



کتاب آنلاین®

مرجع تخصصی عرضه آنلاین کتاب

مشاهده

چند صفحه

اول کتاب



# فهرست



۲۵  
۳۰  
۳۱  
۳۸

درسنامه ۵: دنباله هندسی  
آزمون جمع‌بندی فصل اول  
پاسخ‌نامه تشریحی  
پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل اول

۷  
۷  
۱۱  
۱۶  
۲۲

## فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

درسنامه ۱: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی  
درسنامه ۲: متمم یک مجموعه - شمارش تعداد عضوهای مجموعه  
درسنامه ۳: الگو و دنباله  
درسنامه ۴: دنباله حسابی

۵۵  
۵۶  
۶۴

آزمون جمع‌بندی فصل دوم  
پاسخ‌نامه تشریحی  
پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل دوم

۴۰  
۴۰  
۴۶  
۵۲

## فصل دوم: مثلثات

درسنامه ۱: نسبت‌های مثلثاتی  
درسنامه ۲: دایره مثلثاتی  
درسنامه ۳: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی



۷۴  
۷۸  
۸۲  
۸۳  
۹۰

درسنامه ۴: عبارات‌های جبری  
درسنامه ۵: عبارات‌های گویا  
آزمون جمع‌بندی فصل سوم  
پاسخ‌نامه تشریحی  
پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل سوم

۶۵  
۶۵  
۶۸  
۷۱

## فصل سوم: توان‌های گویا و عبارات‌های جبری

درسنامه ۱: ریشه و توان  
درسنامه ۲: ریشه نام  
درسنامه ۳: توان‌های گویا



۱۰۷  
۱۱۴  
۱۱۵  
۱۳۰

درسنامه ۴: حل نامعادله  
آزمون جمع‌بندی فصل چهارم  
پاسخ‌نامه تشریحی  
پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل چهارم

۹۲  
۹۲  
۹۸  
۱۰۴

## فصل چهارم: معادلات و نامعادلات

درسنامه ۱: معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن  
درسنامه ۲: سهمی  
درسنامه ۳: تعیین علامت



۱۴۵  
۱۴۹  
۱۵۰  
۱۵۹

درسنامه ۴: انتقال توابع  
آزمون جمع‌بندی فصل پنجم  
پاسخ‌نامه تشریحی  
پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل پنجم

۱۳۱  
۱۳۱  
۱۳۴  
۱۴۰

## فصل پنجم: تابع

درسنامه ۱: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن  
درسنامه ۲: دامنه و برد توابع  
درسنامه ۳: انواع توابع



۱۷۰  
۱۷۷  
۱۷۸  
۱۸۴

درسنامه ۳: ترکیب  
آزمون جمع‌بندی فصل ششم  
پاسخ‌نامه تشریحی  
پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل ششم

۱۶۰  
۱۶۰  
۱۶۵

## فصل ششم: شمارش، بدون شمردن

درسنامه ۱: شمارش  
درسنامه ۲: جایگشت



۱۹۶  
۲۰۱  
۲۰۲  
۲۰۷

درسنامه ۳: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه، متغیر و انواع آن  
آزمون جمع‌بندی فصل هفتم  
پاسخ‌نامه تشریحی  
پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل هفتم

۱۸۵  
۱۸۵  
۱۹۰

## فصل هفتم: آمار و احتمال

درسنامه ۱: تعریف‌های مقدماتی احتمال  
درسنامه ۲: احتمال یا اندازه‌گیری شانس



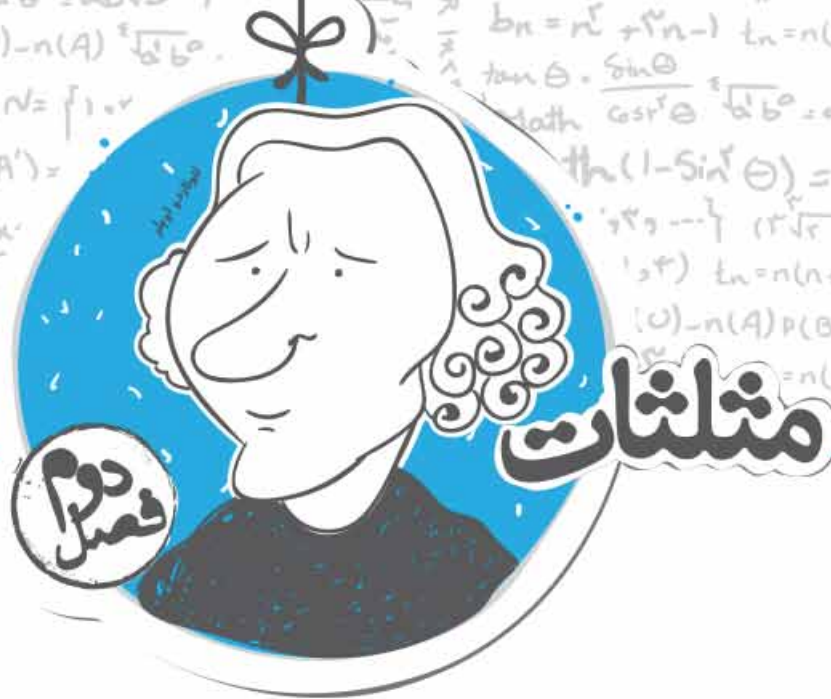
شماره صفحه پاسخ

شماره صفحه امتحان

۲۱۰  
۲۱۴  
۲۱۸  
۲۲۲  
۲۲۶  
۲۳۰

۲۰۸  
۲۱۲  
۲۱۶  
۲۲۰  
۲۲۴  
۲۲۸

امتحان شماره (۱): نمونه امتحان نیم‌سال اول  
امتحان شماره (۲): نمونه امتحان نیم‌سال اول  
امتحان شماره (۳): نمونه امتحان نیم‌سال دوم  
امتحان شماره (۴): نمونه امتحان نیم‌سال دوم  
امتحان شماره (۵): نمونه امتحان نیم‌سال دوم  
امتحان شماره (۶): نمونه امتحان نیم‌سال دوم

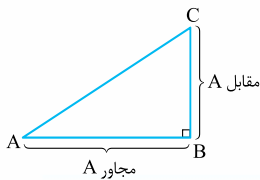


## نسبت‌های مثلثاتی

مثلثات ترکیبی از دو کلمه یونانی به معنی مثلث و اندازه‌گیری است. موضوع این شاخه از ریاضیات، بررسی رابطه‌ای بین زاویه‌ها و ضلع‌های یک مثلث است. یکی از کاربردهای این علم، اندازه‌گیری فاصله به صورت غیرمستقیم (به‌یونانی مترکردن!) است. مثلثات در علوم مهندسی، فیزیک، نقشه‌برداری، دریانوردی، نجوم و ... مورد استفاده قرار می‌گیرد.

### تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه

مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  را در نظر بگیرید. نسبت‌های مثلثاتی سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت زاویه حاده  $A$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:



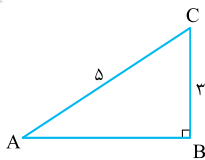
$$\sin \hat{A} = \frac{\text{ضلع مقابل به } A}{\text{وتر}} = \frac{BC}{AC} \quad \cos \hat{A} = \frac{\text{ضلع مجاور به } A}{\text{وتر}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan \hat{A} = \frac{\text{ضلع مقابل به } A}{\text{ضلع مجاور به } A} = \frac{BC}{AB} \quad \cot \hat{A} = \frac{1}{\tan \hat{A}} = \frac{\text{ضلع مجاور به } A}{\text{ضلع مقابل به } A} = \frac{AB}{BC}$$

### نکته

- نسبت کتانژانت زاویه  $A$ ، معکوس نسبت تانژانت زاویه  $A$  است.
- معمولاً زاویه‌ها را با حروف یونانی  $\theta$ ،  $\alpha$  و ... نمایش می‌دهیم، مثلاً در شکل مقابل می‌نویسیم  $\sin \theta$  یا  $\cos \theta$ .
- نسبت‌های مثلثاتی برای زاویه مشخص  $\alpha$  (مثلاً  $30^\circ$ ) ثابت بوده و ربطی به مثلث قائم‌الزاویه رسم‌شده ندارد.

**مثال** در شکل مقابل نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های  $A$  و  $C$  را به دست آورید.



**پاسخ** برای به دست آوردن برخی از نسبت‌ها، نیاز به طول ضلع  $AB$  داریم؛ بنابراین بهتر است ابتدا با قضیه فیثاغورس آن را به دست آوریم:

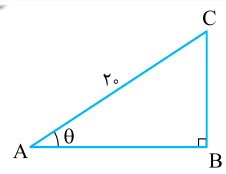
$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow AB^2 + 9 = 25 \Rightarrow AB = 4$$

$$\sin \hat{A} = \frac{\text{مقابل به } A}{\text{وتر}} = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}, \cos \hat{A} = \frac{\text{مجاور به } A}{\text{وتر}} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}, \tan \hat{A} = \frac{\text{مقابل به } A}{\text{مجاور به } A} = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4}, \cot \hat{A} = \frac{1}{\tan \hat{A}} = \frac{\text{مجاور به } A}{\text{مقابل به } A} = \frac{4}{3}$$

$$\sin \hat{C} = \frac{\text{مقابل به } C}{\text{وتر}} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}, \cos \hat{C} = \frac{\text{مجاور به } C}{\text{وتر}} = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}, \tan \hat{C} = \frac{\text{مقابل به } C}{\text{مجاور به } C} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{3}, \cot \hat{C} = \frac{1}{\tan \hat{C}} = \frac{\text{مجاور به } C}{\text{مقابل به } C} = \frac{3}{4}$$

مورد داشتیم نوشته  $\sin = \frac{3}{5}$  یا  $\cos = \frac{4}{5}$ .

بین نسبت‌های مثلثاتی به فوری فود معنی ندارند. نسبت‌های مثلثاتی در کنار به زاویه مثل  $A$ ، معنی پیدا می‌کنند. به عبارت دیگر  $\sin = \frac{3}{5}$  معنی ندارد! سینوس کدوم زاویه  $\frac{3}{5}$  می‌شه؟ تو عبارت  $\sin \hat{A}$  نمی‌تونی  $\sin$  و  $A$  رو جدا کنی و اون‌ها در کنار هم، معنی پیدا می‌کنند.

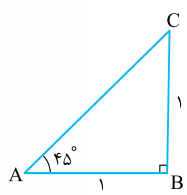


**مثال** طول وتر یک مثلث قائم الزاویه ۲۰ سانتی متر و سینوس یکی از زاویه های حاده آن  $\frac{3}{5}$  است. محیط مثلث را به دست آورید.

