



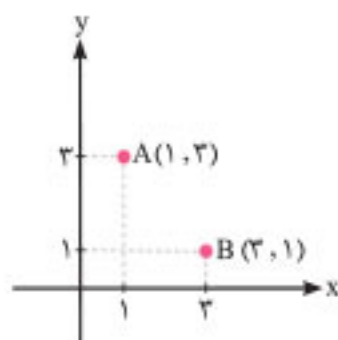
مرجع تخصصی عرضه آنلاین کتاب

www.ketabonline.ir

تابع

تابع سال دهم

زوج مرتب



به نماد (a, b) در ریاضی، می‌گیم زوج مرتب که a عضو اول (مؤلفه اول) و b عضو دوم (مؤلفه دوم) نام داره. دقت کنین همون طور که از اسم این نماد مشخصه، زوج مرتب (a, b) با (b, a) فرق داره. اگه a و b دو عدد مختلف باشن، منظور از زوج مرتب (a, b) نقطه‌ای هست که طولش a و عرضش b هست؛ مثلاً زوج‌های $A(1, 3)$ و $B(3, 1)$ رو به صورت مقابل نمایش میدیم: کمی جلوتر می‌بینین که a و b لزوماً عدد نیستن. (موقع تعریف تابع، متوجه میشین!)

مساوی بودن دو زوج مرتب

دو زوج مرتب (a, b) و (c, d) در صورتی با هم مساوی هستن که عضوهای اولشون با هم و عضوهای دومشون هم با هم برابر باشن، یعنی:

$$a = c, b = d$$

؟ تست نمونه: دو زوج مرتب $(2x - y, 3)$ و $(9, x + y)$ در صفحه مختصات، نمایش یک نقطه هستن. حاصل xy کدام است؟

$$-6 \quad (4)$$

$$6 \quad (3)$$

$$-4 \quad (2)$$

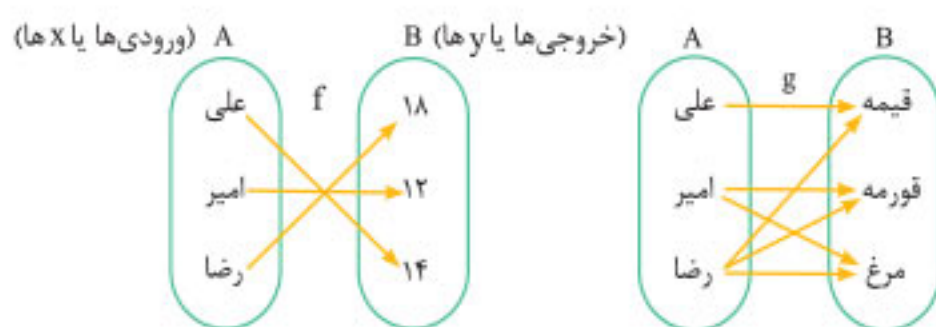
$$4 \quad (1)$$

پاسخ: وقتی گفته میشه دو زوج مرتب، فقط یک نقطه رو نمایش میدن به این معنی که با هم مساوی هستن پس خودمون میایم عضوهای اولشون رو با هم و عضوهای دومشون رو هم با همدیگه مساوی قرار میدیم:

$$\begin{cases} 2x - y = 9 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4 \xrightarrow{x+y=3} 4 + y = 3 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow xy = (4)(-1) = -4$$

بنابراین گزینه «۲» درست است.

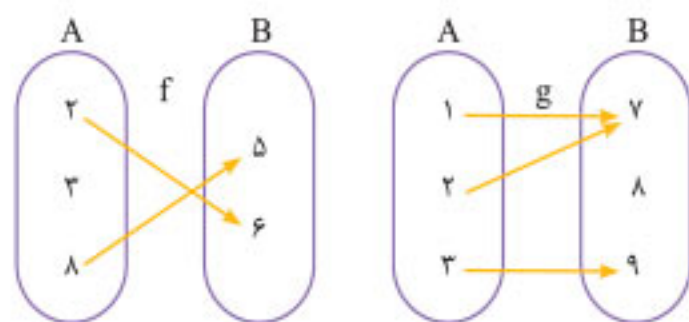
مفهوم تابع



به نمودار مقابل که نمودار پیکانی نام داره توجه کنین: A : اسامی افراد و B : معدل دیپلم افراد) نمودار مقابل در واقع یک رابطه بین اسامی افراد و معدل دیپلم اون‌ها برقرار میکنه. در واقع A : اسامی افراد از نمودار پیکانی مقابل می‌فهمیم که معدل دیپلم علی برابر ۱۴، B : غذای مورد علاقه معدل دیپلم امیر برابر ۱۲ و معدل دیپلم رضا برابر ۱۸ است. حالا به نمودار پیکانی بعدی که مربوط به رابطه g هست توجه کنین:

به نظرتون فرق این نمودار با نمودار قبلی چیه؟ در نمودار اولی، هر فرد فقط یک معدل دیپلم داشت یعنی از هر عضو A فقط و فقط یک فلش (پیکان) خارج می‌شد ولی در نمودار دوم یک نفر ممکنه به دو یا سه غذای مختلف علاقه داشته باشه. الان تعریف تابع رو می‌گیم بعدش خودتون بگین f تابع بود یا g ؟
تعریف تابع: یک رابطه بین دو مجموعه A و B (اکثر اوقات می‌نویسیم $A \rightarrow B$) یک تابع نامیده میشه هر گاه به هر عضو از مجموعه A دقیقاً یک عضو از مجموعه B نسبت داده بشه یا به عبارت ساده‌تر به ازای هر ورودی فقط یک خروجی داشته باشیم یا به ازای هر x فقط یک y داشته باشیم.
با توجه به این تعریف، نمودار پیکانی f که در ابتدای بحث مثال زدیم تابع است ولی نمودار پیکانی g بیانگر تابع نیست چون در g همون طور که دیدین به هر عضو A فقط یک عضو از B نسبت داده نمیشه (اگه از امیر و رضا هم یک فلش خارج می‌شد اون وقت g هم تابع بود).

