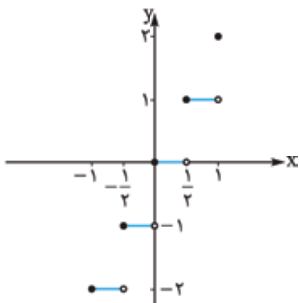
$$-2 \leq 2x < -1 \Rightarrow y = -2 \quad \text{و} \quad -1 \leq x < -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases} \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ -2 \end{cases}$$

$$-1 \leq 2x < 0 \Rightarrow y = -1 \quad \text{و} \quad -\frac{1}{2} \leq x < 0 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{cases} \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases}$$

$$0 \leq 2x < 1 \Rightarrow y = 0 \quad \text{و} \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{2} \\ 0 \end{cases}$$

$$1 \leq 2x < 2 \Rightarrow y = 1 \quad \text{و} \quad \frac{1}{2} \leq x < 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \\ 1 \end{cases} \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases}$$

$$2x = 2 \Rightarrow y = 2 \quad \text{و} \quad x = 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$



حالا نمودار را با رسم پاره‌خط‌های هر قسمت رسم می‌کنیم. (نقاط اول بازه که مساوی دارند توپر و نقاط آخر بازه که مساوی ندارند تو خالی رسم می‌شوند).

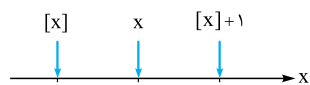
### ویژگی‌های تابع جزء صحیح

تابع جزء صحیح ویژگی‌های زیادی دارد. بهتر است چندتايشان را که مهم است بدانید:

۱ برای هر عدد حقیقی  $x$  داریم  $[x] \leq x < [x] + 1$

این ویژگی از تعریف مستقیم جزء صحیح به دست می‌آید:

مثلاً:  $[2] \leq 2 < 3$  یا  $[2/5] \leq 2/5 < [2/5] + 1 \Rightarrow 2 \leq 2/5 < 3$



۲ هر عدد صحیح را که به صورت جمع یا تفریق داخل جزء صحیح باشد می‌توانیم بیرون بیاوریم؛ یعنی اگر  $k \in \mathbb{Z}$  باشد داریم  $[x+k] = [x] + k$ .

مثلاً  $[x-2] = [x] - 2$  یا  $[x+1] = [x] + 1$ .

۳ همیشه تفاضل هر عدد و جزء صحیحش، عددی بین صفر و ۱ است؛ یعنی  $0 \leq x - [x] < 1$

مثلاً:  $-3/4 - [-3/4] = -3/4 - (-4) = 0/6 \Rightarrow 0 < 0/6 < 1$  یا  $2/5 - [2/5] = 2/5 - 2 = 0/5 \Rightarrow 0 < 0/5 < 1$

۴ حاصل  $[x] + [-x]$  (یعنی جزء صحیح هر عدد به علاوه جزء صحیح قرینه آن عدد) یا برابر صفر است یا برابر  $-1$ ، اگر  $x$  صحیح باشد، حاصل برابر

صفر است و اگر  $x$  صحیح نباشد، حاصل برابر  $-1$  است؛ یعنی:  $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] + [-x] = 0$  یا  $x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [x] + [-x] = -1$

از این ویژگی می‌توانیم برای پیدا کردن جواب معادله‌هایی به صورت  $[x] + [-x] = a$  استفاده کنیم. مثلاً:

همه اعداد صحیح = مجموعه جواب یا  $[x] + [-x] = 0 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$

همه اعداد غیر صحیح = مجموعه جواب یا  $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$  یا  $[x] + [-x] = -1 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$

جواب ندارد  $[x] + [-x] = 1 \Rightarrow$

# سؤال‌های امتحانی

جاهای خالی را پر کنید.

۳۵- جزء صحیح هر عدد حقیقی برابر است با ..... عدد صحیحی که ..... یا مساوی آن عدد باشد.

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

درست نادرست

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

۳۶- اگر  $k$  یک عدد صحیح باشد،  $[x+k] = [x] + k$ .

۳۷- اگر  $k$  یک عدد صحیح باشد،  $[k-x] = k - [x]$ .

۳۸- اگر  $k$  یک عدد صحیح باشد،  $[kx] = k[x]$ .

۳۹- برد تابع  $f(x) = [x]$  کدام است؟

(۴) اعداد صحیح

(۳) اعداد طبیعی

(۲) اعداد گویا

(۱) اعداد حقیقی

۴۰- اعضای یک تیم والیبال قرار است به یک مسافرت تفریحی بروند. مربی تیم برای آن که بتواند وضعیت جسمی بازیکنان را کنترل کند با آن‌ها قرار می‌گذارد که بعد از برگشتن به ازای هر کیلو اضافه‌وزن جریمه بدهند. جدول جریمه‌ها به صورت زیر است:

اضافه‌وزن به کیلوگرم	تا ۱	از ۱ تا ۲	از ۲ تا ۳	از ۳ تا ۵	از ۵ به بالا
جریمه به تومان	۱۰ هزار	۳۰ هزار	۶۰ هزار	۱۰۰ هزار	۵۰۰ هزار

الف) ضابطه تابع جریمه را بر حسب  $x$  کیلوگرم اضافه‌وزن بنویسید.

ب) نمودار تابع جریمه را رسم کنید.

۴۱- مقدار جزء صحیح‌های زیر را تعیین کنید.

الف)  $[0/99]$

ب)  $[-0/99]$

پ)  $[\sqrt{10}]$

ت)  $[\sqrt[3]{100}]$

ث)  $[(17/2)^2]$

ج)  $[(10/1)^3]$

چ)  $[8/9 \times 9/1]$

ح)  $[2/01 \times 2/02]$

۴۲- دامنه تابع  $f(x) = \frac{3}{[x]-1}$  را تعیین کنید.

۴۳- حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف)  $[\frac{6}{1}] + [\frac{6}{2}] + [\frac{6}{3}] + \dots + [\frac{6}{600}]$

ب)  $[10^4] + [10^3] + [10^2] + \dots + [10^0]$

۴۴- اگر  $[x] = [y]$  باشد محدوده تغییرات  $|x-y|$  را تعیین کنید.

۴۵- اگر  $[x]^2 - [x] = 0$  باشد، حدود  $x$  را پیدا کنید.

نمودار تابع‌های زیر را در بازه‌های داده‌شده رسم کنید.

۴۶-  $f(x) = [x-2]$  ,  $[-2, 2]$

۴۷-  $f(x) = x - [x]$  ,  $[-2, 3]$

۴۸-  $f(x) = x + [x]$  ,  $[-2, 2]$

۴۹- نمودار تابع  $y = x[-2x] + 1$  را در بازه  $[-2, 0]$  رسم کنید.

## ۳ وارون تابع و تابع یک‌به‌یک

در سال گذشته دیدیم که یکی از روش‌های نمایش تابع، استفاده از زوج مرتب است. حالا اگر تابعی مانند  $f$  با مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب داشته باشیم، جای مؤلفه‌های اول و دوم هر کدام از زوج مرتب‌ها را جابه‌جا کنیم، رابطه‌ای به دست می‌آید که به آن می‌گوییم وارون تابع  $f$  و آن را با  $f^{-1}$  نشان می‌دهیم.