**پاسخ** در این فصل هر جا لازم شد، یک شکل بکشید. یک مثلث قائم الزاویه با وتری به طول ۲۰، رسم کرده و  $\theta$  را زاویه ای می گیریم که  $\sin \theta = \frac{3}{5}$  باشد. حالا:  
 $\sin \theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{BC}{20} \Rightarrow BC = 12$   
 با استفاده از قضیه فیثاغورس می توانیم طول ضلع AB را نیز به دست آوریم:  
 $AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow AB^2 + 12^2 = 20^2 \Rightarrow AB^2 = 256 \Rightarrow AB = 16$   
 بنابراین محیط مثلث می شود:  $\text{محیط مثلث} = AB + BC + AC = 16 + 12 + 20 = 48$

### نسبت های مثلثاتی زاویه های معروف

#### نسبت های زاویه ۴۵°

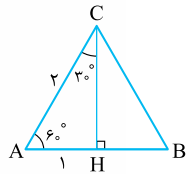


مثلث قائم الزاویه ای که طول ضلع های قائمه آن ۱ است، رسم می کنیم. چون مثلث متساوی الساقین است،  $\hat{A} = \hat{C} = 45^\circ$  خواهد بود. با استفاده از قضیه فیثاغورس  $AC = \sqrt{2}$  به دست می آید. حالا نسبت های زاویه ۴۵° را به دست می آوریم:

$$\sin 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos 45^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \tan 45^\circ = \frac{BC}{AB} = 1 \quad \cot 45^\circ = \frac{1}{\tan 45^\circ} = 1$$

نسبت های زاویه ۴۵° به دست آمد، آن ها را به خوبی به خاطر بسپارید.

#### نسبت های ۳۰° و ۶۰°



مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع ۲ رسم می کنیم. همه زاویه ها برابر ۶۰° است. از زاویه  $\hat{C}$ ، بر خط AB، عمود می کنیم تا مثلث قائم الزاویه تشکیل شود (پون نسبت هارو تو مثلث قائم الزاویه تعریف کردیم نه هر مثلثی). چون مثلث متساوی الاضلاع است، ارتفاع رسم شده، نیمساز و میانه هم هست، پس  $\hat{ACH} = 30^\circ$  و  $AH = 1$  خواهد بود. با استفاده از فیثاغورس نیز  $CH = \sqrt{3}$  به دست می آید. حالا نسبت های زاویه های ۳۰° و ۶۰° به راحتی محاسبه می شوند:

$$\sin 60^\circ = \frac{CH}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos 60^\circ = \frac{AH}{AC} = \frac{1}{2} \quad \tan 60^\circ = \frac{CH}{AH} = \sqrt{3} \quad \cot 60^\circ = \frac{AH}{CH} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

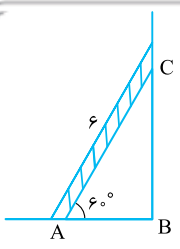
$$\sin 30^\circ = \frac{AH}{AC} = \frac{1}{2} \quad \cos 30^\circ = \frac{CH}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \tan 30^\circ = \frac{AH}{CH} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \cot 30^\circ = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}$$

#### نکته

	۳۰°	۴۵°	۶۰°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$
cot	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

جدول مقابل را به خاطر بسپارید:  
 ۱  $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$  یا  $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$ . در حالت کلی اگر جمع دو زاویه ۹۰° بشود (متمم باشند)، سینوس یکی با کسینوس دیگری برابر می شود. مثلاً چون  $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$  است،  $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$  یا  $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$ .  
 ۲ با توجه این که به  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$  =  $\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$  است، ضلع روبه رو به زاویه ۳۰° در مثلث قائم الزاویه، همواره نصف وتر است.

**مثال** نردبانی ۶ متری که با زمین زاویه ۶۰° می سازد را به دیواری تکیه داده ایم. الف) فاصله پای نردبان از دیوار (AB) چه قدر است؟



ب) اگر از نردبان بالا برویم، تا چه ارتفاعی از دیوار (BC) بالا رفته ایم؟

**پاسخ الف)** برای به دست آوردن AB، نسبت مثلثاتی مناسب را می نویسیم. ضلع مجاور به زاویه A است؛ پس از نسبت کسینوس استفاده می کنیم:

$$\cos 60^\circ = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AB}{6} \Rightarrow AB = 3$$

**پ ب)** BC ضلع مقابل به زاویه A است، پس می توانیم از سینوس یا تانژانت استفاده کنیم:

$$\sin 60^\circ = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{6} \Rightarrow BC = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

**مثال:** یک جاده کوهستانی شبیه شکل زیر است. زاویه جاده سربلایی و سربایینی با سطح زمین به ترتیب  $45^\circ$  و  $30^\circ$  و طول جاده سربایینی ۱۲ کیلومتر است.

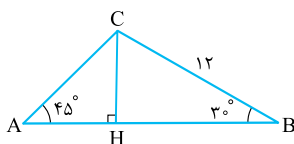


(الف) ارتفاع قله را به دست آورید.

(ب) طول جاده سربلایی را به دست آورید.

(پ) طول تونل احداث شده بین دو نقطه A و B چه قدر است؟

**پاسخ:** ابتدا یک مثلث به صورت زیر رسم می‌کنیم. برای این که مثلث قائم‌الزاویه درست کنیم، از C بر AB عمود می‌کنیم. از مثلث BHC شروع می‌کنیم. چون یک ضلع و یک زاویه آن داده شده است:



$$\sin 30^\circ = \frac{CH}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{CH}{12} \Rightarrow CH = 6 \text{ (ارتفاع قله)}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{CH}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{6}{AC} \Rightarrow AC = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$$

پس طول AH و BH را به دست می‌آوریم:  $AB = AH + HB$

$$\left. \begin{aligned} \Delta BHC : \cos 30^\circ = \frac{BH}{BC} &\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BH}{12} \Rightarrow BH = 12 \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \\ \Delta AHC : \tan 45^\circ = \frac{CH}{AH} &\Rightarrow 1 = \frac{6}{AH} \Rightarrow AH = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB = 6 + 6\sqrt{3}$$

**مثال:** حاصل  $A = 2 \sin 30^\circ + \frac{\tan 45^\circ}{2} + \cos^2 45^\circ$  را به دست آورید.

**پاسخ:**  $2 \sin 30^\circ$  یعنی ابتدا  $\sin 30^\circ$  را به دست آورده و در ۲ ضرب می‌کنیم، پس:  $2 \sin 30^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1$

$\frac{\tan 45^\circ}{2}$  یعنی ابتدا  $\tan 45^\circ$  را نوشته و حاصل را بر ۲ تقسیم می‌کنیم، یعنی:  $\frac{\tan 45^\circ}{2} = \frac{1}{2}$

$\cos^2 45^\circ$  یعنی  $(\cos 45^\circ)^2$ ، یعنی حاصل  $\cos 45^\circ$  را به توان ۲ می‌رسانیم، یعنی:  $\cos^2 45^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

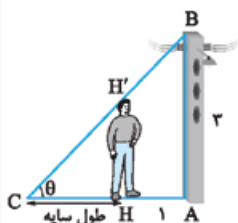
توجه دارید که توان دوم کجا گذاشته می‌شود. در حالت کلی:  $\cos^2 \theta = (\cos \theta)^2$ .



**مثال:** شخصی با قد  $1/8$  سانتی‌متر در فاصله ۱ متری از یک تیر چراغ برق به ارتفاع ۳ متر

ایستاده است. طول سایه این شخص چه قدر است؟

**پاسخ:** وضعیت اولیه شخص به صورت مقابل است:

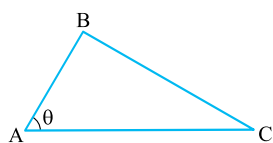


$$\tan \theta = \frac{HH'}{CH} = \frac{1/8}{CH}$$

$$\tan \theta = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{1+CH}$$

$$\frac{1/8}{CH} = \frac{3}{1+CH} \Rightarrow 1/8 + 1/8 CH = 3CH \Rightarrow 1/8 = 1/2 CH \Rightarrow CH = \frac{1/8}{1/2} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

### مساحت مثلث با استفاده از سینوس



مثلث ABC را در نظر بگیرید. می‌دانیم  $S_{ABC} = \frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{2} = \frac{BH \times AC}{2}$

از طرفی  $\sin \theta = \frac{BH}{AB}$  پس  $BH = AB \sin \theta$ . با جای‌گذاری در رابطه بالا داریم:

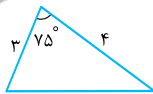
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} (AB)(AC) \sin \theta \text{ (سینوس زاویه بین دو ضلع)} \times \text{(حاصل ضرب دو ضلع)} = \frac{1}{2} (AB)(AC) \sin \theta$$

$$S_{ABC} = \frac{(AB \sin \theta)(AC)}{2} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \theta$$

### نکته

این رابطه وقتی زاویه  $\theta$  منفرجه باشد هم کار می‌کند، چون جلوتر نشان می‌دهیم دو زاویه مکمل، سینوس‌های برابر دارند.

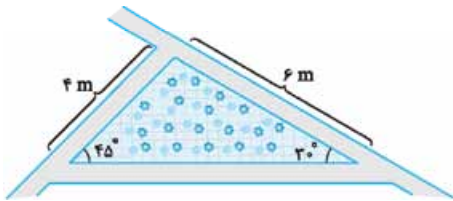




**مثال** با استفاده از ماشین حساب  $\sin 75^\circ \approx 0.96$  به دست می‌آید. مساحت مثلث مقابل را بیابید.

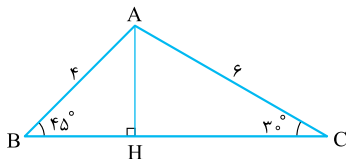
$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sin 75^\circ = 6 \times 0.96 = 5.76$$

**پاسخ**



**مثال** محوطه گلکاری شده‌ای به شکل مثلث، بین چند پیاده‌رو ساخته شده است. مساحت محوطه را به دست آورید. ( $\sqrt{6}$  را تقریباً  $2/5$  بگیرد).

**پاسخ** شکل زیر را رسم می‌کنیم. اگر BH و HC را به دست آوریم، طول ضلع BC به دست می‌آید. سپس می‌توانیم از رابطه مساحت استفاده کنیم:



$$\cos 45^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{BH}{6} \Rightarrow BH = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{HC}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{HC}{6} \Rightarrow HC = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

پس:  $BC = BH + HC = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$  . حالا:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times 6 \times (3\sqrt{2} + 3\sqrt{3}) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}(2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}) = 4 + 3\sqrt{6} = 4 + 3(2/5) = 11/5$$

متر مربع  $11/5$

**تذکره**  $\hat{A} = 105^\circ$  بنابراین  $S_{ABC} = \frac{1}{2}(AB)(AC)\sin 105^\circ$ . اگر  $\sin 105^\circ$  در مسئله داده شده بود، می‌توانستیم از این راه نیز مساحت مثلث را به دست آوریم.

### در امتحان چه خبر؟

**تیب ۱** یک شکل که معمولاً دارای زوایای معروف است به شما می‌دهند و طول پاره‌خطها را می‌خواهند. نسبت مثلثاتی مناسب را بنویسید و آن‌ها را به دست آورید.

**حالاتوخل کن** سؤال‌های ۱ و ۲ و ۱۰ تا ۲۵ و ۳۴

**تیب ۲** نسبت‌های مثلثاتی زوایای معروف را به خاطر داشته باشید. یک عبارت برحسب آن‌ها داده می‌شود و شما باید حاصل آن را به دست آورید.

**حالاتوخل کن** سؤال‌های ۳ تا ۹

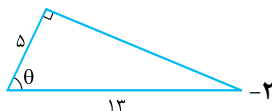
**تیب ۳** مساحت مثلث یا شکلی که چندتا مثلث در آن ایجاد می‌شود، خواسته می‌شود که باید از فرمول مساحت مثلث (که  $\sin \theta$  دارد) استفاده کنید.