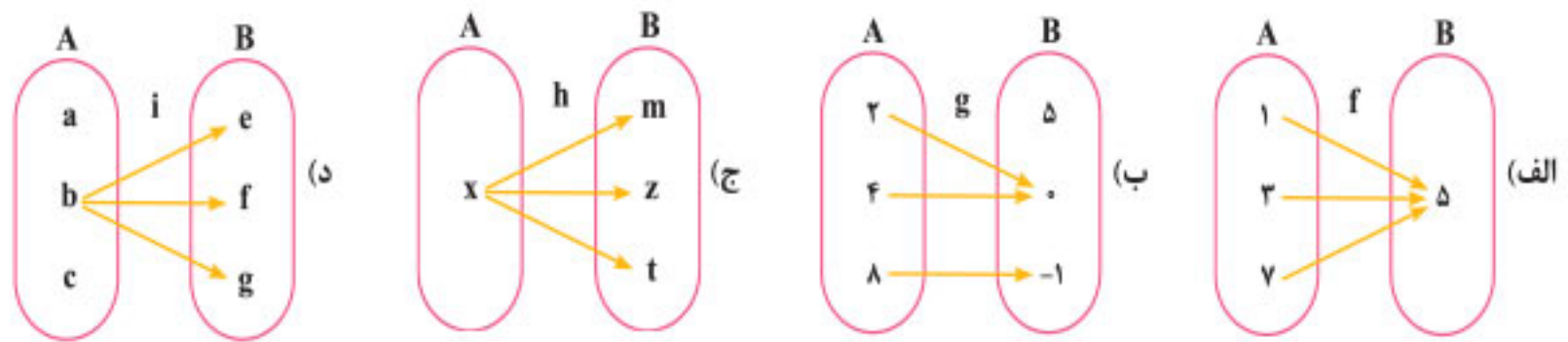
نمایش تابع با نمودار پیکانی



به راز مهم: در نمودار پیکانی مربوط به یک رابطه، اگه عضوی از A وجود داشته باشه که فلشی ازش خارج نشده باشه اون رابطه، تابع نیست ولی اگه به عضوی از مجموعه B فلش وارد نشه هیچ اشکال نداره و تابع بودن اون رابطه رو کنسل نمی‌کنه. ■

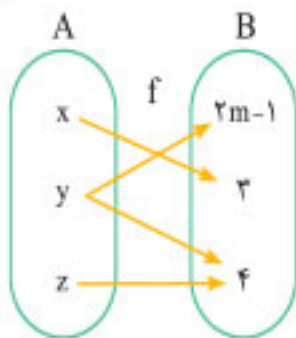
مثال: نمودار f تابع نیست؛ چون فلشی از ۳ خارج نشده. ولی نمودار g تابع است؛ چون از هر عضو A یک فلش خارج شده و ۸ که عضو B است و به اون فلشی وارد نشده مشکلی برای تابع بودن g ایجاد نمی‌کنه.

دست گرمی: تابع بودن یا نبودن نمودارهای پیکانی زیر را بررسی کنید.



پاسخ: f تابع است چون از هر عضو A فقط یک فلش (پیکان) خارج شده، g هم به دلیل مشابه، تابع است. همون طور که گفتیم اشکالی نداره که به عدد 5 در مجموعه B فلشی وارد نشده است. رابطه h تابع نیست چون از عضو x بیش از یک فلش خارج شده است. رابطه i هم که تابع نیست، چون از b بیشتر از یک فلش خارج شده، ضمناً از a و c هم فلشی خارج نشده است.

جراحی زیبایی در تابع نمودار پیکانی

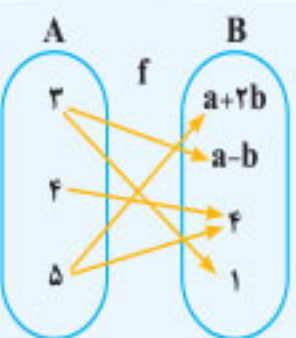
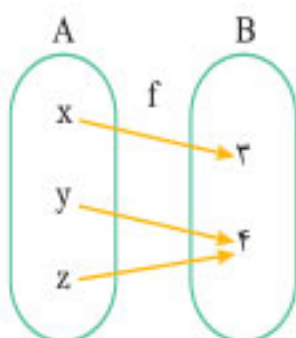


حتماً یادآور شدیم که گفتیم در نمودار پیکانی یک تابع، از هر عضو مجموعه A دقیقاً باید یک فلش خارج بشه ولی گاهی اوقات یک نمودار پیکانی به ما میدن که از یک عضو A دو فلش خارج شده، بعدش میگویند این نمودار بیانگر تابع هست؛ مثل نمودار مقابل: این جاست که دست به کار میشیم تا این تابع رو که ظاهرش به تابع نمی خوره، جراحی کنیم. البته نوع جراحیمون سریایی و بدون بیهوشیه!