**مثال** وارون تابع‌های زیر را بنویسید و بگویید وارون کدام یک از این تابع‌ها، خودش هم تابع است؟

الف)  $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, -1), (4, 1)\}$

ب)  $g = \{(1, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 3)\}$

پ)  $h = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4)\}$

الف)  $f^{-1} = \{(2, 1), (5, 2), (-1, 3), (1, 4)\}$

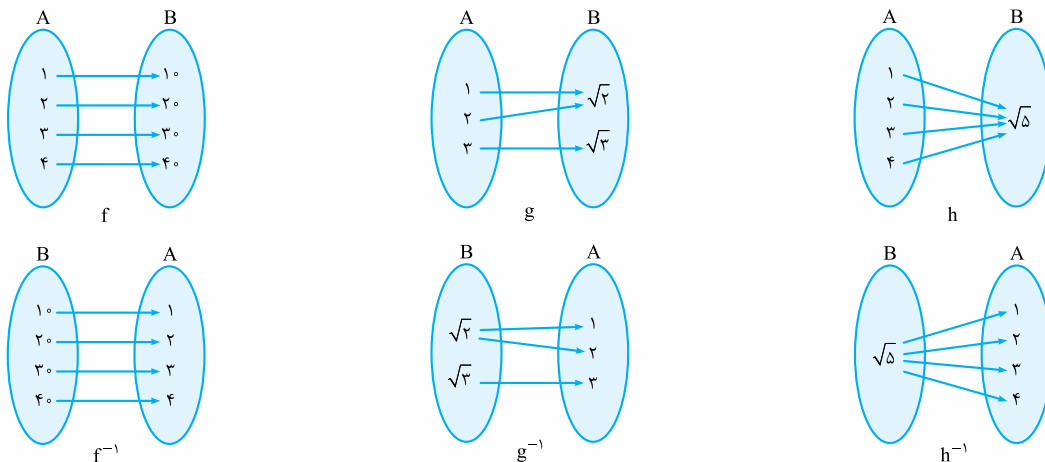
**پاسخ** کافی است جای مؤلفه‌های اول و دوم زوج‌های مرتب را عوض کنیم:

ب)  $g^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (2, 3), (3, 4)\}$

پ)  $h^{-1} = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$

از بین سه رابطه نوشته‌شده فقط  $f^{-1}$  تابع است ولی  $g^{-1}$  و  $h^{-1}$  تابع نیستند چون دارای زوج مرتب‌هایی هستند که مؤلفه‌های اول یکسان و مؤلفه‌های دوم متفاوت دارند.

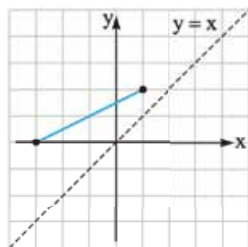
در نمودار پیکانی برای نوشتن رابطه وارون کافی است جهت پیکان را عوض کنیم یا جای مجموعه اول و دوم را عوض کنیم:



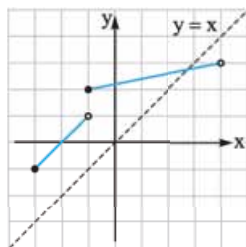
همان طور که می بینید در سه شکل بالا  $f$  و  $f^{-1}$  هر دو تابع اند اما  $g^{-1}$  و  $h^{-1}$  تابع نیستند.

برای رسم نمودار وارون یک تابع باید جای  $X$  و  $Y$  های نقاط روی نمودار را عوض کنیم؛ یعنی قرینه نمودار را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم مختصات رسم کنیم.

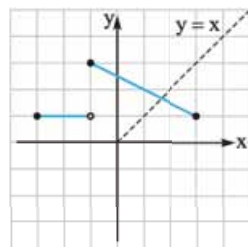
#### مثال: نمودار وارون تابع های زیر را رسم کنید و بگویید وارون کدامها تابع است؟



(الف)

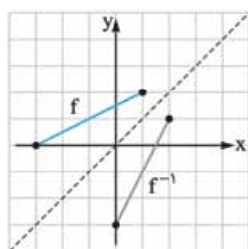


(ب)

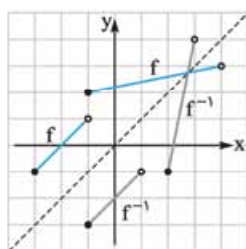


(پ)

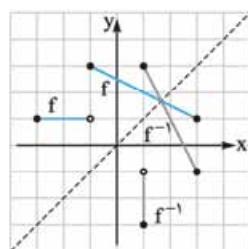
**پاسخ:** کافی است قرینه نمودارها را نسبت به خط نیمساز ناحیه اول و سوم ( $y = x$ ) رسم کنیم:



الف



ب



پ

از بین نمودارهای بالا وارون تابع  $f$  در شکل های **الف** و **ب** تابع است اما وارون تابع  $f$  در شکل **پ**، تابع نیست.

### تابع یک به یک

دیدیم که بعضی از تابعها وارونشان هم تابع است و بعضی نه. به تابعهایی که وارونشان هم یک تابع است می گوییم تابعهای یک به یک.

**تابع یک به یک** تابعی است که در آن به هر عضو دامنه فقط یک عضو منحصر به فرد از برد تابع نسبت داده شود:

مثلاً در شکل بالا  $f$  و  $g$  هر دو تابع اند و  $f$  یک به یک است، اما  $g$  یک به یک نیست چون به اعضای ۲ و ۳ از دامنه  $g$ ، یک عضو یکسان (یعنی ۲) از برد  $g$  نسبت داده شده است.

به بیان دیگر اگر تابعی یک به یک باشد در ضابطه تابع به ازای هر  $x$  دقیقاً یک  $y$  داریم و به ازای هر  $y$  هم دقیقاً یک  $x$  داریم.

برای بررسی یک به یک بودن یک تابع از روی نمودار آن، خطوطی موازی محور  $x$ ها رسم می کنیم. اگر هر خط موازی محور  $x$ ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، تابع یک به یک است.

به تابعهایی که وارونشان هم تابع است می گوییم **تابع وارون پذیر**. شرط وارون پذیر بودن یک تابع، یک به یک بودن آن است.



**مثال:** کدام یک از تابع‌های زیر یک‌به‌یک است؟

الف)  $f = \{(1, 2), (2, \sqrt{2}), (3, \sqrt[3]{2}), (4, \sqrt[4]{2})\}$

ب)  $g = \{(1, 2), (2, \sqrt[3]{4}), (3, \sqrt[3]{8}), (4, \sqrt[3]{16})\}$

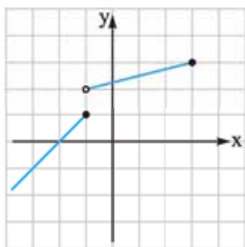
پ)  $h = \{(1, \sin 3^\circ), (2, \sin 6^\circ), (3, \cos 45^\circ), (4, \cos 6^\circ)\}$

**پاسخ:**  $f$  یک‌به‌یک است زیرا تمام مؤلفه‌های دوم زوج مرتبها (با  $Y$ ها) با هم متفاوت‌اند.  $g$  یک‌به‌یک نیست چون  $\sqrt[3]{8} = 2$  است و در دو زوج مرتب  $(1, 2)$  و  $(3, 2)$  دو  $Y$  یکسان داریم.  $h$  یک‌به‌یک نیست چون  $\sin 3^\circ = \frac{1}{2}$  و  $\cos 6^\circ = \frac{1}{2}$  پس در دو زوج مرتب  $(1, \frac{1}{2})$  و  $(4, \frac{1}{2})$  دو  $Y$  یکسان داریم.