**حالاتوخل کن** سؤال‌های ۲۶ تا ۳۳

## سؤال‌های امتحانی

(مشابه تمرین کتاب درسی)

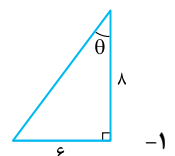
در هر شکل، جای خالی را تکمیل کنید.



$$\sin \theta = \dots \quad \cos \theta = \dots$$

$$\tan \theta = \dots \quad \cot \theta = \dots$$

$$-\sin^2 30^\circ = \frac{1}{4} \quad -4$$



$$\sin \theta = \dots \quad \cos \theta = \dots$$

$$\tan \theta = \dots \quad \cot \theta = \dots$$

درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

$$\sin 20^\circ = \cos 70^\circ \quad -3$$

$$(\tan 45^\circ) \sin 30^\circ = \cos 60^\circ \quad -5$$

حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ \quad -6$$

$$1 - 2 \sin^4 30^\circ + \frac{\cos^2 30^\circ}{2} \quad -8$$

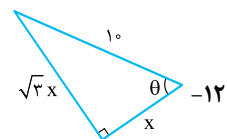
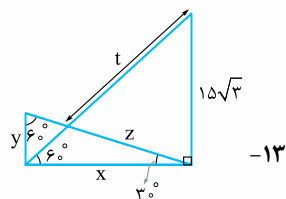
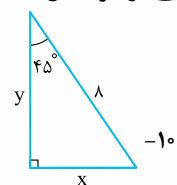
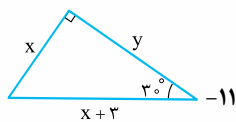
(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

$$\tan 30^\circ \cot 30^\circ + \sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ \quad -7$$

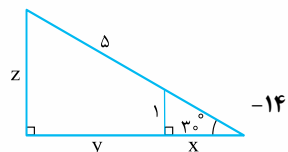
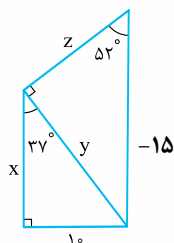
$$\frac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 30^\circ} \quad -9$$

(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

در هر شکل  $x, y, z, t$  را به دست آورید.

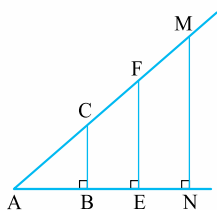


$\sin 37^\circ \approx 0/6$   
 $\cos 37^\circ \approx 0/8$   
 $\tan 52^\circ \approx 1/28$

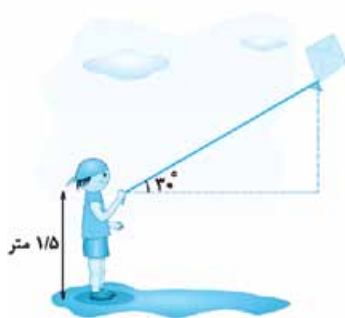


(مشابه تمرین کتاب درسی)

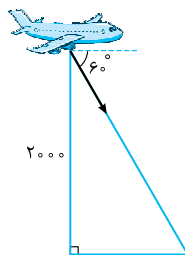
۱۶- در شکل مقابل نشان دهید  $\frac{BC}{AB} = \frac{FE}{AE} = \frac{MN}{AN}$



۱۷- فردی مطابق شکل بادبادکی را به هوا فرستاده است. اگر طول نخ بادبادک ۱۰۰ متر باشد، ارتفاع بادبادک از زمین، چه قدر است؟  
(مشابه تمرین کتاب درسی)

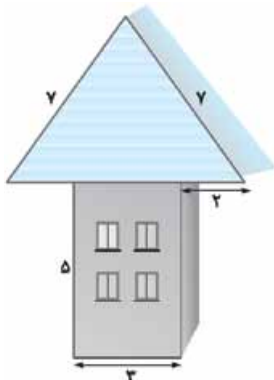


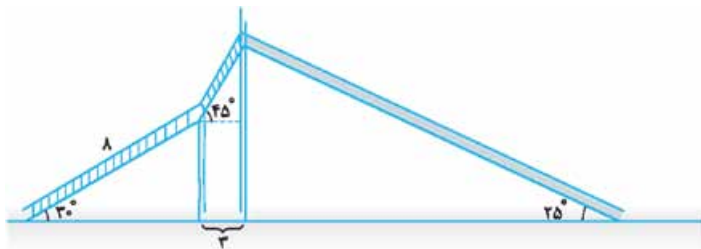
۱۸- هواپیمایی در ارتفاع ۲۰۰۰ متری در حال پرواز است. این هواپیما با زاویه  $6^\circ$  نسبت به سطح افق، شروع به فرود می‌کند. این هواپیما تا رسیدن به سطح زمین چه مسیری را طی می‌کند؟  
(مشابه تمرین کتاب درسی) ( $\sqrt{3} \approx 1/7$ )



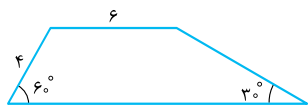
۱۹- خانه‌ای به صورت مقابل ساخته شده است.

الف) زاویه‌ای که شیروانی با سطح افق می‌سازد، چه قدر است؟  
ب) نوک شیروانی چه ارتفاعی از سطح زمین دارد؟

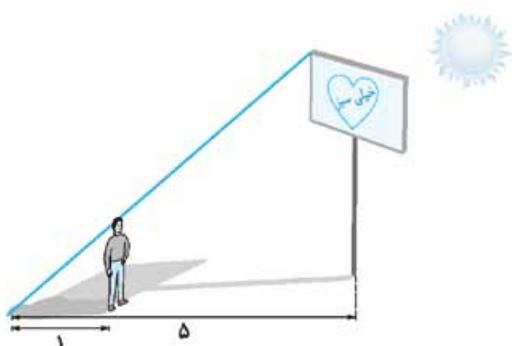




۲۰- برای رسیدن به بالای یک سرسره، باید از دو پلکان به شکل مقابل عبور کرد. طول و ارتفاع سرسره چه قدر است؟ ( $\sin 25^\circ \approx 0/42$ )

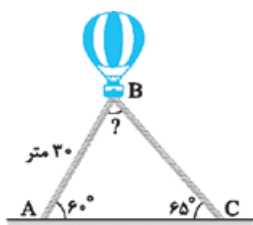


۲۱- محیط و مساحت دوزنقهٔ مقابل را به دست آورید.

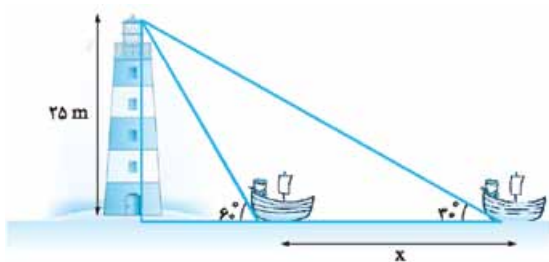


۲۲- سایهٔ یک تابلوی تبلیغاتی در ساعتی از روز ۵ متر است. فردی با قد ۱۶۰ cm در مقابل این تابلو در همان ساعت از روز فرار می‌گیرد. اگر طول سایهٔ این فرد ۱ متر باشد، ارتفاع تابلوی تبلیغاتی چه قدر است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۲۳- در مثلث قائم‌الزاویهٔ  $ABC$  ( $\hat{B} = 90^\circ$ )، اگر  $\cos A = \frac{2}{3}$  و  $b = 6$  باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ  $A$  را مشخص کنید. (b ضلع روبه‌روی زاویهٔ  $B$  است.)



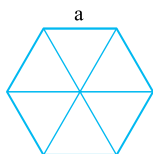
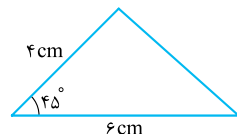
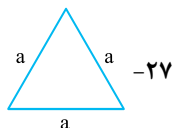
۲۴- یک بالن اطلاع‌رسانی توسط دو طناب به زمین بسته شده است. طول یکی از طناب‌ها ۳۰ متر است. طول طناب دوم را به دست آورید. ( $\sin 65^\circ \approx 0/85$ )



۲۵- قایقی با چنان فاصله‌ای نسبت به فانوس دریایی ایستاده است که با زاویهٔ  $60^\circ$  نوک فانوس را مشاهده می‌کند. این قایق مقداری از فانوس دور می‌شود به طوری که در نقطهٔ جدید، نوک فانوس با زاویهٔ  $30^\circ$  دیده شود. اگر ارتفاع فانوس ۲۵ متر باشد، این قایق حدوداً چند متر به عقب حرکت کرده است؟ ( $\sqrt{3} \approx 1/7$ )

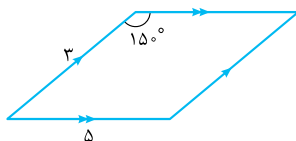
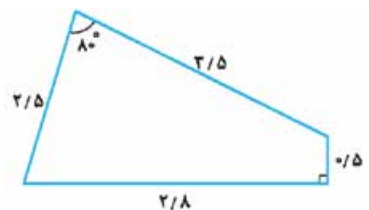
(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

مساحت هر شکل را به دست آورید.



۲۷- مساحت هر شکل را به دست آورید.

۲۸- مساحت هر شکل را به دست آورید.



۲۹- مساحت هر شکل را به دست آورید.

۳۰- مساحت هر شکل را به دست آورید.



۳۲- مساحت یک مثلث  $5\sqrt{2}$  سانتی متر مربع است. اگر دو ضلع آن ۴ و ۵ باشد، کوچک ترین زاویه بین دو ضلع را به دست آورید.

(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

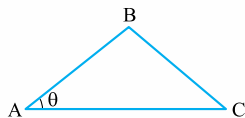
۳۳- مساحت متوازی الاضلاعی که طول دو قطر آن ۱۰ و ۱۲ و زاویه بین آن‌ها  $60^\circ$  است را به دست آورید. (راهنمایی: در درس بعدی نشان می‌دهیم، دو زاویه مکمل، سینوس‌های برابر دارند.)

۳۴- در مثلث ABC داریم:  $\hat{A} = 90^\circ$ . با محاسبه دو طرف رابطه  $\frac{\cos^2 B + \sin^2 C}{1 - \sin^2 C} = 2 \tan^2 C$  نشان دهید تساوی برقرار است.

۳۵- الف) سه مثلث قائم‌الزاویه با یک زاویه  $30^\circ$  رسم کنید و ثابت کنید  $\sin 30^\circ$  در هر سه مثلث برابر است.

ب) نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $70^\circ$  را با استفاده از نقاله و خطکش به دست آورید و با اعداد به دست آمده از ماشین حساب مقایسه کنید.

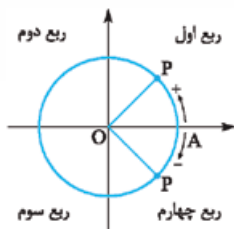
۳۶- ثابت کنید  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(AB)(AC)\sin \theta$



## ۲ دایره مثلثاتی

نسبت‌های مثلثاتی را در مثلث و برای زاویه‌های حاده معرفی کردیم. برای این که بتوانیم، نسبت‌ها را برای هر زاویه‌ای معرفی کنیم، دایره مثلثاتی را تعریف می‌کنیم.