از y دو تا فلش خارج شده پس باید اعداد انتهایی فلش های مربوط به y رو با هم مساوی بذاریم:

$$y \begin{cases} 2m-1 \\ 4 \end{cases} \Rightarrow 2m-1=4 \Rightarrow m=\frac{5}{2}$$

با این کار، تابع f برمیگرده به چهره اصلیش؛ چون دیگه از هیچ عضو A دو تا فلش خارج نمیشه. (از این عمل های جراحی، بازم داریم پس آماده باشیم) الان اگه در تابع f به جای m عدد $\frac{5}{2}$ رو قرار بدیم این تابع به شکل مقابل تبدیل میشه:



؟ تست نمونه: نمودار پیکانی مقابل بیانگر یک تابع است، حاصل $\frac{a-1}{b+1}$ کدام است؟

۱ (۲) ☐

۲ (۴) ☐

$\frac{1}{2}$ (۱) ☐

$\frac{3}{2}$ (۳) ☐

پاسخ: الان از 3 دو تا فلش خارج شده، درسته؟ خب اگه اعداد انتهایی فلش ها با هم برابر بشن در واقع دو تا فلش، میشن بدون فلش. چون دیگه 3 رو به صورت $1 \rightarrow 3$ می نویسیم. برای 5 هم، همین قضیه برقراره، یعنی اعداد انتهایی دو فلش خارج شده از 5 رو با هم مساوی میذاریم:

$$3 \begin{cases} a-b \\ 1 \end{cases} \Rightarrow a-b=1 \quad \text{معادله (۱)}$$

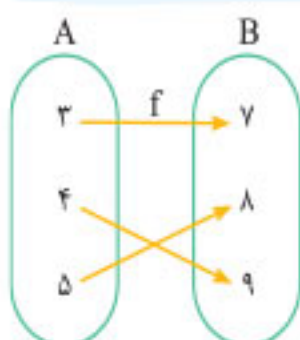
$$5 \begin{cases} a+2b \\ 4 \end{cases} \Rightarrow a+2b=4 \quad \text{معادله (۲)}$$

حالا دستگاه حاصل رو حل می کنیم، برای این کار معادله (۱) رو در 2 ضرب می کنیم تا بتونیم متغیر b رو حذف کنیم:

$$\begin{cases} 2a - 2b = 2 \\ a + 2b = 4 \end{cases}$$

$$3a = 6 \Rightarrow a = 2 \xrightarrow{a+2b=4} 2+2b=4 \Rightarrow 2b=2 \Rightarrow b=1 \Rightarrow \frac{a-1}{b+1} = \frac{2-1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

بنابراین گزینه «۱» درست است.



مقدار تابع در نمودار پیکانی: در نمودار پیکانی مقابل، فلش از 3 به سمت 7 خارج شده، اصطلاحاً میگویند مقدار تابع f در

$$f(3) = 7$$

نقطه $x=3$ برابر 7 است و می نویسیم:

به همین ترتیب برای نقاط دیگر مجموعه A داریم:

$$f(4) = 8, f(5) = 9$$

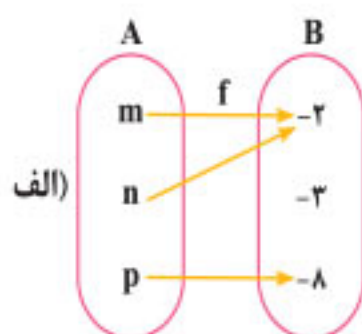
دامنه و برد تابع در نمودار پیکانی: در نمودار پیکانی، کل اعضای مجموعه A دامنه رو تشکیل میدن (دامنه یعنی مقادیر ورودی تابع) ولی بُرد لزوماً کل

مجموعه B نیست بلکه زیر مجموعه ای از B است یعنی عضوایی از B که به اون ها فلش وارد شده باشه. (بُرد یعنی مقادیر خروجی تابع) مثلاً در نمودار قبلی دامنه

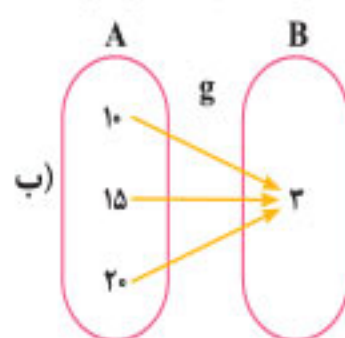
و برد عبارتند از:

$$D_f = \{3, 4, 5\} \quad \text{بُرد} \quad R_f = \{7, 8, 9\}$$

دست گرمی: دامنه و برد توابع زیر را تعیین کنید و مقادیر خواسته شده را نیز محاسبه کنید.



$$\frac{f(n) + f(m)}{2f(p)} = ?$$



$$4g(10) - 5g(20) = ?$$

الف) دامنه $D_f = \{m, n, p\}$ برد $R_f = \{-2, -3, -8\}$

پاسخ: الف) D_f یعنی دامنه تابع f و R_f یعنی برد آن:

می بینیم که به عدد -3 در مجموعه B فلشی وارد نشده پس جزء برد محسوب نمیشه ولی دامنه، همیشه با مجموعه A مساویه. حالا میریم سراغ محاسبه کسر خواسته شده:

$$f(n) = -2, f(m) = -2, f(p) = -8 \Rightarrow \frac{f(n) + f(m)}{2f(p)} = \frac{-2 + (-2)}{2(-8)} = \frac{-4}{-16} = \frac{1}{4}$$

دامنه $D_g = \{10, 15, 20\}$ برد $R_g = \{3\}$

$$g(10) = 3, g(20) = 3 \Rightarrow 4g(10) - 5g(20) = 4(3) - 5(3) = -3$$

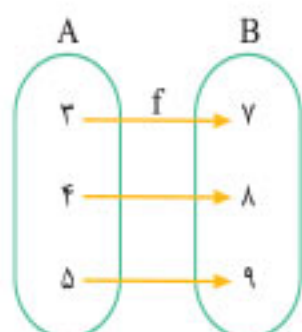
ب)

روش های نمایش تابع: در کل ۶ روش برای نمایش تابع وجود داره که عبارت اند از: ۱ نمودار پیکانی ۲ زوج مرتبها ۳ جدول ۴ نمودار هندسی

۵ توصیف فارسی ۶ ضابطه جبری (فرمول)

نمودار ون رو که کامل بررسی کردیم، پس میریم سراغ معرفی بقیه روش ها.