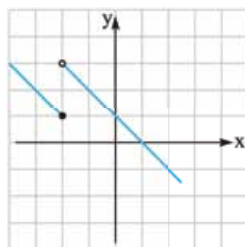
**مثال:** مقدار  $m$  را طوری پیدا کنید که تابع  $f = \{(1, 3), (2, 1), (1, m^2 + 2), (3m, m)\}$  یک تابع یک‌به‌یک باشد.

**پاسخ:** اول می‌رویم سراغ تابع بودن  $f$ . چون در  $f$  دو زوج مرتب  $(1, 3)$  و  $(1, m^2 + 2)$  را داریم پس باید  $m^2 + 2 = 3$  باشد، یعنی  $m^2 = 1$  و در نتیجه  $m = 1$  یا  $m = -1$ ، حالا  $f$  را به ازای  $m = 1$  و  $m = -1$  می‌نویسیم:  
 $m = 1 \Rightarrow f = \{(1, 3), (2, 1), (1, 3), (3, 1)\}$   
 $m = -1 \Rightarrow f = \{(1, 3), (2, 1), (1, 3), (-3, -1)\}$   
 می‌بینیم که به ازای  $m = 1$  تابع  $f$  یک‌به‌یک نیست چون در آن دو زوج مرتب  $(2, 1)$  و  $(3, 1)$  را داریم (دو  $Y$  یکسان) ولی به ازای  $m = -1$  تابع  $f$  یک‌به‌یک است. پس جواب سؤال  $m = -1$  است.

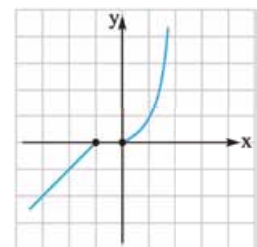
**مثال:** کدام یک از نمودارهای زیر متعلق به یک تابع یک‌به‌یک است؟



(الف)

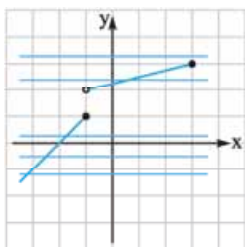


(ب)

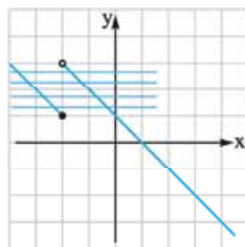


(پ)

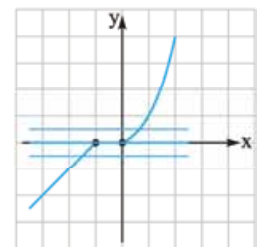
**پاسخ:** در هر کدام از نمودارها بررسی می‌کنیم که خطوط موازی محور  $X$ ها نمودار تابع را در چند نقطه قطع می‌کند:



الف



ب



پ

در شکل **الف** هر خط موازی محور  $X$ ها (هر جا که رسم کنیم) نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. (یعنی یا قطع نمی‌کند و یا فقط در یک نقطه قطع می‌کند) پس تابع شکل **الف** یک‌به‌یک است. در شکل **ب** همان‌طور که می‌بینید تمام خطوط افقی که در فاصله  $1 \leq y < 3$  رسم می‌شوند نمودار را در دو نقطه قطع می‌کنند پس تابع یک‌به‌یک نیست. در شکل **پ** تمام خطوط افقی نمودار را در یک نقطه قطع می‌کند مگر خط  $y = 0$  (یعنی همان محور  $X$ ها) و همین یک خط (یعنی یک  $Y$  مشترک در دو نقطه) باعث می‌شود که تابع یک‌به‌یک نباشد.

## سؤال‌های امتحانی

- درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.
- ۵۰- اگر تابع  $f$  یک‌به‌یک باشد، وارون تابع  $f$  نیز یک تابع است.  درست  نادرست
- ۵۱-  $f$  تابعی یک‌به‌یک است اگر هر خط موازی محور  $Y$ ها نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.  درست  نادرست
- ۵۲- اگر تابعی یک‌به‌یک نباشد، می‌توانیم با محدود کردن دامنه، آن را به یک تابع یک‌به‌یک تبدیل کنیم.  درست  نادرست

الف)  $f = \{(2, -1), (-1, 3), (3, 2), (1, 1)\}$

۵۳- وارون هر کدام از تابع‌های زیر را بنویسید و بگویید وارون کدام، یک تابع است؟

ب)  $g = \{(3, 2), (2, 3), (1, 2), (-2, 1)\}$

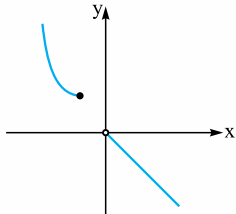
پ)  $h = \{(2, \sqrt{2}), (4, \sqrt{4}), (8, \sqrt{8}), (16, \sqrt{16})\}$

در هر مورد نمودار تابع‌های زیر و نمودار وارون آن‌ها را روی یک دستگاه مختصات رسم کنید.

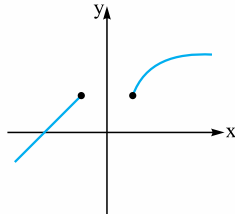
۵۴-  $f(x) = \sqrt{x-2} + 1$

۵۵-  $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 0 \\ 2x & x > 0 \end{cases}$

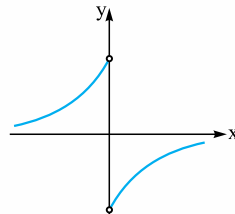
۵۶- کدام تابع یک‌به‌یک است؟



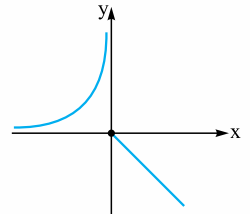
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

الف)  $f(x) = 3x + 2$

ب)  $f(x) = 2x^2 - 1$

پ)  $f(x) = \sqrt{x-2}$

ت)  $f(x) = \frac{1}{x}$

ث)  $f(x) = \begin{cases} 2x & x \leq 1 \\ x-1 & x > 1 \end{cases}$

ج)  $f(x) = \begin{cases} x-1 & x \leq 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$

۵۷- کدام تابع یک‌به‌یک است؟

 ۵۸- مقدار  $m$  و  $n$  را طوری پیدا کنید تا  $f = \{(1, m+1), (m+3, 3m), (1, m^2+1), (3, n-2)\}$  یک تابع یک‌به‌یک باشد.