### دایره مثلثاتی و نمایش زاویه روی آن



دایره‌ای به شعاع یک که مرکز آن روی مبدأ مختصات است را **دایره مثلثاتی** می‌گوییم.

#### جهت مثبت و منفی مثلثاتی

ضلع OA برای زاویه ثابت است. اگر نقطه P در خلاف جهت عقربه‌های ساعت (از A) شروع به حرکت کند، زاویه مثبت AOP به دست می‌آید. اگر نقطه P در جهت عقربه‌های ساعت حرکت کند، زاویه منفی به دست خواهد آمد.

**مثال:** هر زاویه را روی دایره مثلثاتی رسم کنید.

- |                 |               |                |                |
|-----------------|---------------|----------------|----------------|
| الف) $60^\circ$ | ب) $15^\circ$ | پ) $27^\circ$  | ت) $42^\circ$  |
| ث) $-30^\circ$  | ج) $-9^\circ$ | چ) $-18^\circ$ | ح) $-24^\circ$ |

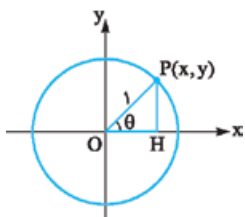
**پاسخ:**

 $60^\circ$	 $15^\circ$	 $27^\circ$	 $42^\circ$
 $-30^\circ$	 $-9^\circ$	 $-18^\circ$	 $-24^\circ$

**تکرار:** بعد از یک چرخش  $360^\circ$ ، دوباره روی زاویه صفر قرار می‌گیریم، بنابراین نمایش زاویه‌های  $360^\circ$  با  $60^\circ$  روی دایره یکسان است یا نمایش زاویه  $60^\circ$  با  $360^\circ + 60^\circ = 420^\circ$  تفاوتی نمی‌کند.

### تعریف نسبت‌های مثلثاتی زاویه $\theta$

فرض کنید نقطه دلخواهی روی دایره مثلثاتی بوده و زاویه تشکیل شده را  $\theta$  می‌نامیم. از نقطه P خطی را بر محور X ها عمود می‌کنیم. در مثلث OPH



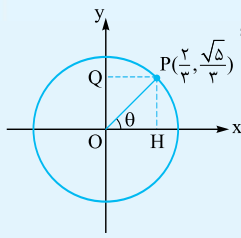
$$\sin \theta = \frac{PH}{OP} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos \theta = \frac{OH}{OP} = \frac{x}{1} = x$$

$$\tan \theta = \frac{PH}{OH} = \frac{y}{x}$$

$$\cot \theta = \frac{OH}{PH} = \frac{x}{y}$$

اگر  $\theta$  در نواحی دیگر دستگاه مختصات هم قرار گیرد، همین تعریف را برای آن‌ها در نظر می‌گیریم؛ یعنی اگر نقطه  $P(x, y)$  زاویه  $\theta$  را به وجود آورد،  $\sin \theta$  همان عرض نقطه  $P$ ،  $\cos \theta$  همان طول نقطه  $P$ ،  $\tan \theta$  نسبت عرض به طول نقطه  $P$  و  $\cot \theta$  عکس نسبت تانژانت خواهد بود. مثلاً اگر نقطه  $P(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3})$  که روی دایره قرار دارد، زاویه  $\theta$  را به وجود آورد:



$$\begin{aligned} \sin \theta &= P \text{ عرض نقطه} = y = \frac{\sqrt{5}}{3} & \cos \theta &= P \text{ طول نقطه} = \frac{2}{3} \\ \tan \theta &= \frac{y}{x} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2} & \cot \theta &= \frac{x}{y} = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

## محور کسینوس‌ها

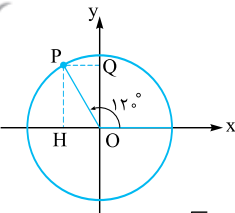
در مثال بالا نقطه  $H$ ، همان  $x$  نقطه  $P$  یعنی  $\frac{2}{3}$  یا  $\cos \theta$  است؛ به همین دلیل محور  $x$  ها را محور کسینوس‌ها نیز می‌نامند. در واقع اگر نقطه  $P$  را روی محور  $x$  ها تصویر کنیم، نقطه به دست آمده همان  $\cos \theta$  خواهد بود ( $H = \cos \theta$ ).

## محور سینوس‌ها

نقطه  $Q$  نیز همان  $y$  نقطه  $P$  یعنی  $\frac{\sqrt{5}}{3}$  یا  $\sin \theta$  است، به همین دلیل محور  $y$  ها را محور سینوس‌ها نیز می‌نامند؛ به عبارت دیگر اگر نقطه  $P$  را روی محور  $y$  ها تصویر کنیم، نقطه به دست آمده همان  $\sin \theta$  خواهد بود ( $Q = \sin \theta$ ).

- اگر  $\theta$  در سایر ربع‌ها قرار گیرد، ممکن است نسبت‌ها منفی هم باشند، چون طول و عرض نقاط، ممکن است منفی شوند.
- چون شعاع دایره ۱ است، برای هر زاویه  $\theta$ ، داریم  $-1 \leq \sin \theta \leq 1$  و  $-1 \leq \cos \theta \leq 1$  اما  $\tan \theta$  و  $\cot \theta$  هر عدد حقیقی می‌توانند باشند.
- $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ ،  $\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

می‌دانیم نقطه  $P(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  روی دایره مثلثاتی قرار داشته و زاویه ایجاد شده  $120^\circ$  است. نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $120^\circ$  را به دست آورید.

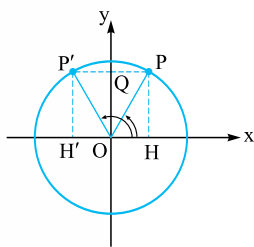


$$\sin 120^\circ = y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = x = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^\circ = \frac{y}{x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

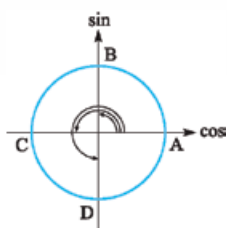
$$\cot 120^\circ = \frac{x}{y} = -\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$



توجه دارید که  $H = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$  و  $Q = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$  می‌باشد. سؤال مهمی در این جا وجود دارد. آیا بدون داشتن مختصات نقطه  $P$  می‌توانستید نسبت‌های زاویه  $120^\circ$  را به دست آورید؟  
زاویه  $60^\circ$  و  $120^\circ$  را در دایره مثلثاتی رسم می‌کنیم. تصویر هر دو نقطه  $P$  و  $P'$  روی محور سینوس‌ها (محور  $y$  ها) یکسان است، یعنی  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  یعنی  $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . اما دو نقطه  $H$  و  $H'$  قرینه یکدیگرند. همان  $\cos 60^\circ$  یعنی  $\frac{1}{2}$  است، پس  $H' = \frac{1}{2}$  و لذا  $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$  خواهد بود. به عبارت دیگر نسبت‌های زاویه  $120^\circ$  از روی نسبت‌های زاویه  $60^\circ$  به راحتی به دست می‌آید.

- اگر دو زاویه مکمل باشند، تصویر نقطه  $P$  روی محور  $y$  ها یکسان شده و لذا دو زاویه، سینوس‌های برابر ولی کسینوس‌های قرینه دارند. مثلاً  $\sin 13^\circ = \sin 5^\circ$  ولی  $\cos 13^\circ = -\cos 5^\circ$ .
- دو زاویه مکمل، تانژانت و کتانژانت‌های قرینه دارند. مثلاً  $\tan 135^\circ = -\tan 45^\circ = -1$  و  $\cot 135^\circ = -\cot 45^\circ = -1$ .

## دسیمه‌های مثلثاتی زاویه‌های ۰، ۹۰، ۱۸۰ و ۲۷۰ درجه



۱ اگر  $A = (1, 0)$  باشد، زاویه  $0^\circ$  به دست می‌آید، پس:

$$\sin 0^\circ = y_A = 0, \cos 0^\circ = x_A = 1, \tan 0^\circ = \frac{y_A}{x_A} = 0, \cot 0^\circ = \frac{x_A}{y_A} = \frac{1}{0}$$

۲ اگر  $B = (0, 1)$  باشد، زاویه  $90^\circ$  به دست می‌آید، پس:

$$\sin 90^\circ = y_B = 1, \cos 90^\circ = x_B = 0, \tan 90^\circ = \frac{y_B}{x_B} = \frac{1}{0}, \cot 90^\circ = \frac{x_B}{y_B} = 0$$

۳ اگر  $C = (-1, 0)$  باشد، زاویه  $180^\circ$  به دست می‌آید، پس:

$$\sin 180^\circ = y_C = 0, \cos 180^\circ = x_C = -1, \tan 180^\circ = \frac{y_C}{x_C} = 0, \cot 180^\circ = \frac{x_C}{y_C} = \frac{-1}{0}$$

۴ اگر  $D = (0, -1)$  باشد، زاویه  $270^\circ$  به دست می‌آید، پس:

$$\sin 270^\circ = y_D = -1, \cos 270^\circ = x_D = 0, \tan 270^\circ = \frac{y_D}{x_D} = \frac{-1}{0}, \cot 270^\circ = \frac{x_D}{y_D} = 0$$

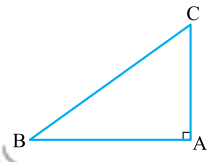
### نکته

سینوس در نقاط  $A$  و  $C$  (صفر و  $180^\circ$ ) و کسینوس در نقاط  $B$  و  $D$  ( $90^\circ$  و  $270^\circ$ ) برابر با صفر می‌شوند. (سعی کن یاد بگیری و هر موقع فواستی به دست بیار، نه این‌که فقط کنی!)

پس جمع‌بندی این شد که:

$\theta$	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	(همان صفر درجه) $360^\circ$
$\sin \theta$	0	1	0	-1	0
$\cos \theta$	1	0	-1	0	1
$\tan \theta$	$\frac{0}{1} = 0$	تعریف نشده $\frac{1}{0}$	0	تعریف نشده $\frac{-1}{0}$	0
$\cot \theta$	تعریف نشده $\frac{1}{0}$	0	تعریف نشده $\frac{-1}{0}$	0	تعریف نشده

(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)



**مثال:** در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  با زاویه  $(A = 90^\circ)$ ،  $\cos^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{C} = ?$

**پاسخ:**  $\cos \hat{A} = 0$  از طرفی  $B$  و  $C$  متمم هستند، پس  $\cos \hat{C} = \sin \hat{B}$  بنابراین داریم:

$$\cos^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{C} = 0 + \cos^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{B} = 1$$

## علامت دسیمه‌ها در ربع‌های مختلف

**علامت سینوس:** اگر مختصات نقطه  $P(x, y)$  باشد،  $\sin \theta = y$ ، در ربع اول و دوم مثبت است و در ربع سوم و چهارم منفی است، پس اگر  $\theta$  زاویه‌ای در ربع اول یا دوم باشد،  $\sin \theta$  عددی مثبت و اگر  $\theta$  در ربع سوم یا چهارم باشد،  $\sin \theta$  عددی منفی است.

**علامت کسینوس:** طول نقاط  $(x)$  در ربع اول و چهارم مثبت و در ربع دوم و سوم منفی است، پس  $\cos \theta$  در ربع اول و چهارم مثبت و در ربع دوم و سوم منفی خواهد بود.