نمایش تابع با زوج مرتبها



$$f = \{(3, 7), (4, 8), (5, 9)\} \Rightarrow f \text{ تابع است.}$$

نمایش زوج مرتبی

عضو دوم عضو اول

نمودار پیکانی مقابل رو به صورت مجموعه ای از زوج مرتبها می نویسیم که عضوهای اول زوج ها از A و عضوهای دومشون از B انتخاب میشن:

واضح است در صورتی تابع داریم که عضوهای اول، همگی مختلف باشن یا اگه عضوهای اول مساوی بودن، عضوهای دوم هم مساوی باشن. مثلاً رابطه $g = \{(1, 2), (7, 8), (6, 3)\}$ تابع نیست چون می دونیم $6 \neq 1$ است. الان در زوج های $(1, 2)$ و $(1, 3)$ فقط عضوهای اول با هم مساوی هستن پس g تابع نیست. در واقع به عدد ۱ از دامنه، دو مقدار ۲ و ۳ از B نسبت داده شده که با تعریف تابع در تضاده. (در نمایش پیکانی از ۱ دو تافش خارج میشه یکی به ۲ و یکی به ۳ پس g تابع نیست).

؟ تست نمونه: اگر $f = \{(4, 3), (2, 7), (a, 5), (4, a^2 - 1)\}$ بیانگر یک تابع باشد، مقدار a کدام است؟

☐ فقط ۱ ☐ فقط ۲ ☐ فقط ۳ ☐ هیچ مقداری برای a پیدا نمی شود

پاسخ: در زوج های $(4, 3)$ و $(4, a^2 - 1)$ عضوهای اول برابرند (مختلف نیستن) پس باید کاری کنیم که عضوهای دومشون هم مساوی بشن (اگه این اتفاق بیفته در واقع دوتا زوج مرتب $(4, 3)$ و $(4, 3)$ ایجاد میشه که چون تکرارین یکیشون حذف میشه و دیگه تابع خواهیم داشت) در واقع مثل نمودار ون عمل می کنیم:

$$a^2 - 1 = 3 \Rightarrow a^2 = 4 \xrightarrow{\text{جذر}} a = \pm 2$$

حالا باید جواب ها رو بررسی کنیم، یکبار در f به جای a عدد ۲ و بار دیگه -2 رو قرار میدیم و تابع بودن یا نبودن اون رو بررسی می کنیم:

این دوتا زوج مرتب تکرارین پس یکیشون حذف میشن

$$a = 2 \xrightarrow{\text{در } f \text{ قرار میدیم}} f = \{(4, 3), (2, 7), (2, 5), (4, 3)\} = \{(4, 3), (2, 7), (2, 5)\}$$

این دو تا زوج کار رو خراب کردن چون فقط عضوهای اولشون با هم مساوی هستن.

پس $a = 2$ قابل قبول نیست، چون باعث شد که f تابع نشه در صورتی که در متن سؤال، با قاطعیت گفته شده که f تابع است. حالا میریم سراغ $a = -2$:

$$a = -2 \xrightarrow{\text{در } f \text{ قرار میدیم}} f = \{(4, 3), (2, 7), (-2, 5), (4, 3)\} = \{(4, 3), (2, 7), (-2, 5)\}$$

خب خداروشکر، عضوهای اول زوج مرتبها، همگی مختلف شدن پس f تابع است و $a = -2$ قابل قبوله. بنابراین گزینه «۲» درست است.

مقدار تابع در حالت زوج مرتبی

در تابع $f = \{(1, 5), (3, 4)\}$ به زوج مرتب $(1, 5)$ دقت کنیم. ۱ عضو اول و ۵ عضو دومه. اصطلاحاً می گیم مقدار تابع f در نقطه $x = 1$ برابر ۵ است و چنین

می نویسیم: $f(1) = 5$ به همین ترتیب برای زوج $(3, 4)$ داریم: $f(3) = 4$

دامنه و برد تابع در حالت زوج مرتبی

مثال $f = \{(1, 5), (2, 7), (3, 7)\}$ دامنه $D_f = \{1, 2, 3\}$ برد $R_f = \{5, 7\}$

مجموعه همه عضوهای اول زوج مرتبها دامنه و مجموعه همه عضوهای دوم اون ها برد رو تشکیل میدن.

نمایش تابع با جدول

در این روش، ورودی‌ها (Xها) در ردیف بالای یک جدول و خروجی‌ها (Yها) در ردیف پایین اون قرار می‌گیرند. به جدول‌های مقابل توجه کنید:

$$f: \begin{array}{c|cccc} x & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline y & 6 & 10 & 7 & 3 \end{array}$$

$$g: \begin{array}{c|cccc} x & 2 & 3 & 5 & \sqrt{4} \\ \hline y & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}$$

f تابع است چون تمام Xها با هم فرق دارند ولی g تابع نیست چون در ردیف بالا دوتا عدد ۲ داریم که Yهاشون با هم برابر نیست. یعنی دو زوج (۲, ۵) و (۲, ۸) داریم که فقط عضوهای اولشون با هم مساوی هستن. (دقیقاً مثل شرط تابع بودن در زوج مرتب عمل کردیم).

تست نمونه: اگر جدول مقابل یک تابع باشد، مقدار a.b کدام است؟

$$f: \begin{array}{c|ccccc} x & 1 & 2 & 3 & (\frac{1}{2})^{-1} & \sqrt{9} \\ \hline y & 6 & a-b & 2 & 1 & a+b \end{array}$$

$$\frac{3}{8} \quad (4 \square)$$

$$\frac{3}{4} \quad (3 \square)$$

$$\frac{3}{2} \quad (2 \square)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1 \square)$$

پاسخ: اولاً می‌دونیم که: $(\frac{1}{2})^{-1} = 2$ و $\sqrt{9} = 3$ پس در ردیف بالا هم ۲ها تکرار شدن و هم ۳ها. بنابراین Yهای مربوط به Xهای تکراری رو با هم مساوی قرار میدیم:

$$\left. \begin{array}{l} 2 \begin{array}{l} \swarrow a-b \\ \searrow 1 \end{array} \Rightarrow a-b=1 \\ 3 \begin{array}{l} \swarrow 2 \\ \searrow a+b \end{array} \Rightarrow a+b=2 \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{(خودتون بلدین دیگه)}]{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow ab = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

بنابراین گزینه «۳» درست است.