نادرست	درست
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

۵۹- یک تابع خطی همواره یک‌به‌یک است.

 ۶۰- یک سهمی با دامنه  $R$  هرگز یک‌به‌یک نیست.

۶۱- یک تابع چندضابطه‌ای ممکن است یک‌به‌یک باشد.

۶۲- هر تابعی که وارون داشته باشد یک‌به‌یک است.

۶۳- هر تابعی که یک‌به‌یک باشد تابع وارون دارد.

 ۶۴- برای رسم نمودار تابع وارون، قرینه نمودار تابع را نسبت به خط  $y = x$  رسم می‌کنیم.

 با رسم نمودار تابع تعیین کنید تابع‌های زیر در کدام‌یک از بازه‌های  $(-\infty, 0]$ ،  $(0, 1)$ ،  $[-1, 2]$ ،  $[1, +\infty)$  یک‌به‌یک هستند؟

۶۵-  $f(x) = 3x + 2$   $(-\infty, 0], (0, 1), [-1, 2], [1, +\infty)$

۶۶-  $f(x) = [x] + 1$   $(-\infty, 0], (0, 1), [-1, 2], [1, +\infty)$

۶۷-  $f(x) = x - [x]$   $(-\infty, 0], (0, 1), [-1, 2], [1, +\infty)$

۶۸-  $f(x) = x^2 - 2x$   $(-\infty, 0], (0, 1), [-1, 2], [1, +\infty)$

۶۹-  $f(x) = \begin{cases} 2x & x \leq 1 \\ x-2 & x > 1 \end{cases}$

۷۰-  $f(x) = \frac{1}{|x|}$   $(-\infty, 0], (0, 1), [-1, 2], [1, +\infty)$

 ۷۱- تابع  $f$  با دامنه  $[-2, 2]$  به صورت  $f(x) = \begin{cases} -x & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$  تعریف شده است.  $a$  چه اعدادی می‌تواند باشد تا  $f$  یک تابع یک‌به‌یک شود؟

 ۷۲- تابع  $f$  با دامنه  $[-2, 2]$  و برد  $[1, 3]$  مفروض است. چند نمودار برای  $f$  می‌توانید مثال بزنید که  $f$  تابعی یک‌به‌یک باشد؟ چندتا از این نمودارها خطی‌اند؟

## ۴ به دست آوردن ضابطه تابع وارون

گفتیم اگر تابع یک‌به‌یک باشد، وارونش هم یک تابع است. به این تابع می‌گوییم تابع وارون تابع اول. برای پیدا کردن تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک

این کارها را به ترتیب انجام می‌دهیم:

 ۱) به جای  $f(x)$  (یا هر حرف دیگری که برای معرفی تابع استفاده شده باشد) می‌گذاریم  $y$ .

 ۲) در رابطه نوشته شده  $x$  را برحسب  $y$  پیدا می‌کنیم.

 ۳) جای  $x$  و  $y$  را عوض می‌کنیم.

 ۴) در رابطه آخر به جای  $y$  می‌گذاریم  $f^{-1}(x)$ .

ردیف	آزمون جمع‌بندی فصل سوم	رشته علوم تجربی	مدت امتحان: ۹۰ دقیقه	Kheilisabz.com
۱	دامنه تابع‌های زیر را پیدا کنید. الف) $f(x) = \frac{x(x-1)^2}{x^3 - 3x^2 + 2x}$			ب) $f(x) = \frac{x - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x-2}}$
۲	تساوی دو تابع زیر را بررسی کنید.			$f(x) = \sqrt{(x-2)^2(x-3)}$ $g(x) =  x-2  \sqrt{x-3}$
۳	معادله زیر را حل کنید.			$ x-2 + [x]  = 4$
۴	تابع $y =  x  + [x]$ را در بازه $[-2, 2]$ رسم کنید.			
۵	$a$ و $b$ را طوری به دست آورید که تابع $f = \{(a-b, 3), (5, 2), (-4, 3), (5, a+3), (1, 1)\}$ وارون پذیر باشد.			
۶	دو تابع $f = \{(2, 5), (6, 3), (3, 7), (4, 1), (1, 9)\}$ و $g(x) = \frac{x}{x-1}$ مفروض‌اند. اگر $f^{-1}(g(2a)) = 6$ باشد، مقدار $a$ چه قدر است؟			
۷	تابع $f(x) = \begin{cases}  x  + 1 & x \geq 1 \\ x + a & x < 1 \end{cases}$ یک‌به‌یک است. حدود $a$ را بیابید.			
۸	وارون تابع $f(x) = \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 4}$ را به دست آورید.			
۹	الف) نمودار تابع $f(x) = x^2 - 4x$ را رسم کنید. ب) با محدود کردن، ضابطه تابع وارون را بیابید.			
۱۰	ضابطه تابع وارون تابع $f(x) = x + 2\sqrt{x}$ را به دست آورید.			
۱۱	اگر در تابع خطی $f(1) = 3$ و $f(3) = 7$ باشد، ضابطه وارون $f$ را مشخص کنید.			
۱۲	اگر $f = \{(2, 1), (3, 2), (1, 3), (0, 4)\}$ و $g^{-1} = \{(3, 1), (4, 2), (1, 3), (5, 4)\}$ باشند، تابع $\frac{g^{-1} - 2f}{f^{-1}}$ را به دست آورید.			
۱۳	اگر دو تابع $f(x) = \sqrt{2-x}$ و $g(x) = -3x + 3$ باشند، مطلوب است: الف) دامنه و ضابطه $\frac{f}{g}$ ب) $(2f - g)(0)$			
۱۴	نمودار تابع مقابل را رسم کرده و برد آن را مشخص کنید.			$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x-2} & x > 2 \\ 2\sqrt{x+2} & -1 \leq x \leq 2 \end{cases}$



$$\begin{cases} x=0 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ \frac{1}{x-1}-1=0 \Rightarrow \frac{1}{x-1}=1 \\ \Rightarrow x-1=1 \Rightarrow x=2 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$$

$$f(x) = \frac{1}{\frac{x}{x-2} + 1} \quad -16$$

$$\text{ریشهٔ مخرج‌ها} \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$$

$$f(x) = \frac{x}{x^4 - 5x^2 + 4} \quad -17$$

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} \\ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1, 2, -2\}$$

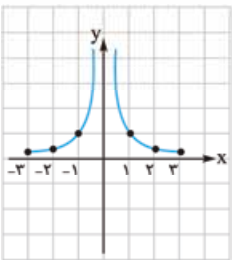
$$\text{الف) } f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad -18$$

$$\text{ب) } f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$\text{پ) } f(x) = \frac{1}{(x+2)(x-2)}$$

$$\text{ت) } f(x) = \frac{1}{x(x-1)(x+1)}$$

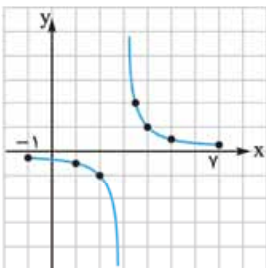
$$y = \frac{1}{|x|} \quad [-3, 3] \quad -19$$



x	-3	-2	-1	1	2	3
y	1/3	1/2	1	1	1/2	1/3

$$f(x) = \frac{1}{x-3} \quad [-1, 7] \quad -20$$

x	-1	1	2	5/2	7/2	4	5	7
y	-1/4	-1/2	-1	-2	2	1	1/2	1/4



$$-1 \text{ - {ریشه‌های مخرج} - } \mathbb{R}$$

-2 (1) دامنه‌هایشان مساوی باشد. (2) به ازای X های یکسان Y های یکسان داشته باشند. (یا ضابطه‌هایشان مساوی باشد).