**علامت تانژانت و کتانژانت:**  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$  است، پس از ضرب علامت‌های  $\sin \theta$  و  $\cos \theta$ ، علامت  $\tan \theta$  به دست می‌آید.  $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$  است، بنابراین علامت  $\cot \theta$  با علامت  $\tan \theta$  فرقی نمی‌کند.

	ربع اول $x, y > 0$	ربع دوم $x < 0$ و $y > 0$	ربع سوم $x, y < 0$	ربع چهارم $x > 0$ و $y < 0$
$\sin \theta$	+	+	-	-
$\cos \theta$	+	-	-	+
$\tan \theta$	+	-	+	-
$\cot \theta$	+	-	+	-
	↓	↓	↓	↓
	همه مثبت	فقط سینوس مثبت	تانژانت و کتانژانت مثبت	فقط کسینوس مثبت



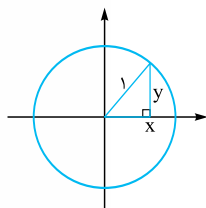
**مثال** علامت نسبت‌های مثلثاتی، زاویه  $1395^\circ$  را مشخص کنید.

**پاسخ** هر  $36^\circ$  که چرخش کنیم، برمی‌گردیم سر جای اول. با تقسیم  $1395$  بر  $36^\circ$  داریم:  $1395 = 3(36^\circ) + 315$   
 ۳ دور کامل را کنار می‌گذاریم و  $315^\circ$  از صفر طی می‌کنیم، پس در ربع چهارم قرار می‌گیریم، پس اگر  $\theta = 1395^\circ$  باشد،  $\cos \theta > 0$  و سایر نسبت‌ها منفی هستند.

**مثال**  $\theta$  زاویه‌ای است که  $\sin \theta \tan \theta > 0$  و  $\cot \theta < 0$  در کدام ربع قرار دارد؟

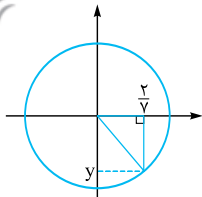
**پاسخ**  $\sin \theta \tan \theta > 0$  یعنی  $\sin \theta$  و  $\tan \theta$  هم‌علامت هستند، بنابراین  $\theta$  می‌تواند در ربع اول یا چهارم باشد.  $\cot \theta < 0$  است، پس  $\theta$  در ربع دوم یا چهارم است. برای این که هر دو شرط برقرار گردد،  $\theta$  باید در ربع چهارم باشد.

### به دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی از روی یک دایره



اگر یکی از نسبت‌ها داده شده باشد، می‌توان سایر نسبت‌ها را از روی آن به دست آورد. با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم:  $x^2 + y^2 = 1$ . از طرفی  $x = \cos \theta$  و  $y = \sin \theta$  است. حالا با داشتن یکی از نسبت‌های سینوس یا کسینوس و قراردادن در این رابطه و توجه به علامت نسبت‌ها، می‌توان سایر نسبت‌ها را به دست آورد. به مثال زیر توجه کنید:

**مثال** اگر  $\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$  و  $\theta$  در ربع چهارم باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $\theta$  و مختصات نقطه  $P$  روی دایره را به دست آورید.



**پاسخ**

$$\cos \theta = x = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \frac{4}{5} + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{1}{5}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$$

چون  $\theta$  در ربع چهارم قرار دارد، مقدار منفی برای  $y$  قابل قبول است، پس  $\sin \theta = y = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ . حالا  $P(x, y) = P(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{\sqrt{5}}{5})$  به دست می‌آید.

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{5}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = -\frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{و} \quad \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{-\frac{\sqrt{5}}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

از طرفی:

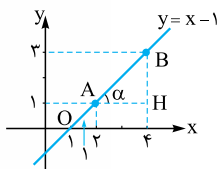
**مثال** اگر  $\tan \theta = \frac{3}{4}$  و  $\theta$  در ربع سوم باشد، سایر نسبت‌ها را به دست آورید.

**پاسخ**  $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{4}{3}$ ، اما برای سایر نسبت‌ها:  $\tan \theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{y}{x} \Rightarrow 3x = 4y \Rightarrow x = \frac{4}{3}y$

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow (\frac{4}{3}y)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \frac{16}{9}y^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \frac{25}{9}y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{9}{25}} = \pm \frac{3}{5}$$

چون  $\theta$  در ربع سوم است، جواب  $y < 0$  قابل قبول است، پس  $y = \sin \theta = -\frac{3}{5}$  و  $\cos \theta = x = \frac{4}{3}(-\frac{3}{5}) = -\frac{4}{5}$ . مختصات نقطه  $P(x, y) = (-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$  به دست می‌آید.

### ارتباط شیب خط و تانژانت

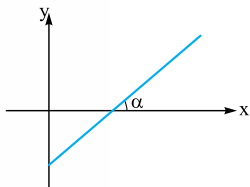


نقاط  $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$  را روی خط  $y = x - 1$  در نظر بگیرید. شیب این خط برابر ۱ است، چون  $m_{AB} = \frac{3-1}{4-2} = 1$ .

$$\text{شیب خط} = m = \frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}}$$

همچنین  $\tan \alpha = \frac{BH}{AH}$  به عبارت دیگر  $\tan \alpha$  با شیب خط  $AB$  برابر است. طبق قضیه خطوط موازی و مورب  $\hat{O}_1 = \alpha$ ، پس  $\alpha = 45^\circ \Rightarrow \tan \alpha = 1 = \text{شیب خط}$  در حالت کلی داریم:

اگر زاویه بین یک خط و جهت مثبت محور  $x$ ‌ها برابر  $\alpha$  باشد، شیب خط برابر با  $\tan \alpha$  خواهد بود. اگر  $\alpha$  زاویه منفرجه باشد، شیب خط یا همان  $\tan \alpha$  منفی خواهد بود.  $\text{شیب خط} = m = \tan \alpha$



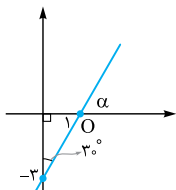
**مثال:** خط  $1 = \sqrt{3}x - 3y$  محور  $x$  ها را با کدام زاویه قطع می کند؟

**پاسخ:** ابتدا معادله خط را استاندارد می کنیم تا شیب خط به دست آید:

$$3y - \sqrt{3}x = 1 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{1}{3}$$

شیب خط برابر  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  است، پس  $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$  و در نتیجه  $\alpha = 30^\circ$  خواهد بود.

**مثال:** معادله خط مقابل را بنویسید.



**پاسخ:**  $\hat{O}_1 = 60^\circ$ ، پس  $\alpha = 60^\circ$  به دست می آید.  $\tan \alpha = \sqrt{3}$  = شیب خط و عرض از مبدأ آن  $-3$  است، بنابراین معادله خط

$$y = \sqrt{3}x - 3 \text{ خواهد بود.}$$

### در امتحان چه خبر؟

**تیب ۱:** یک نقطه روی دایره مثلثاتی داده می شود. از روی مختصات آن  $(x_p, y_p)$  سینوس و کسینوس و سایر نسبت ها به دست می آید. (یادتان هست که  $x_p = \cos \theta$  و  $y_p = \sin \theta$ )

**حالاتوکل کن:** سؤال های ۴۷ تا ۵۴

**تیب ۲:** یک رابطه مثلثاتی داده می شود و علامت  $\theta$  خواسته می شود. با توجه به علامت نسبت ها در ربع های مختلف علامت  $\theta$  به دست می آید.

**حالاتوکل کن:** سؤال های ۳۷ تا ۴۶

**تیب ۳:** با توجه به برابری شیب خط و  $\tan \alpha$  معادله خط از شما خواسته می شود یا این که  $\tan \alpha$  داده شده و مجهولی در معادله خط وجود دارد. در همه آن ها کافی است  $m = \tan \alpha$  قرار دهید.

**حالاتوکل کن:** سؤال های ۶۷ تا ۷۷ و ۸۱

**تیب ۴:** با توجه به محورهای سینوس و کسینوس مقایسه نسبت ها از شما خواسته می شود.

**حالاتوکل کن:** سؤال های ۵۵ تا ۶۶ و ۷۸ و ۸۲ و ۸۳

## سؤال های امتحانی

در جای خالی عبارتهای مناسب قرار دهید.

۳۷- اگر  $\theta$  زاویه ای در ربع ..... و ..... باشد،  $\cos \theta$  مثبت است.

۳۸-  $\cos 90^\circ = \dots\dots\dots$ ،  $\sin 27^\circ = \dots\dots\dots$  و  $\tan 18^\circ = \dots\dots\dots$

۳۹- اگر  $(-\frac{1}{\sqrt{48}}, \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{48}})$  نقطه ای روی دایره مثلثاتی باشد،  $\sin \theta = \dots\dots\dots$  و  $\cos \theta = \dots\dots\dots$ .

درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

۴۰-  $0 \leq \sin^2 \theta \leq 1$

۴۱- اگر  $18^\circ < \theta < 90^\circ$  آن گاه  $\sin \theta < 0$  و  $\cos \theta > 0$

۴۲- اگر  $P(x, y)$  نقطه ای روی دایره مثلثاتی باشد،  $x^2 + y^2 = 0$ .

۴۳- زاویه های داده شده را روی دایره مثلثاتی رسم کنید.

الف)  $225^\circ$  (ب)  $77^\circ$  (پ)  $-3^\circ$

ت)  $-12^\circ$  (ث)  $-300^\circ$  (ج)  $-9^\circ$

۴۴- مشخص کنید زاویه  $\theta$  در کدام ربع قرار دارد و سپس علامت نسبت های مثلثاتی را برای آن زاویه بیابید.

الف)  $127^\circ$  (ب)  $313^\circ$  (پ)  $-24^\circ$  (ت)  $-63^\circ$

ث)  $200^\circ$  (ج)  $-73^\circ$  (چ)  $54^\circ$  (ح)  $-27^\circ$

۴۵- در کدام ربع مثلثاتی  $\sin \theta > 0$  و  $\tan \theta < 0$  خواهد بود؟

۴۶- در کدام ربع مثلثاتی  $\sin \theta \cot \theta > 0$  ولی  $\tan \theta < 0$  است؟

در هر قسمت، نقطه  $P$  روی دایره مثلثاتی قرار دارد. نسبت های مثلثاتی زاویه به دست آمده را مشخص کنید.

۴۷-  $P(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5})$  (ب)  $P(-\frac{24}{25}, \frac{7}{25})$  -۴۸

(مشابه تمرین کتاب درسی)

(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

در هر قسمت، با توجه به نسبت داده شده و این که  $\theta$  در کدام ربع قرار دارد، سایر نسبت ها را به دست آورید.