مقدار تابع در حالت جدولی

$$f: \begin{array}{c|cccc} x & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline y & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array}$$

$$f(2) = 8, \quad f(3) = 9, \quad f(4) = 10.$$

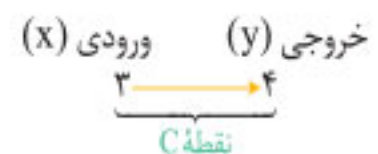
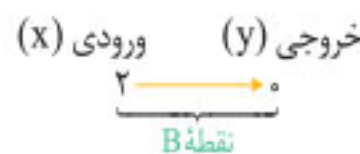
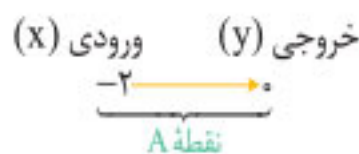
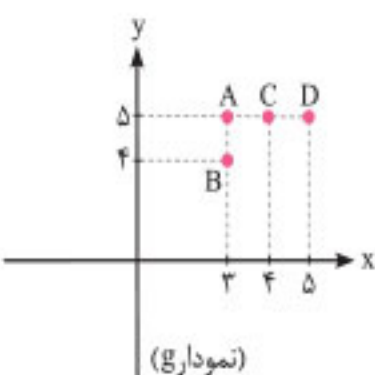
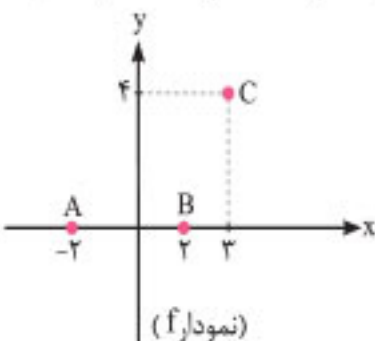
در جدول مقابل مقدار تابع به ازای $x = 1$ برابر $y = 7$ است، پس می‌توان گفت: $f(1) = 7$.

به همین ترتیب برای سایر نقاط جدول داریم:

دامنه و برد تابع در حالت جدولی

$$D_f = \{1, 2, 3, 4\}, \quad R_f = \{7, 8, 9, 10\}$$

اعداد ردیف بالای جدول، دامنه و اعداد ردیف پایین، برد تابع رو نشون میدن در مثال بالا داریم:



ولی نمودار g تابع نیست چون به ازای ورودی $x = 3$ دوتا خروجی $y = 4$ و $y = 5$ وجود داره:

نمایش تابع با نمودار هندسی

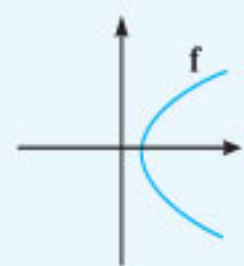
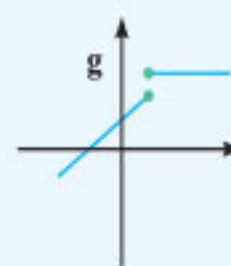
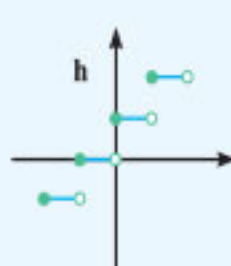
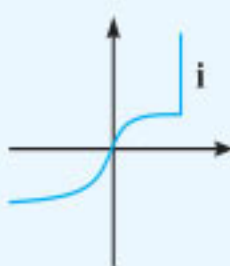
قطعاً می‌دونین که هر زوج مرتب به شکل (a, b) که در اون a و b دو عدد باشن در صفحه مختصات، یک نقطه رو نمایش میده. (a طول و b عرض نقطه است.) حالا فرض کنیم مثل شکل مقابل، تعدادی از این نقطه‌ها رو داشته باشیم:

الان f تابع است چون به ازای هر x از دامنه، فقط یک y وجود داره:

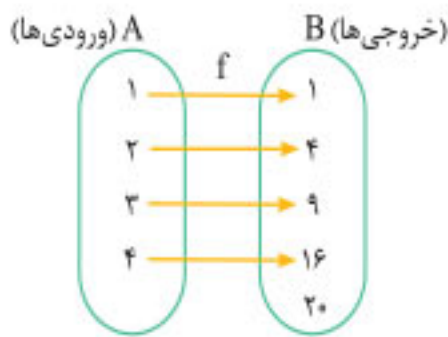
شرط تابع بودن یک نمودار هندسی

در نمودار هندسی یک رابطه، اگه بتونیم خطی عمودی (موازی محور Yها) رسم کنیم که نمودار رو در بیشتر از یک نقطه (نقطه یا بیشتر) قطع کنه، اون نمودار تابع نیست. در واقع هیچ دو نقطه‌ای (نقطه توپر) نباید زیر هم باشن (الان در نمودار g نقاط توپر A و B زیر هم هستن به همین علت گفتیم g تابع نیست اگه A یا B یا جفتشون تو خالی بودن، g تابع بود).