-3 درست

-4 نادرست

-5 الف) چون بعد از 10 پنالتی اول، X پنالتی زده شده، پس در کل 10 + X پنالتی زده شده است و از این پنالتی‌ها، 6 درصد پنالتی اول یعنی 6 پنالتی به علاوه X پنالتی دیگر یعنی X + 6 پنالتی گل شده است. پس ضابطهٔ تابعی که نشان‌دهندهٔ درصد پنالتی‌های گل شده است، برابر است با:

$$f(x) = \frac{x+6}{x+10} \times 100$$

ب) برای آن که درصد پنالتی‌های گل شده از 95 درصد بیشتر باشد، باید داشته باشیم:

$$f(x) > 95 \Rightarrow \frac{x+6}{x+10} \times 100 > 95$$

$$\Rightarrow 100x + 600 > 95x + 950 \Rightarrow 5x > 350 \Rightarrow x > 70$$

و چون  $x > 70$  است پس باید حداقل 71 پنالتی دیگر بزند.

-6 گویا

-7 غیر گویا

-8 گویا

-9 گویا (چون  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ )

-10 گویا

-11 گویا

$$f(x) = \frac{2x+1}{2x^2+x-1} \quad 2x^2+x-1=0 \quad -12$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(2)(-1)}}{2(2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1-3}{4} = -1 \\ x = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1, \frac{1}{2}\}$$

-13

$$f(x) = \frac{x+3}{x+1} - \frac{x+1}{x+3}$$

$$\begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ x+3=0 \Rightarrow x=-3 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1, -3\}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - x} \quad -14$$

$$x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0, 1, -1\}$$

$$f(x) = \frac{1}{\frac{x}{x-1} - 1} \quad -15$$

۲۴- برای پیدا کردن دامنه، عبارت زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر

قرار می‌دهیم:  $f(x) = \sqrt{x-3} + 3$

$x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \Rightarrow D_f = [3, +\infty)$

۲۵-  $f(x) = \sqrt{x+2} - 1$

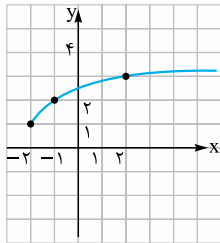
$x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \Rightarrow D_f = [-2, +\infty)$

۲۶-  $f(x) = \sqrt{4-x} + 1$

$4-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4 \Rightarrow D_f = (-\infty, 4]$

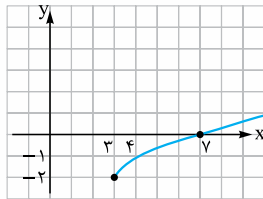
۲۷-  $f(x) = \sqrt{-5-x}$

$-5-x \geq 0 \Rightarrow x \leq -5 \Rightarrow D_f = (-\infty, -5]$



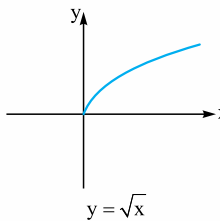
$f(x) = \sqrt{x+2} + 1$

x	-2	-1	2	7
y	1	2	3	4

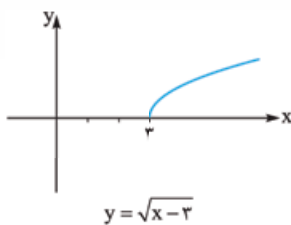


$f(x) = \sqrt{x-3} - 2$

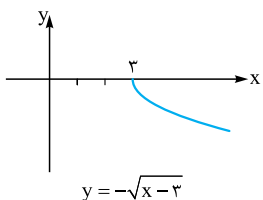
x	3	4	7	12
y	-2	-1	0	1



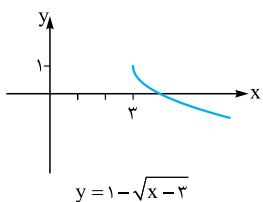
انتقال (+2) واحد در راستای محور xها



قرینه نسبت به محور xها



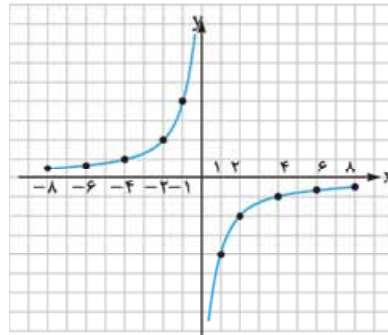
انتقال (+1) واحد در راستای محور yها



طبق نمودار دامنه و برد برابرند با:  $D_f = [3, +\infty)$  و  $R_f = (-\infty, 1]$

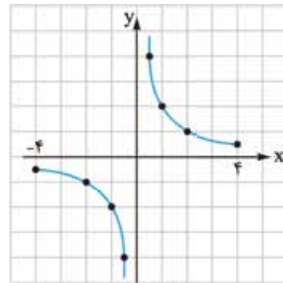
۲۱-  $f(x) = -\frac{4}{x} \quad [-8, 8]$

x	-8	-6	-4	-2	-1	1	2	4	6	8
y	1/2	2/3	1	2	4	-4	-2	-1	-2/3	-1/2



۲۲-  $f(x) = \frac{2}{x} \quad [-4, 4]$

x	-4	-2	-1	-1/2	1/2	1	2	4
y	-1/2	-1	-2	-4	4	2	1	1/2



۲۳- الف) شکل داده شده تابع ثابت  $f(x) = 2$  است که  $x = 1$  متعلق به دامنه‌اش نیست، پس باید عامل صفرکننده  $x-1$  را در صورت و مخرج داشته باشیم؛ یعنی:

$f(x) = \frac{2x-2}{x-1}$  یا  $f(x) = \frac{2(x-1)}{x-1}$

ب) نمودار داده شده یک تابع خطی است که از نقاط  $(0, 2)$  و  $(1, 3)$  می‌گذرد، پس:

$(0, 2), (1, 3) \Rightarrow m = \frac{3-2}{1-0} = 1 \Rightarrow y = x + 2$

بنابراین ضابطه تابع باید به شکل  $f(x) = x + 2, x \neq 2$  باشد (چون  $x = 2$  جزء دامنه تابع نیست) یعنی می‌توانیم ضابطه را به شکل زیر بنویسیم:

$f(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} \Rightarrow f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$

ب) نمودار داده شده یک تابع خطی است که از نقاط  $(0, 3)$  و  $(2, -1)$  می‌گذرد و  $x = 1$  جزو دامنه تابع نیست، پس مثل قسمت قبل داریم:

$(0, 3), (2, -1) \Rightarrow m = \frac{-1-3}{2-0} = -2 \Rightarrow y = -2x + 3$

$\Rightarrow f(x) = \frac{(-2x+3)(x-1)}{x-1}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{-2x^2 + 2x + 3x - 3}{x-1} = \frac{-2x^2 + 5x - 3}{x-1}$

پ)  $3 < \sqrt{10} < 4 \Rightarrow [\sqrt{10}] = 3$

ت)  $4 < \sqrt[3]{1000} < 5 \Rightarrow [\sqrt[3]{1000}] = 4$

ث)  $(17/2)^2 = (17+0/2)^2 = 17^2 + 2(17)(0/2) + (0/2)^2$   
 $= 289 + 6/8 + 0/4 = 295/8 + 0/4$   
 $\Rightarrow [(17/2)^2] = 295$

ج)  $(10/1)^3 = (10+0/1)^3$   
 $= 10^3 + 3(10)^2(0/1) + 3(10)(0/1)^2 + (0/1)^3$   
 $= 1000 + 30 + 0/3 + 0/1 = 1030 + 0/3001$   
 $\Rightarrow [(10/1)^3] = 1030$

چ)  $8/9 \times 9/1 = (9-0/1)(9+0/1) = 9^2 - (0/1)^2$   
 $= 81 - 0/1 \Rightarrow [8/9 \times 9/1] = 80$

ح)  $2/0.1 \times 2/0.2 = (2+0/0.1) \times (2+0/0.2)$   
 $= 2^2 + (0/0.1 + 0/0.2)(2) + (0/0.1)(0/0.2)$   
 $= 4 + 0/0.6 + 0/0.002 \Rightarrow [2/0.1 \times 2/0.2] = 4$

**۴۲-** تابع  $f(x) = \frac{3}{[\frac{x}{2}] - 1}$  یک تابع کسری است. مخرج تابع را برابر صفر قرار می‌دهیم:

با استفاده از ویژگی  $[x]=k \Rightarrow k \leq x < k+1$   
 $[\frac{x}{2}] - 1 = 0 \Rightarrow [\frac{x}{2}] = 1$   
 $1 \leq \frac{x}{2} < 2 \Rightarrow 2 \leq x < 4 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - [2, 4)$

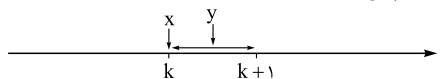
**۴۳-** الف)  $[\frac{6}{1}] + [\frac{6}{2}] + [\frac{6}{3}] + \dots + [\frac{6}{600}]$   
 از  $\frac{6}{y}$  به بعد حاصل تمام جزء صحیح‌ها برابر صفر می‌شود، پس:

$[\frac{6}{1}] + [\frac{6}{2}] + [\frac{6}{3}] + [\frac{6}{4}] + [\frac{6}{5}] + [\frac{6}{6}] + [\frac{6}{7}] + [\frac{6}{8}] + \dots + [\frac{6}{600}]$   
 $= 6 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 0 = 14$

ب)  $[10^{-4}] + [10^{-3}] + [10^{-2}] + \dots + [10^4]$

$= [\frac{1}{10000}] + [\frac{1}{1000}] + [\frac{1}{100}] + [\frac{1}{10}]$   
 $+ [10^0] + [10^1] + [10^2] + [10^3] + [10^4] = 11111$

**۴۴-** چون محدوده  $|x-y|$  را می‌خواهیم و  $x$  و  $y$  دلخواه‌اند فرض می‌کنیم  $x < y$  است، پس:



طبق شکل بالا اگر  $x$  یک عدد صحیح باشد، محدوده تغییرات  $y$  بازه  $(k, k+1]$  است؛ پس اختلاف بین  $x$  و  $y$  می‌تواند برابر صفر (در صورتی که  $x=y$  باشد) و یا برابر عددی که حداکثرش کوچک‌تر از ۱ واحد است باشد، یعنی  $|x-y| < 1$ ، بنابراین اختلاف بین  $x$  و  $y$  یا همان  $|x-y|$  عددی است بین صفر و ۱ که هرگز برابر ۱ نمی‌شود.

**۳۱-** ابتدا دامنه دو تابع داده‌شده را با هم مقایسه می‌کنیم و اگر دامنه‌ها مساوی بود، می‌رویم سراغ بررسی برابری ضابطه دو تابع.

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} \\ \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\} \end{cases} \Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow f \neq g$$
  

$$g(x) = x^2 + 1 \Rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

**۳۲-** 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \\ g(x) = x^2 - 1 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow D_f = D_g$$

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1} = \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{x^2 + 1} = x^2 - 1 = g(x)$$
  
 دو تابع مساوی‌اند.

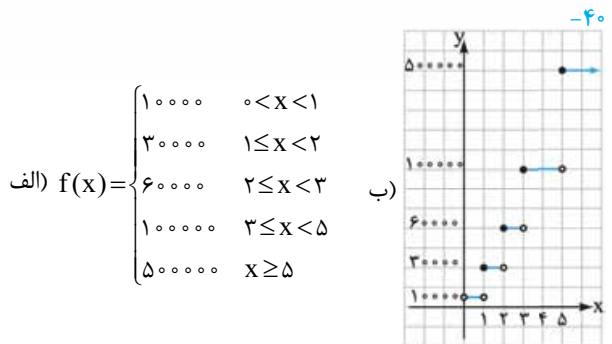
**۳۳-** 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{1\} \\ g(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 - 2x + 1} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{1\} \end{cases} \Rightarrow D_f = D_g$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{(x-1)^2}{x-1} \\ = x - 1, x \neq 1 \\ g(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x-1)^3}{(x-1)^2} \\ = x - 1, x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = g(x)$$
  
 دو تابع مساوی‌اند

**۳۴-** ضابطه تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & x \neq a \\ b - 1 & x = a \end{cases}$  در نقطه  $x = a$

جدا شده است و چون  $x = 2$  ریشه مخرج ضابطه بالایی است باید  $a = 2$  باشد. از طرف دیگر چون تابع  $g(x) = x + 2$ ،  $g(2) = 2 + 2 = 4$  داریم پس  $f(2)$  هم باید برابر ۴ باشد یعنی:  
 $b - 1 = 4 \Rightarrow b = 5$

- ۳۵-** بزرگ‌ترین - کوچک‌تر **۳۶-** درست
- ۳۷-** نادرست **۳۸-** نادرست
- ۳۹-** گزینه «۴»