۴۹-  $\cos \theta = \frac{4}{5}$  ( $\theta$  در ربع اول) -۵۰ ( $\theta$  در ربع دوم)  $\cos \theta = -\frac{1}{6}$

ردیف	آزمون جمع‌بندی فصل دوم	رشته: تجربی و ریاضی	مدت امتحان: ۶۰ دقیقه	Kheilisabz.om	نمره
۱	جای خالی را با عبارت‌های مناسب تکمیل کنید. الف) اگر نقطه $(-\frac{1}{\sqrt{y}}, \frac{4\sqrt{3}}{y})$ روی دایره مثلثاتی باشد، $\sin \theta = \dots\dots\dots$ ب) اگر $\cos^2 \theta \tan \theta > 0$ و $\sin \theta < 0$ باشد، $\theta$ در ربع $\dots\dots\dots$ است. پ) اگر $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{3}$ باشد، $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \dots\dots\dots$ ت) زاویه خط $y = \sqrt{3}x + b$ با جهت مثبت محور $x$ ‌ها برابر $\dots\dots\dots$ است.				۱
۲	در شکل مقابل طول $AB$ را بیابید.				۱/۵
۳	مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر $10$ داریم که در آن کسینوس یک زاویه حاده $8/10$ است. مساحت مثلث را به دست آورید.				۱/۵
۴	می‌دانیم نقطه $P(\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}})$ روی دایره مثلثاتی قرار دارد. نسبت‌های مثلثاتی زاویه به دست آمده را مشخص کنید.				۱/۵
۵	حداقل و حداکثر عبارت $2 - 3 \sin^2 x$ را به دست آورید.				۰/۵
۶	اگر $30^\circ < \alpha < 120^\circ$ و $\sin \alpha = \frac{1-2m}{4}$ باشد، حدود تغییرات $m$ را بیابید.				۱
۷	اگر $x$ زاویه‌ای در ناحیه دوم باشد و $\cos x = \frac{-3}{5}$ ، سایر نسبت‌های مثلثاتی را بیابید.				۱
۸	معادله خطی بنویسید که محور عرض‌ها را در $2$ قطع کند و با جهت مثبت محور $x$ ‌ها زاویه $135^\circ$ بسازد.				۱
۹	مقدار عددی عبارت زیر را بیابید.			$\frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} + \frac{\cot^2 x}{1 + \cot^2 x}$	۱
	جمع نمرات				۱۰



# پاسخ سؤال‌های امتحانی

۱۲- ابتدا زاویه  $\theta$  را به دست می‌آوریم:

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}x}{x} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = 60^\circ \Rightarrow \cos \theta = \frac{x}{10} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 5$$

$$\Delta ACD: \tan 60^\circ = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{15\sqrt{3}}{x} \Rightarrow x = 15 \quad -13$$

$$\Delta ABC: \tan 30^\circ = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{y}{15} \Rightarrow y = \frac{15\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3}$$

$$\hat{O}_1 = \hat{O}_r = 90^\circ \xrightarrow{\Delta ODC} \sin 60^\circ = \frac{t}{15\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{t}{15\sqrt{3}} \Rightarrow t = \frac{45}{2}$$

$$\Delta ODC: \cos 60^\circ = \frac{z}{15\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{z}{15\sqrt{3}} \Rightarrow z = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$

$$\Delta ABC: \sin 30^\circ = \frac{1}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{AC} \Rightarrow AC = 2 \quad -14$$

$$\Rightarrow AF = 7$$

$$\Delta ABC: \tan 30^\circ = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{3}{\sqrt{3}} = x \Rightarrow x = \sqrt{3}$$

$$\Delta AEF: \sin 30^\circ = \frac{z}{AF} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{z}{7} \Rightarrow z = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow z = \frac{y}{2} = 7/5$$

$$\Delta AEF: \tan 30^\circ = \frac{z}{AE} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{7/5}{AE}$$

$$\Rightarrow AE = \frac{10/5}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2/5\sqrt{3}$$

$$AE = x + y \Rightarrow 2/5\sqrt{3} = y + \sqrt{3} \Rightarrow 2/5\sqrt{3} = y \quad -15$$

$$\Delta ABC: \sin 37^\circ = \frac{10}{y} \Rightarrow 0.6 = \frac{10}{y} \Rightarrow y = \frac{10}{0.6} = \frac{100}{6} = \frac{50}{3}$$

$$\Delta ABC: \cos 37^\circ = \frac{x}{y} \Rightarrow 0.8 = \frac{x}{50/3} \Rightarrow x = \frac{8}{10} \times \frac{50}{3} = \frac{40}{3}$$

$$\Delta BDC: \tan 52^\circ = \frac{y}{z} \Rightarrow 1.28 = \frac{3}{z} \Rightarrow z = \frac{3}{1.28} = \frac{300}{128} = \frac{75}{32}$$

$$\Rightarrow z = \frac{50}{1/28} = \frac{50}{128} = \frac{5000}{284} = 13$$

در همه شکل‌ها، ابتدا با قضیه فیثاغورس، طول ضلع مجهول را به دست می‌آوریم. (چون  $x$  طول ضلع است، فقط جواب مثبت قبول است.)

$$6^2 + 8^2 = x^2 \Rightarrow 100 = x^2 \Rightarrow x = 10 \quad -1$$

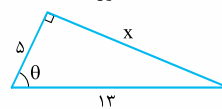
$$\sin \theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{6}{10}, \cos \theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{8}{10}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{6}{8}, \cot \theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} = \frac{8}{6}$$

$$x^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow x^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow x = 12 \quad -2$$

$$\sin \theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{12}{13}, \cos \theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{5}{13}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{12}{5}, \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{5}{12}$$



-3 درست است؛ چون  $20^\circ$  و  $70^\circ$  متمم‌اند.

-4 نادرست است؛  $-\sin^2 30^\circ = -(\frac{1}{2})^2 = -\frac{1}{4}$

-5 درست است،  $\tan 45^\circ = 1$  پس درست است. (هر دو طرف برابر می‌شود.)

$$\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ = (\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}) + (\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1 \quad -6$$

$$\tan 30^\circ \cot 30^\circ + \sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = (\frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3}) + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 1 + 1 = 2 \quad -7$$

$$1 - 2\sin^4 30^\circ + \frac{\cos^2 30^\circ}{2} = 1 - 2(\frac{1}{2})^4 + \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{2} \quad -8$$

$$= 1 - (2 \times \frac{1}{16}) + \frac{3}{2} = 1 - \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 30^\circ} = \frac{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + (\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3})} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{1+1} \quad -9$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{2 \times 3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{x}{8} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{8} \Rightarrow x = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} \quad -10$$

$$\tan 45^\circ = \frac{x}{y} \Rightarrow 1 = \frac{x}{y} \Rightarrow y = x \Rightarrow y = 4\sqrt{2}$$

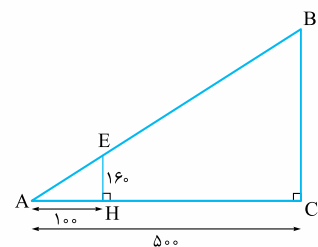
$$\sin 30^\circ = \frac{x}{x+3} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{x+3} \Rightarrow 2x = x+3 \quad -11$$

$$\Rightarrow x = 3, \cos 30^\circ = \frac{y}{x+3} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{6} \Rightarrow y = 6 \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

۲۱-  $\sin 30^\circ = \frac{h}{t} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{t} \Rightarrow t = 4\sqrt{3}$   
 $\sin 60^\circ = \frac{h}{f} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{f} \Rightarrow h = 2\sqrt{3}$   
 $\cos 30^\circ = \frac{y}{t} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{4\sqrt{3}} \Rightarrow y = 6$

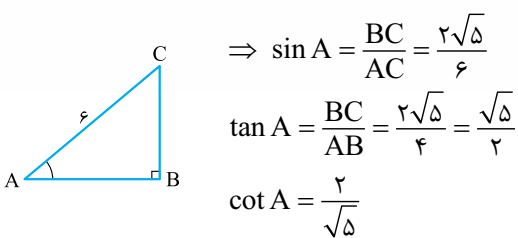


$\cos 60^\circ = \frac{x}{f} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{f} \Rightarrow x = 2$   
 محیط دوزنقه =  $4 + 6 + t + y + 6 + x = 24 + 4\sqrt{3}$   
 مساحت دوزنقه =  $\frac{(6+14) \times (2\sqrt{3})}{2} = 20\sqrt{3}$   
 ۲۲- همه اعداد را به سانتی متر تبدیل می کنیم:



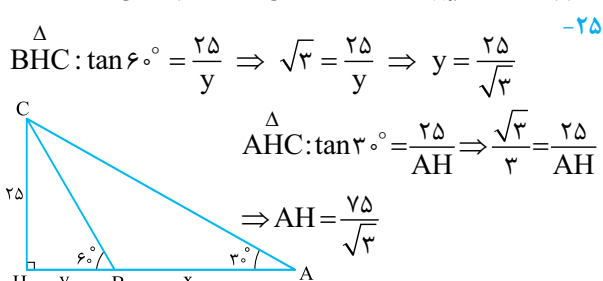
$\Delta AEH: \tan A = \frac{160}{100} \Rightarrow \frac{160}{100} = \frac{BC}{500}$   
 $\Delta ABC: \tan A = \frac{BC}{500} \Rightarrow BC = 800 \text{ cm} = 8 \text{ m}$

۲۳-  $\cos A = \frac{AB}{6} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{AB}{6} \Rightarrow AB = 4$   
 $4^2 + BC^2 = 6^2 \Rightarrow BC^2 = 20 \Rightarrow BC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$



۲۴- از B عمود رسم می کنیم:  
 $\sin 60^\circ = \frac{BH}{30} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BH}{30} \Rightarrow BH = 15\sqrt{3}$

$\sin 65^\circ = \frac{BH}{BC} \Rightarrow \frac{15}{100} = \frac{15\sqrt{3}}{BC} \Rightarrow BC = \frac{100 \times 15\sqrt{3}}{15} = 30\sqrt{3}$



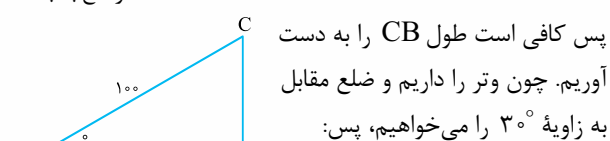
۲۵-  $\Delta BHC: \tan 60^\circ = \frac{25}{y} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{25}{y} \Rightarrow y = \frac{25}{\sqrt{3}}$   
 $\Delta AHC: \tan 30^\circ = \frac{25}{AH} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{25}{AH} \Rightarrow AH = \frac{75}{\sqrt{3}}$   
 $AH = x + y \Rightarrow \frac{75}{\sqrt{3}} = \frac{25}{\sqrt{3}} + x$   
 $\Rightarrow x = \frac{50}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{50\sqrt{3}}{3} \xrightarrow{\sqrt{3}=1.7} x \approx 28.3 \text{ m}$

۱۶- کافی است ثابت کنیم دو مثلث ABC و AFE متشابه اند، بعد تناسب اضلاع را بنویسیم.  $\hat{A} = \hat{A}$  که مشترک است. بعد  $\hat{B} = \hat{E} = 90^\circ$  پس  $\Delta ABC \cong \Delta AEF$  (ترتیب رأس ها رو به صورتی که با هم مساوی بنویس تا نسبت اضلاع رو راحت بنویسی)؛ حالا:

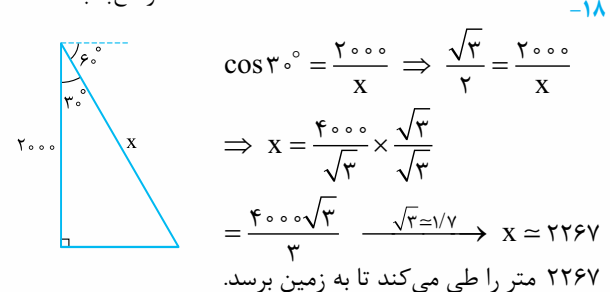
$\Delta ABC \cong \Delta AEF \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{BC}{EF} \text{ یا } \frac{BC}{AB} = \frac{EF}{AE}$