تست نمونه: چند تا از نمودارهای زیر، تابع هستن؟



نمایش تابع با ضابطه جبری



$$\begin{cases} f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 4, 9, 16, 20\} \\ f(x) = x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} f: A \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 \end{cases}, \quad A = \{1, 2, 3, 4\}$$

در این حالت، رابطه بین x ها و y ها با یک فرمول ریاضی نشون داده میشه. به تابع مقابل دقت کنین: با کمی دقت متوجه میشیم که هر عضو A به توان ۲ میرسه و عضو B مربوطه به دست میاد، پس ضابطه یا فرمول این تابع به صورت $y = x^2$ یا $f(x) = x^2$ است. البته ضابطه، بدون دامنه به درد نمی‌خوره. برای همین تابع f رو باید به شکل کامل و به صورت مقابل نمایش بدیم: در این مدل نمایش تابع، A همیشه همون دامنه تابع است ولی B لزوماً برد تابع نیست (ولی زیرمجموعه B است). الان هم می‌بینین که برد تابع $\{1, 4, 9, 16\}$ است که با B برابر نبود. تابع f رو به صورت‌های مقابل هم میشه نمایش بدیم (یعنی اکثر وقتا سمت راست فلش $\mathbb{R}$ رو می‌نویسن).

مقدار تابع در حالت داشتن ضابطه

اگر ضابطه تابع به ما داده بشه و مقدار تابع در نقطه‌ای مثل $x = a$ خواسته بشه کافیست به جای تمام x های تابع، عدد a رو قرار بدیم. مثلاً با فرض $f(x) = x^2 - 2x + 1$ برای یافتن مقدار تابع در $x = -3$ داریم:

$$f(-3) = (-3)^2 - 2(-3) + 1 = 9 + 6 + 1 = 16$$

مقدار تابع f در $x = -3$

$$f(x) = x^2 - 2x + 1$$

$$f(3-x) = (3-x)^2 - 2(3-x) + 1 = 9 - 6x + x^2 - 6 + 2x + 1 = x^2 - 4x + 4$$

اتحاد دوم

یادآوری مهم: اگر در یک سؤال، عبارتی مثل $f(f(a))$ خواسته شد ابتدا $f(a)$ رو حساب می‌کنیم (پرانتر داخلی). فرض می‌کنیم جواب $f(a)$ برابر L شد، حالا میایم و $f(L)$ رو حساب می‌کنیم. در مورد عبارت‌های $f(g(a))$ ، $g(f(a))$ و $g(g(a))$ هم به همین شکل عمل می‌کنیم؛ مثلاً در تابع $f(x) = 4x - 1$ مقدار $f(f(2))$ رو می‌خوایم حساب کنیم، پس اول $f(2)$ رو پیدا می‌کنیم:

$$f(2) = 4(2) - 1 = 7 \Rightarrow f(f(2)) = f(7) = 4(7) - 1 = 27$$

؟ تست نمونه: اگر $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ و $g(x) = |x - 3|$ باشند، حاصل $\frac{2f(4) - g(5)}{f(g(1))}$ کدام است؟

$$\begin{aligned} f(4) &= \sqrt{4^2 + 9} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5 \\ g(5) &= |5 - 3| = |2| = 2 \\ g(1) &= |1 - 3| = |-2| = 2 \Rightarrow f(g(1)) = f(2) = \sqrt{2^2 + 9} = \sqrt{13} \end{aligned}$$

$$\frac{2f(4) - g(5)}{f(g(1))} = \frac{2(5) - 2}{\sqrt{13}} = \frac{8}{\sqrt{13}}$$

پاسخ:

بنابراین گزینه ۲ درست است.

محاسبه مقدار تابع وقتی به جای $f(x)$ عبارت $f(\square)$ به ما داده شود

طراحان انقدرها هم مهربون نیستن که همیشه به شما $f(x)$ رو بدن و بگن مثلاً $f(6)$ رو حساب کن و بعدش شما بیایی به جای تمام x ها ۶ بذاری! این عزیزان، گاهی نقشه‌های خطرناکی براتون میکشن که ما در این کتاب، نقشه‌های شومشون رو خنثی می‌کنیم. فرض کنین به جای $f(x)$ به ما $f(2x-1)$ رو بدن و بگن $f(6)$ رو حساب کن. ما اول میایم $2x-1$ رو مساوی ۶ قرار میدیم تا x به دست بیاد:

$$2x - 1 = 6 \Rightarrow 2x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$$

حالا در رابطه‌ای که به ما داده میشه به جای x ها عدد $\frac{7}{2}$ رو قرار میدیم، به تست زیر توجه کنین:

؟ تست نمونه: با فرض آنکه $f(4x+3) = x^2 - 6x + 1$ باشد، مقدار $f(7)$ کدام است؟

$$\begin{aligned} 4x + 3 &= 7 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1 \\ f(4x + 3) &= x^2 - 6x + 1 \xrightarrow{x=1} f(7) = 1^2 - 6(1) + 1 = -4 \end{aligned}$$

پاسخ:

بنابراین گزینه ۱ درست است.

حل یک مسئله مهم در آزمون‌های آزمایشی

فرض کنید رابطه $f(x) = 2f(1) + x^2 - 6x$ به شما داده بشه و بگن مقدار $f(2)$ چقدره؟

الان اگر به جای x ها عدد ۲ رو قرار بدیم به رابطه $f(2) = 2f(1) + 2^2 - 6(2)$ می‌رسیم که دوتا مجهول داره، یعنی هم $f(1)$ و هم $f(2)$ مجهول هستن، پس بهتره اول بیایم همون $f(1)$ موجود در رابطه رو به دست بیاریم لذا به x ها عدد ۱ رو میدیم:

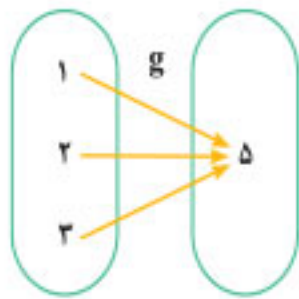
$$f(x) = f(1) + x^2 - 6x \xrightarrow{x=1} f(1) = 2f(1) + 1^2 - 6(1) \Rightarrow f(1) - 2f(1) = -5 \Rightarrow -f(1) = -5 \Rightarrow f(1) = 5$$

$$f(x) = 2(5) + x^2 - 6x \xrightarrow{x=2} f(2) = 10 + 2^2 - 6(2) = 10 + 4 - 12 = 2$$