**۴۱-** الف)  $0 < 0/99 < 1 \Rightarrow [0/99] = 0$

ب)  $-1 < -0/99 < 0 \Rightarrow [-0/99] = -1$



نمونه امتحان نیم سال اول	رشته تجربی	ریاضی ۲	نمره
ردیف	امتحان شماره ۱	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	kheilisabz.com
۱	نقاط $A(1, -1)$ ، $B(4, 0)$ و $C(0, 2)$ سه رأس یک مثلث اند. نوع مثلث را تعیین کنید.		
۲	معادله درجه دومی بنویسید که ریشه هایش $2 - \sqrt{2}$ و $2 + \sqrt{2}$ باشد.		
۳	معادله های زیر را حل کنید: الف) $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$ ب) $(x^2 + x)^2 + x^2 + x - 6 = 0$		
۴	معادله زیر را حل کنید. $\frac{x+4}{2x-4} + \frac{x}{x+2} = \frac{4}{x^2-4}$		
۵	معادله زیر را حل کنید. $\sqrt{x-3} + x = 5$		
۶	طریقه رسم خط عمود بر یک خط را از نقطه ای غیر واقع بر آن توضیح دهید.		
۷	خط $d$ و نقطه $A$ به فاصله ۳ سانتی متر از آن مفروض است. می خواهیم مثلث متساوی الساقینی رسم کنیم که یک رأسش نقطه $A$ و طول ساق هایش ۵ سانتی متر و قاعده اش بر خط $d$ قرار داشته باشد. روش رسم را توضیح دهید.		
۸	در شکل روبه رو، $DE \parallel BC$ است. مقدار $x$ و $y$ را پیدا کنید. 		
۹	هر کدام از حکم های کلی زیر را با یک مثال نقض رد کنید. الف) در هر مثلث اندازه هر زاویه خارجی از اندازه هر زاویه داخلی بزرگ تر است. ب) مجموع هر دو عدد اول دلخواه همواره یک عدد مرکب است.		
۱۰	در مثلث قائم الزاویه روبه رو $AB = 3$ و $BH = \frac{9}{5}$ است. اندازه $AC$ و $CH$ را پیدا کنید. 		
۱۱	نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x-3}$ را رسم کنید.		
۱۲	دامنه تابع های زیر را پیدا کنید. الف) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ ب) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-5x+6}$		
۱۳	ضابطه تابع وارون تابع $f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{3}$ را پیدا کنید.		
۱۴	نمودار تابع $f(x) = [x] - 1$ را با دامنه $[-2, 2]$ رسم کنید.		
۱۵	در هر کدام از موارد زیر ضابطه $f+g$ و $\frac{f}{g}$ و دامنه هر کدام را به دست آورید. الف) $\begin{cases} f(x) = x^2 - 3x + 2 \\ g(x) = x - 2 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} f(x) = x \\ g(x) = \sqrt{x} \end{cases}$		

۰/۷۵	اندازه طول کمان روبه‌رو به زاویه $\frac{\pi}{۳}$ رادیان را در یک دایره به شعاع $۲۰$ سانتی‌متر پیدا کنید.	۱۶	
۰/۵	<p>درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.</p> <p>الف) اگر زاویه بین دو ساق مثلث متساوی‌الساقینی <math>\frac{1}{۳}</math> رادیان باشد، آن‌گاه اندازه قاعده این مثلث، کوچک‌تر از اندازه ساق آن است.</p> <p>ب) <math>\sin \frac{۲\pi}{۳} = -\sin \frac{\pi}{۳}</math></p>	<p>درست      نادرست</p> <p><input type="checkbox"/>      <input type="checkbox"/></p> <p><input type="checkbox"/>      <input type="checkbox"/></p>	۱۷
۱	<p>مقدار عبارت‌های زیر را به دست آورید.</p> <p>الف) <math>\sin^2\left(\frac{۴\pi}{۳}\right) + \tan\left(\frac{۳\pi}{۴}\right) - \cos \frac{۵\pi}{۳}</math></p> <p>ب) <math>\sin ۷۵^\circ + \cos ۳۰^\circ + \tan ۵۸۵^\circ</math></p>	۱۸	
۱/۵	نمودار تابع $y = ۲ \cos x$ را در بازه $[۰, ۲\pi]$ رسم کنید.	۱۹	
۱/۲۵	<p>در یک مثلث <math>\hat{A} = \frac{\pi}{۳}</math> و <math>\hat{B} = ۵\hat{C}</math> است:</p> <p>الف) زاویه‌های <math>\hat{B}</math> و <math>\hat{C}</math> را برحسب رادیان و درجه پیدا کنید.</p> <p>ب) حاصل عبارت <math>\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C</math> را پیدا کنید.</p>	۲۰	
۲۰	جمع نمرات		

# پاسخ نامه تشریحی امتحان شماره (۱)

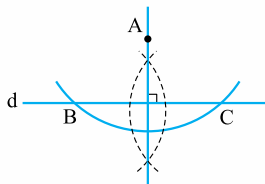
۶- خط  $d$  و نقطه  $A$  را غیر واقع بر آن در نظر می‌گیریم.



الف) به مرکز  $A$  و به شعاعی که خط  $d$  را قطع کند کمان می‌زنیم تا خط  $d$  را در دو نقطه  $B$  و  $C$  قطع کند.

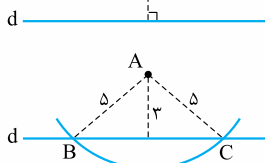


ب) عمودمنصف پاره‌خط  $BC$  را رسم می‌کنیم.



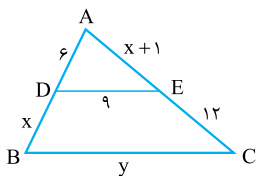
پ) نقطه  $A$  روی عمودمنصف پاره‌خط  $BC$  واقع است چون از  $B$  و  $C$  به یک فاصله است. عمودمنصف رسم شده همان عمودی است که از نقطه  $A$  بر خط  $d$  رسم کرده‌ایم.

۷- نقطه  $A$  را به فاصله ۳ سانتی‌متر از خط  $d$  در نظر می‌گیریم. به مرکز  $A$  دایره‌ای به شعاع ۵ سانتی‌متر رسم می‌کنیم تا خط  $d$  را در نقاط  $B$  و  $C$  قطع کند.



مثلث  $ABC$  جواب مسئله است.

۸- طبق قضیه تالس داریم:



$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{6}{x} = \frac{x+1}{12} \Rightarrow x(x+1) = 6 \times 12$$

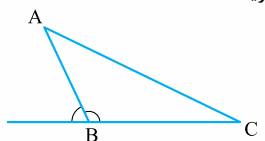
$$\Rightarrow x^2 + x - 72 = 0 \Rightarrow (x+9)(x-8) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -9 \\ x = 8 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

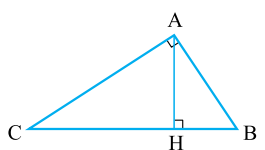
و طبق تعمیم قضیه تالس داریم:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{6}{14} = \frac{9}{y} \Rightarrow y = \frac{14 \times 9}{6} = 21$$

۹- الف) اگر زاویه داخلی منفرجه باشد زاویه خارجی اش حاده است، مثل شکل روبه‌رو.



ب) اگر عدد ۲ و ۵ را در نظر بگیریم  $2+5=7$  است که یک عدد اول است.