شبه همین نسبت  $\frac{MN}{AN}$  هم برابر همین می شود (اصلاً علت این که  $\tan \hat{A} = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$  تعریف می کنیم همیشه، چون این نسبت مقابل ثابت می مونه!) مجاور

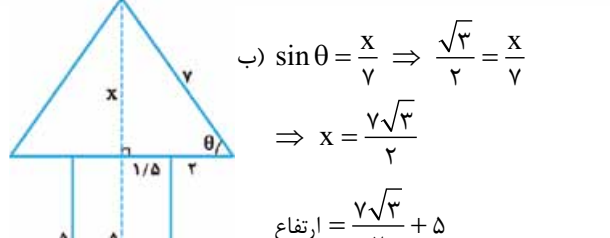
۱۷- ارتفاع بادبادک =  $CH = CB + BH = CB + 1/5$



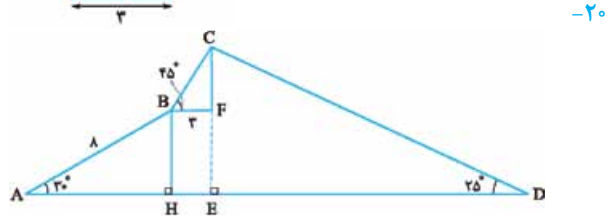
پس کافی است طول CB را به دست آوریم. چون وتر را داریم و ضلع مقابل به زاویه  $30^\circ$  را می خواهیم، پس:  
 $\sin 30^\circ = \frac{CB}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{CB}{100} \Rightarrow CB = 50$   
 $\Rightarrow$  ارتفاع بادبادک =  $50 + 1/5 = 51/5$



۱۸-  $\cos 30^\circ = \frac{2000}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2000}{x} \Rightarrow x = \frac{4000}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4000\sqrt{3}}{3} \xrightarrow{\sqrt{3}=1.7} x \approx 2267$   
 ۲۲۶۷ متر را طی می کند تا به زمین برسد.



۱۹-  $\cos \theta = \frac{3/5}{7} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$   
 ب)  $\sin \theta = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{y} \Rightarrow x = \frac{y\sqrt{3}}{2}$   
 ارتفاع =  $\frac{y\sqrt{3}}{2} + 5$



۲۰-  $\Delta BCF: \tan 45^\circ = \frac{CF}{BF} \Rightarrow 1 = \frac{CF}{3} \Rightarrow CF = 3$   
 $\Delta ABH: \sin 30^\circ = \frac{BH}{8} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BH}{8} \Rightarrow BH = 4 \Rightarrow FE = 4$   
 $\Delta DEC: \sin 25^\circ = \frac{CE}{CD} \Rightarrow 0.42 = \frac{7}{CD} \Rightarrow CD = \frac{7}{0.42} = \frac{100}{42}$   
 طول سرسره =  $\frac{100}{42}$   
 $\Rightarrow CD = \frac{7}{0.42} = \frac{100}{42}$   
 ارتفاع سرسره =  $CF + FE = 4 + 3 = 7$



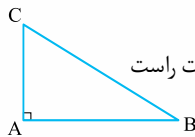
۲۴- مثلث ABC که  $\hat{A} = 90^\circ$  را رسم می‌کنیم:

$$\cos^2 B = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2, \quad \sin^2 C = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2$$

$$\text{سمت چپ} = \frac{\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{BC}\right)^2}{1 - \left(\frac{AB}{BC}\right)^2} = \frac{2 \frac{AB^2}{BC^2}}{BC^2 - AB^2}$$

$$= \frac{2AB^2}{BC^2 - AB^2} = \frac{2AB^2}{AC^2}$$

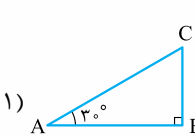
فیثاغورس



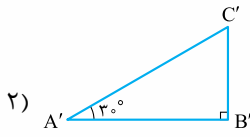
$$2 \tan^2 C = 2 \times \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = 2 \frac{AB^2}{AC^2}$$

بنابراین دو طرف برابرند.

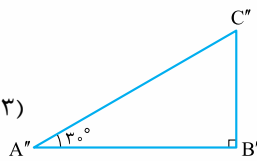
۲۵- الف) چند مثلث قائم‌الزاویه مختلف که همه آن‌ها یک زاویه  $30^\circ$  دارند، رسم می‌کنیم:



$$\sin 30^\circ = \frac{BC}{AC}$$

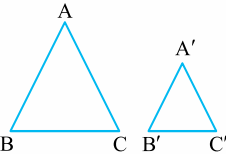


$$\sin 30^\circ = \frac{B'C'}{A'C'}$$



$$\sin 30^\circ = \frac{B''C''}{A''C''}$$

نسبت سینوس زاویه A را در هر ۳ مثلث نوشته‌ایم. درست است که سه مثلث متفاوتند (همنهشت نیستند)، ولی نسبت‌های نوشته شده با هم برابر می‌شوند؛ به عبارت دیگر  $\sin 30^\circ$  همواره برابر یک عدد ثابت است و این‌که از کدام مثلث برای به دست آوردن آن استفاده کنید، مهم نیست. قبل از این‌که مطلب را اثبات کنیم، باید یک یادآوری روی مفهوم تشابه مثلث‌ها داشته باشیم. یادتان هست که دو مثلث ABC و  $A'B'C'$  را متشابه می‌گوییم هرگاه زوایا، نظیر به نظیر مساوی بوده و اضلاع متناسب باشند، یعنی:



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

اما برای رسیدن به تشابه دو مثلث، نیازی نیست همه شرط‌های بالا را بررسی کنیم، بلکه اگر دو زاویه از دو مثلث برابر باشند، ثابت می‌شود که دو مثلث متشابه‌اند. حالا مثلث‌های ۱ و ۲ طبق حالت دو زاویه، با هم متشابه‌اند:

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{cases} \xrightarrow{\text{ز ز}} \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

$$\xrightarrow{\text{نسبت اضلاع}} \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$$

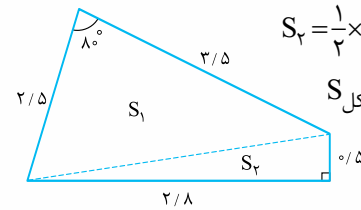
می‌بینید که نسبت‌ها یکسان شدند.

۲۶-  $S = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$

۲۷-  $S = \frac{1}{2} a \times a \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

۲۸-

$S_1 = \frac{1}{2} \times 2 \times 5 \times 3 \times \sin 80^\circ = \frac{1}{2} \times 2 \times 5 \times 3 \times 0.98 = 4.9$



$S_r = \frac{1}{2} \times 2 \times 8 \times 0.5 \times \sin 90^\circ = 0.7$

$S_{\text{کل}} = S_1 + S_r = 4.9 + 0.1 = 5$

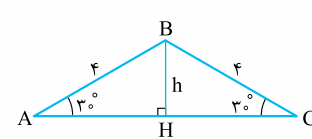
شش ضلعی منظم

۲۹-

از ب)  $S = 6 \left(\frac{1}{2} \times a \times a \times \sin 60^\circ\right)$   
به ضلع a درست می‌شود.  
 $= 6 \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

۳۰- روش اول  $\sin 30^\circ = \frac{h}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{4} \Rightarrow h = 2$

$AH^2 + h^2 = 4^2 \Rightarrow AH^2 + 4 = 16 \Rightarrow AH = \sqrt{12}$



چون مثلث متساوی‌الساقین است، ارتفاع، میانه هم هست؛ پس:  $AH = HC$  و لذا  $AC = 2\sqrt{12}$  حالا:

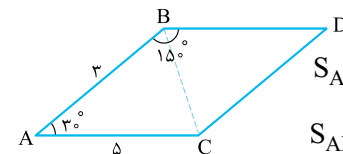
$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{12} \times \frac{1}{2}$

$= 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$

روش دوم  $\hat{B} = 120^\circ$ . در درس بعد نشان می‌دهیم، دو زاویه مکمل، سینوس‌های برابر دارند، پس  $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ$  و لذا:

$S = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \times 16 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

۳۱- زوایای مجاور، در متوازی‌الاضلاع مکمل‌اند، پس:  $\hat{A} = 30^\circ$ .

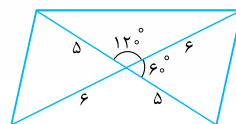


$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \sin 30^\circ = \frac{15}{4}$

$S_{ABDC} = 2S_{ABC} = 2 \times \frac{15}{4} = \frac{15}{2}$

۳۲-  $S = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \sin \theta = 5\sqrt{2} \Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = 45^\circ$

۳۳- در متوازی‌الاضلاع قطر‌ها همدیگر را نصف می‌کنند. دو زاویه  $60^\circ$  و  $120^\circ$  مکمل‌اند، پس سینوس‌های برابر دارند؛ بنابراین هر چهار مثلث دارای مساحت‌های یکسانی هستند:



متوازی‌الاضلاع  $S = 4 \left(\frac{1}{2} \times 6 \times 5 \times \sin 60^\circ\right) = 30\sqrt{3}$

نکته

در حالت کلی اگر طول قطرها a و b بوده و زاویه بین آن‌ها  $\theta$  باشد، مساحت متوازی‌الاضلاع می‌شود:

$S = \frac{1}{2} ab \sin \theta$

(در این‌جا می‌شد  $S = \frac{1}{2} \times 12 \times 10 \times \sin 60^\circ = 30\sqrt{3}$ )



نمونه امتحان نیم سال اول	رشته ریاضی و تجربی	ریاضی ۱ (دهم)
ردیف	امتحان شماره ۱	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
نمره	Kheilisabz.com	
۱	جاهای خالی را تکمیل کنید. الف) اگر مجموعه A نامتناهی و مجموعه B متناهی باشد، $A \cap B$ مجموعه‌ای ..... است. ب) ریشه‌های دوم عدد $\frac{1}{4}$ برابر ..... هستند. پ) کسر $\frac{x^2-1}{x^2-9}$ به ازای اعداد ..... تعریف نشده است. ت) اگر $\sin \theta \tan \theta < 0$ باشد، $\theta$ در ربع‌های ..... یا ..... خواهد بود. ث) اگر در معادله $y = ax^2 + bx + c$ ، $a > 0$ باشد، رأس سهمی ..... نقطه سهمی است. ج) اگر $0 < a < 1$ باشد، $\sqrt{a}$ ..... $\sqrt[3]{a}$ چ) $(W - N)' = \dots$ (مجموعه مرجع را $\mathbb{Z}$ در نظر بگیرید).	۲
۲	الف) اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x + 1 < 4\}$ باشد، مجموعه‌های $A \cap B$ ، $A \cup B$ و $A - B$ را با بازه‌ها نمایش دهید. ب) اگر مجموعه مرجع برابر $\mathbb{R}$ باشد، $B'$ را به دست آورید.	۱/۵
۳	جمله عمومی الگوی زیر را به دست آورید. آیا این الگو خطی است؟	۰/۵
۴	الف) در یک دنباله حسابی جمله دهم برابر ۳۴ و جمله هفدهم برابر ۱۰۴ است. جمله صدم این دنباله را به دست آورید. ب) در یک دنباله هندسی، جمله چهارم و جمله هفتم به ترتیب برابر ۴۰ و ۳۲۰ هستند. جمله عمومی این دنباله را به دست آورید.	۱/۵
۵	یک بالن تبلیغاتی با دو طناب به صورت مقابل، به زمین بسته شده است. $x$ را به دست آورید.	۱
۶	الف) اگر نقطه $P\left(\frac{-1}{\sqrt{7}}, \frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{7}}\right)$ روی دایره مثلثاتی باشد، نسبت‌های مثلثاتی زاویه $\theta$ را به دست آورید. ب) اگر $\sin \theta = \frac{1}{5}$ و $\theta$ در ربع دوم باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه $\theta$ را به دست آورید.	۱/۵
۷	درستی اتحاد مثلثاتی مقابل را نشان دهید. $1 - \frac{\cos^2 \theta}{1 + \sin \theta} = \sin \theta$	۱
۸	الف) عدد $\sqrt[4]{5\sqrt{5}}$ را با توان‌های گویا نوشته و حاصل آن را با یک رادیکال نمایش دهید. ب) از معادله $\sqrt[3]{3\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ ، $x$ را به دست آورید.	۱/۵
۹	الف) حاصل عبارت‌های زیر را با استفاده از اتحادها به دست آورید. ۱) $\left(\frac{x}{y} + 2y\right)^2 =$ ۲) $(2a - 3)(2a + 3)(16a^4 + 36a^2 + 81) =$ ب) عبارت $3x^2 + 11x - 4$ را تجزیه کنید.	۱/۵