حالا این مقدار $f(1)$ رو در رابطه اصلی قرار میدیم:

تابع سال یازدهم

تابع ثابت

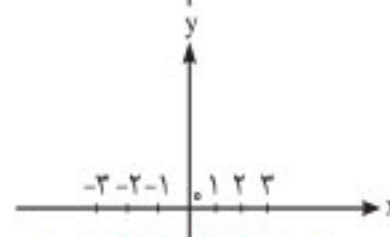
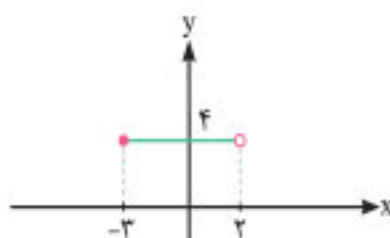
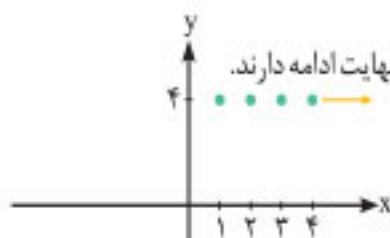
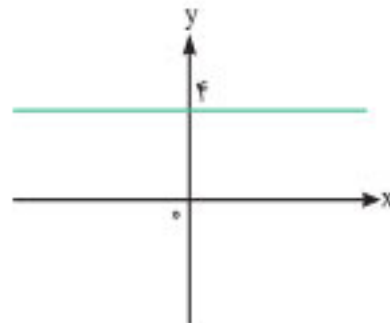


تابعی است که به هر ورودی (x) یک عدد ثابت مثل k رو نسبت میدهند یعنی عرض تمام نقاط نمودار اون، با هم برابرند. مثلاً توابع f و g ثابت هستن:

$$f = \{(2, 10), (6, 10), (20, 10)\}$$

دقت کنین وقتی می‌نویسیم: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ به این معنیه که هر عدد حقیقی که به تابع f وارد بشه خروجی اون، برابر ۴ است.

حالا نمودار $f(x) = 4$ یا همون $y = 4$ رو با دامنه $\mathbb{R}$ رسم می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(-10) = 4 \\ f(0) = 4 \\ f(1) = 4 \\ f(\sqrt{2}) = 4 \\ f(a+b) = 4 \end{cases}$$


حالا فرض کنین بخوایم نمودار $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ رو رسم کنیم، این دفعه دامنه تابع $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ است (اعداد طبیعی)، پس نمودار f به شکل مقابل تبدیل میشه:

همچنین نمودار تابع ثابت $f(x) = 4$ با دامنه $-3 \leq x < 2$ به شکل زیره:

$$\begin{cases} f: \{-3 \leq x < 2\} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 4 \end{cases}$$

دست گرمی: نمودار تابع ثابت $f(x) = -1$ را با دامنه‌های $\mathbb{Z}$ و $x < 2$ رسم کنید.

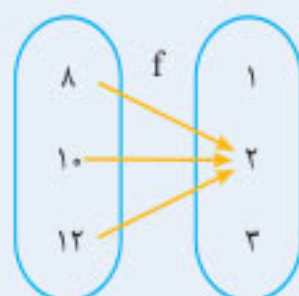
پاسخ: می‌دونیم $\mathbb{Z}$ مجموعه اعداد صحیح است، پس x می‌تونه تمام اعداد $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ رو انتخاب کنه ولی عرض همه این نقاط برابر (-1) خواهد بود.

$$\begin{cases} f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = -1 \end{cases}$$

وقتی گفته میشه دامنه تابع $x < 2$ است، به این معنیه که x می‌تونه هر عدد حقیقی کوچک‌تر از ۲ باشه (ولی خود ۲ نه) پس داریم:

$$\begin{cases} f: \{x < 2\} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = -1 \end{cases}$$

تست نمونه: ۱. کدام تابع زیر، ثابت محسوب نمی‌شود؟



$$\begin{cases} f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = (x-1)^2 + 2x - x^2 \end{cases}$$



$$f = \{(-6, 2), (7, 2)\}$$

پاسخ: تابع گزینه «۱» ثابت نیست چون بُرد آن تک‌عضوی و برابر $\{2\}$ است. تابع گزینه «۲» ثابت نیست چون بُرد تابع به صورت $\{-1, 1\}$ است.

در تابع گزینه «۳» ضابطه رو ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x) = (x-1)^2 + 2x - x^2 = x^2 - 2x + 1 + 2x - x^2 = 1 \Rightarrow \text{متغیرها از بین رفتن پس تابع ثابت به} \Rightarrow$$

اتحاد دوم

تابع گزینه «۴» هم ثابت به چون همه فلش‌ها به عدد ۲ ختم میشن. بنابراین گزینه «۲» درست است.

۲. در تابع ثابت $f(x) = k$ اگر $1 \cdot f(3) - 2f(5) = 24$ باشد، حاصل $f(200)$ کدام است؟

۳ (۴) ☐

۲ (۳) ☐

۱ (۲) ☐

۰ (۱) ☐

$$1 \cdot f(3) - 2f(5) = 24 \Rightarrow 1 \cdot k - 2k = 24$$

پاسخ: تابع f ثابت بوده و مقدارش برابر با k است، پس $f(3)$ و $f(5)$ هم برابر k هستند:

$$\Rightarrow k = 24 \Rightarrow k = \frac{24}{1} = 24 \Rightarrow f(200) = 24$$

بنابراین گزینه «۴» درست است.