۱۰-  $AB = 3, BH = \frac{9}{5}$

می‌دانیم:  $AB^2 = BH \times BC$

$$\Rightarrow 9 = \frac{9}{5} \times BC \Rightarrow BC = 5$$

$$CH = BC - BH \Rightarrow CH = 5 - \frac{9}{5} = \frac{25-9}{5} = \frac{16}{5}$$

$$AC^2 = CH \times BC \Rightarrow AC^2 = \frac{16}{5} \times 5 \Rightarrow AC^2 = 16 \Rightarrow AC = 4$$

۱- طول اضلاع مثلث را به دست می‌آوریم:  $A(1,-1), B(4,0), C(0,2)$

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(1-4)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(4-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

می‌دانیم که  $AB = AC$  و  $AB^2 + AC^2 = BC^2$  (یعنی  $(\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2 = (\sqrt{20})^2$ ) پس مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است.

۲- مجموع ریشه‌ها (S) و حاصل ضرب ریشه‌ها (P) را حساب می‌کنیم:

$$S = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$$

$$P = (2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2}) = 2^2 - (\sqrt{2})^2 = 4 - 2 = 2$$

پس معادله به صورت  $x^2 - Sx + P = 0$  یعنی  $x^2 - 4x + 2 = 0$  است.

۳- الف)  $x^2 + 5x - 36 = 0 \rightarrow x^2 = t \rightarrow t^2 + 5t - 36 = 0$

$$\Rightarrow (t+9)(t-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -9 \\ t = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = -9 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

ب)  $(x^2 + x)^2 + x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow x^2 + x = u \rightarrow u^2 + u - 6 = 0$

$$\Rightarrow (u+3)(u-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = -3 \\ u = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x = -3 \\ x^2 + x = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4(1)(3) < 0 \text{ ریشه ندارد} \\ x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases} \end{cases}$$

۴- مخرج مشترک می‌گیریم و دو طرف را ساده می‌کنیم:

$$\frac{x+4}{2x-4} + \frac{x}{x+2} = \frac{4}{x^2-4}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+4)(x+2) + x(2x-4)}{2(x-2)(x+2)} = \frac{4}{x^2-4}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 6x + 8 + 2x^2 - 4x}{2(x-2)(x+2)} = \frac{4}{(x-2)(x+2)}$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2 + 2x + 8}{2} = 4 \Rightarrow 3x^2 + 2x + 8 = 8$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(3x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ق ق} \\ x = -\frac{2}{3} \text{ ق ق} \end{cases}$$

$$\sqrt{x-3} + x = 5 \Rightarrow \sqrt{x-3} = 5-x$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} x-3 = 25-10x+x^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 11x + 28 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \text{ ق ق} \\ x = 7 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

جواب  $x = 7$  چون در معادله  $\sqrt{x-3} = 5-x$  صدق نمی‌کند قابل قبول نیست.



ردیف	امتحان شماره ۶	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	ریاضی ۲	نمونه امتحان نیم سال دوم - نهایی خرداد ۱۴۰۲
۱	گزینه مناسب را تعیین کنید.			
۱/۲۵	الف) فاصله نقطه $A(-2, 2)$ از خط $3x + 4y - 6 = 0$ کدام است؟ ب) در هر مثلث هر پاره خطی که وسط دو ضلع را به هم وصل می کند ..... ضلع سوم است. پ) اگر نسبت مساحت های دو مثلث متشابه برابر $\frac{4}{25}$ باشد، نسبت نیمسازهای آن ها برابر ..... است. ت) برد تابع $f(x) = [x]$ کدام است؟ ث) اگر $A$ و $B$ دو پیشامد مستقل باشند، آن گاه کدام گزینه صحیح است؟ $P(A \cap B) = P(S)$ (۲) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ (۱) $A \cap B = A \times B$ (۴) $A \cap B = \emptyset$ (۳)	(۱) $\frac{-4}{5}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) $\frac{8}{5}$ (۴) $\frac{6}{5}$ (۱) موازی      (۲) مساوی      (۳) موازی و مساوی نصف      (۴) موازی و مساوی (۱) $\frac{16}{625}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) $\frac{4}{50}$ (۱) اعداد حقیقی      (۲) اعداد گویا      (۳) اعداد طبیعی      (۴) اعداد صحیح		
۲	الف) اگر $A(2, 4)$ و $B(4, -2)$ دو سر قطر یک دایره باشند، مختصات مرکز دایره را بیابید. ب) معادله روبه رو را حل کنید.			$\sqrt{2-x} = x$
۳	الف) حکم کلی زیر را با مثال نقض رد کنید. به ازای هر عدد طبیعی $n$ ، مقدار عبارت $n^2 + n + 41$ عددی اول است. ب) در مثلث قائم الزاویه $ABC$ به رأس قائمه $A$ ، اگر ارتفاع وارد بر $BC$ باشد و $AH = 4 \text{ cm}$ و $BH = 2 \text{ cm}$ آن گاه اندازه $HC$ و $BA$ را به دست آورید.			۲
۴	اگر $f(x) = 3x + 5$ باشد، مقدار $f^{-1}(8)$ را تعیین کنید.			۰/۵
۵	اگر $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ و $g(x) = x^2 - 4$ باشد، ضابطه و دامنه تابع $\frac{f}{g}$ را تعیین کنید.			۱/۷۵
۶	نمودار تابع $y = -\sin x + 1$ را در فاصله $[0, 2\pi]$ رسم کنید و مقدار ماکزیمم و مینیمم نمودار را تعیین کنید.			۱/۵
۷	حاصل عبارت زیر را بیابید:			۱/۵
				$A = \sin 12^\circ - \cos 15^\circ$
۸	نمودار تابع $y = -\log_2(x - 3)$ را رسم کنید.			۱
۹	معادلات نمایی و لگاریتمی زیر را حل کنید.			۲
				الف) $3^{x-2} = \frac{1}{27^x}$ ب) $\log(x+3) + \log x = 1$
۱۰	اگر $\log 2 = 0/3$ و $\log 3 = 0/48$ ، آن گاه حاصل $\log 12$ را بیابید.			۰/۵
۱۱	با توجه به نمودار، حاصل را بیابید.			۱
				 $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) - 3 \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + 3f(-1) =$



نمونه امتحان نیم‌سال دوم - نهایی خرداد ۱۴۰۲ - نوبت عصر		رشته تجربی	ریاضی ۲
ردیف	امتحان شماره ۶	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	kheilisabz.com
۱۲	مقدار حدهای زیر را در صورت وجود تعیین کنید.		۱ الف) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 1402^-} [x]$ پ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cos x$
۱۳	مقادیر $a$ و $b$ را چنان تعیین کنید که تابع زیر در نقطه $x = -1$ پیوسته باشد.		$f(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ ax + b & x = -1 \\ x^2 - b & x > -1 \end{cases}$
۱۴	فرض کنید در یک سال احتمال قهرمانی تیم ملی فوتبال ایران در آسیا برابر $\frac{5}{6}$ و احتمال قهرمانی تیم ملی والیبال ایران در آسیا برابر $\frac{6}{6}$ باشد. با چه احتمالی حداقل یکی از دو تیم قهرمان خواهد شد؟		۱/۲۵
۱۵	ضریب تغییرات داده‌های زیر را تعیین کنید.		۱/۵ ۱, ۳, ۵, ۷
جمع نمرات			۲۰