۱	$A = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$	ابتدا مخرج کسر را گویا و سپس حاصل را به صورت یک کسر بنویسید.	۱۰
۱/۵	(روش مربع کامل) $x^2 - 3x + 1 = 0$ (الف) ب) $3x^2 - 7x + 4 = 0$ ( $\Delta$ )	معادله‌های درجه دوم را با روش خواسته شده حل کنید. (روش کلی یا $\Delta$ )	۱۱
۱		الف) مختصات رأس سهمی $y = x^2 - 4x + 3$ را به دست آورید. ب) سهمی را رسم کنید.	۱۲
۱/۵	$A = \frac{(1+x)^5(x^2-x+3)}{(x^2-6x+5)(x-3)^4}$	عبارت مقابل را تعیین علامت کنید.	۱۳
۱	$\frac{x}{x-1} \leq \frac{x+1}{x-2}$	نامعادله مقابل را حل کرده و جواب را با استفاده از بازه‌ها نمایش دهید.	۱۴
۱		حدود $m$ را چنان تعیین کنید که عبارت $A = x^2 - 3mx + 1$ همواره مثبت باشد.	۱۵
۱		نامعادله $3 < \left  \frac{x+1}{4} + 3 \right $ را حل کنید.	۱۶
۲۰	جمع نمرات		



# پاسخ نامه تشریحی امتحان شماره (۱)

$$\tan \theta = \frac{y_p}{x_p} = \frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{7}} = -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}, \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}} = -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{6}}$$

ب)  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$   
 $\Rightarrow \cos^2 \theta = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25} \Rightarrow \cos \theta = \pm \frac{\sqrt{24}}{5}$   
 چون  $\theta$  در ربع دوم است، پس  $\cos \theta$  منفی بوده و لذا:

$$\cos \theta = \frac{-\sqrt{24}}{5}$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = -\sqrt{24}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{1}{5}}{-\frac{\sqrt{24}}{5}} = -\frac{1}{\sqrt{24}}$$

$$1 - \frac{\cos^2 \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 + \sin \theta - \cos^2 \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 + \sin \theta - (1 - \sin^2 \theta)}{1 + \sin \theta}$$

$$= \frac{\sin \theta (1 + \sin \theta)}{1 + \sin \theta} = \sin \theta$$

الف)  $\sqrt[4]{5^2 \sqrt{5}} = \sqrt[4]{5^2 \times 5^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[4]{5^{\frac{5}{2}}} = (5^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{5}{8}} = \sqrt[8]{5^5}$

ب)  $\sqrt[3]{3\sqrt{3}} = 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sqrt[3]{3 \times 3^{\frac{1}{2}}} = 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sqrt[3]{3^{\frac{3}{2}}} = 3^{\frac{1}{2}}$   
 $\Rightarrow (3^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{3}{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 3$

الف)  $1) (\frac{x}{y} + 2y)^2 = (\frac{x}{y})^2 + 2(\frac{x}{y})(2y) + 3(\frac{x}{y})(2y)^2 + (2y)^2$   
 $= \frac{x^2}{y^2} + \frac{4}{y}x^2y + 6xy^2 + 4y^2$   
 2)  $\frac{(2a-3)(2a+3)(16a^4 + 36a^2 + 81)}{4a^2 - 9} =$   
 $(4a^2)^2 - 9^2 = 16a^4 - 81$

ب) دو عدد پیدا می‌کنیم که جمع آن‌ها ۱۱ و ضرب آن‌ها ۱۲ باشد.  
 $3x^2 + 11x - 4 \rightarrow +12, -1$   
 $\Rightarrow 3x^2 + 11x - 4 = 3x^2 + 12x - x - 4$   
 $= 3x(x+4) - (x+4) = (x+4)(3x-1)$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} &= \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} \\ \frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} &= \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{x-1} \end{aligned} \right\}$$

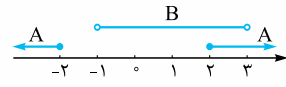
$$\Rightarrow A = \frac{\sqrt{x}+1 + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{x-1}$$

۱- الف)  $A \cap B \subseteq B$  است و چون B متناهی است، پس  $A \cap B$  مجموعه‌ای متناهی است.

ب)  $\pm \frac{1}{6}$   
 پ)  $x^2 - 9 = 0$  پس  $x^2 = 9$  و لذا  $x = \pm 3$ . پس کسر به ازای اعداد  $x = \pm 3$  تعریف نشده است.  
 ت)  $\tan \theta$  و  $\sin \theta$  غیرهم‌علامت هستند، پس  $\theta$  در ربع‌های دوم یا سوم خواهد بود.

ث) پایین‌ترین  
 ج)  $\sqrt{a} < \sqrt[3]{a}$   
 چ)  $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\} \Rightarrow \{0\}' = \mathbb{Z} - \{0\} = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$

۲- الف)  $A: |x| \geq 2 \Rightarrow x \geq 2$  یا  $x \leq -2$   
 ب)  $0 < x + 1 < 4 \xrightarrow{-1} -1 < x < 3$



$A \cup B = (-\infty, -2] \cup (-1, +\infty)$   
 $A \cap B = [2, 3]$  و  $A - B = (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$   
 ب)  $B' = \mathbb{R} - B = \mathbb{R} - (-1, 3) = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

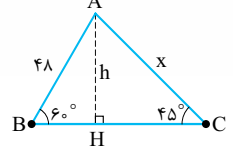
۳-  $a_1 = 2 + 1, a_2 = 2 + 2^2, a_3 = 2 + 3^2, \dots \Rightarrow a_n = 2 + n^2$   
 چون جمله عمومی نسبت به n از درجه دوم است، پس خطی نیست.

۴-  $\begin{cases} t_{10} = 34 \Rightarrow a + 9d = 34 \\ t_{17} = 104 \Rightarrow a + 16d = 104 \end{cases}$   
 $\xrightarrow{\text{کم}} 7d = 70 \Rightarrow d = 10 \Rightarrow a = -56$   
 $\Rightarrow t_n = a + (n-1)d \Rightarrow t_{100} = -56 + 99(10) = 934$

ب)  $\begin{cases} t_4 = 40 \Rightarrow ar^3 = 40 \\ t_7 = 320 \Rightarrow ar^6 = 320 \end{cases}$   
 $\xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{ar^6}{ar^3} = \frac{320}{40} \Rightarrow r^3 = 8$

$\Rightarrow r = 2 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow t_n = ar^{n-1} = 5 \times 2^{n-1}$

۵-  $\Delta ABH: \sin 60^\circ = \frac{h}{48} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{48} \Rightarrow h = \frac{48\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$



$\Delta ACH: \sin 45^\circ = \frac{h}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{24\sqrt{3}}{x} \Rightarrow x = \frac{48\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$   
 $= \frac{48\sqrt{6}}{2} = 24\sqrt{6}$

۶- الف)  $\sin \theta = y_p = \frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{7}}, \cos \theta = x_p = \frac{-1}{\sqrt{7}}$

$$\frac{x}{x-1} \leq \frac{x+1}{x-2} \Rightarrow 0 \leq \frac{x+1}{x-2} - \frac{x}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1) - x(x-2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{2x-1}{(x-2)(x-1)}$$

$$2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

x		$\frac{1}{2}$	1	2	
$2x-1$	-	0	+	+	+
$x-2$	-	-	-	0	+
$x-1$	-	-	0	+	+
کسر	-	0	+	-	+

$$\text{جواب} = \left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup (2, +\infty)$$

-۱۴

$$\text{الف) } x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = -1$$

-۱۱

$$\text{ضریب } x \text{ را نصف و به توان } 2 \text{ می‌رسانیم که می‌شود } \frac{9}{4} \rightarrow x^2 - 3x + \frac{9}{4} = -1 + \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \\ x - \frac{3}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\text{ب) } a=3, b=-7, c=4 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$$

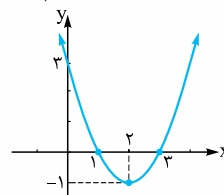
$$= 49 - 48 = 1 > 0 \Rightarrow \text{دو ریشه دارد.}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7+1}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7-1}{6} = 1 \end{cases}$$

-۱۲

$$\text{طول راس} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-7}{2 \cdot 3} = \frac{7}{6} \Rightarrow y = 3^2 - 4(3) + 7 = -1$$

$$\Rightarrow \text{راس } (3, -1)$$



-۱۵

$$\begin{cases} \Delta < 0 \Rightarrow 9m^2 - 4 < 0 \Rightarrow 9m^2 < 4 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} |3m| < 2 \\ \Rightarrow -2 < 3m < 2 \Rightarrow -\frac{2}{3} < m < \frac{2}{3} \\ a > 0 \Rightarrow \text{همواره برقرار } 1 > 0 \end{cases}$$

بنابراین جواب  $-\frac{2}{3} < m < \frac{2}{3}$  خواهد بود.

-۱۶

$$\left| \frac{x+1}{2} + 3 \right| < 3 \Rightarrow -3 < \frac{x+1}{2} + 3 < 3 \xrightarrow{-3} -6 < \frac{x+1}{2} < 0$$

$$\xrightarrow{\times 2} -12 < x+1 < 0 \xrightarrow{-1} -13 < x < -1$$

$$(1+x)^5 = 0 \Rightarrow 1+x=0 \Rightarrow x=-1$$

-۱۳

$$x^2 - x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 12 = -11 < 0$$

همواره موافق علامت a

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-5) = 0 \Rightarrow x=1, 5$$

$$(x-3)^4 = 0 \Rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=3$$

x		-1	1	3	5	
$(1+x)^5$	-	0	+	+	+	+
$x^2 - x + 3$	+	+	+	+	+	+
$x^2 - 6x + 5$	+	+	0	-	-	+
$(x-3)^4$	+	+	+	0	+	+
A	-	0	+	-	-	+