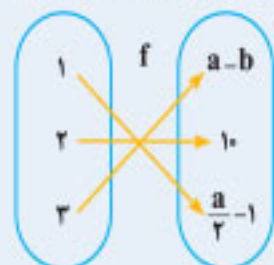
۳. اگر نمودار پیکانی مقابل، بیانگر تابعی ثابت باشد، $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۷ (۱) ☐

$\frac{7}{5}$ (۲) ☐

$\frac{11}{6}$ (۳) ☐

۱۱ (۴) ☐



پاسخ: می‌دونیم در نمودار پیکانی یک تابع ثابت، اعداد انتهای تمام فلش‌ها باید با هم برابر باشند. الان یکی از اون‌ها برابر با ۱۰ هست، پس بقیه رو هم مساوی

$$\frac{a}{2} - 1 = 10 \Rightarrow \frac{a}{2} = 11 \Rightarrow a = 2 \times 11 = 22$$

با ۱۰ قرار میدیم:

$$a - b = 10 \xrightarrow{a=22} 22 - b = 10 \Rightarrow -b = 10 - 22 \Rightarrow -b = -12 \Rightarrow b = 12 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{22}{12} = \frac{11}{6}$$

بنابراین گزینه «۳» درست است.

☆ تپ مورد علاقه طراحان کنکور

طراحان در این قسمت، معمولاً یک تابع ثابت رو به شکل زوج مرتبی میدن و ما باید یه سری پارامتر مجهول رو پیدا کنیم. در این جور مسائل، می‌دونیم وقتی تابع ثابت عضوهای دوم زوج مرتب‌ها همگی با هم برابرین، البته طراحان گاهی فرض‌هایی در متن سؤال قید می‌کنن که کار رو کمی سخت می‌کنه. مثلاً می‌گن تابع دو عضوی یا سه عضوی هست، پس باید حواسمون به این موارد هم باشه و جواب‌هایی رو که به دست میاریم حتماً چک کنیم.

؟ تست نمونه: اگر f یک تابع ثابت با دامنه دو عضوی و $m, n \in \mathbb{N}$ باشند، مقدار $m + t$ کدام است؟

۸ (۴) ☐

۷ (۳) ☐

۶ (۲) ☐

۵ (۱) ☐

پاسخ: می‌دونیم f تابعی ثابت پس تمام عضوهای دوم باید برابر باشن:

$$\text{برد} = \{n^2 - 2n, 3, t\} \Rightarrow t = 3, \quad \frac{n^2 - 2n = 3}{\text{تجزیه با جمله مشترک}} \Rightarrow \frac{n^2 - 2n - 3}{\text{این معادله رو حل می‌کنیم}} = 0 \Rightarrow (n - 3)(n + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 3 \\ n = -1 \end{cases}$$

$n = -1$ به این علت رد شد که در متن سؤال، گفته شده m و n اعداد طبیعی هستن. از طرفی در این تست، عنوان شده که دامنه فقط ۲ عضو داره ولی الان ظاهراً دامنه ۳ عضویه:

$$\text{دامنه} = \{-1, m - 4, m + n\} = \{-1, m - 4, m + 3\}$$

حالا برای اینکه دامنه، ۲ تا عضو داشته باشه اعضای دامنه رو دو به دو با هم مساوی قرار میدیم. اول $m - 4$ رو مساوی با -1 میذاریم:

$$m - 4 = -1 \Rightarrow m = 4 - 1 \Rightarrow m = 3$$

حالا باید درستی یا نادرستی $m = 3$ رو بررسی کنیم. الان اگه $m = 3$ رو در تابع f قرار بدیم (n و t رو هم که قبلاً پیدا کردیم) داریم:

$$f = \{(-1, 3), (-1, 3), (6, 3)\} = \{(-1, 3), (6, 3)\}$$

می‌بینیم که f هم ثابت هست و هم دامنه‌اش دو عضویه (اعداد -1 و 6) پس $m = 3$ قابل قبوله.

$$\xrightarrow{\text{خواسته سؤال}} m + t = 3 + 3 = 6$$

الان شاید تو ذهنتون این سؤال پیش بیاد که با توجه به دامنه، چرا $m + 3$ رو مساوی -1 نداشتیم یا اینکه چرا $m + 3$ رو مساوی $m - 4$ نداشتیم؟ این کارها رو هم می‌شد کرد. الان ببینیم چه اتفاقی می‌فته:

$$m + 3 = -1 \Rightarrow m = -3 - 1 \Rightarrow m = -4 \quad (\text{عدد } -4 \text{ طبیعی نیست})$$

$$m + 3 = m - 4 \Rightarrow 3 = -4 \quad (\text{اصلاً } m \text{ از بین رفت و معادله جواب نداره})$$

بنابراین گزینه «۲» درست است.

◀ جراحی زیبایی تابع ثابت

یه راز مهم: گاهی اوقات ضابطه یک تابع به ما داده میشه و می‌گن این تابع ثابت ولی مشکل اینجاست که در این ضابطه، عبارت‌هایی شامل $x^2, x, \dots$ مشاهده می‌کنیم؛ یعنی قیافه اون، شبیه تابع ثابت نیست. اینجاست که باید یک جراحی زیبایی انجام بدیم، البته با قلم نه با تیغ جراحی. شما می‌دونین که تابع ثابت اصلاً نباید متغیر داشته باشه پس ضریب تمام متغیرها رو مساوی صفر قرار میدیم تا اون جملات، کلاً نابود بشن برن پی کارشون و فقط عدد ثابت باقی بمونه. از این نکته در آزمون‌های آزمایشی، همیشه سؤال مطرح میشه. ■

؟ تست نمونه: ۱. تابع $f(x) = (a - 2b)x^2 + (b - 1)x + 2a - b$ تابعی ثابت است. $f(10)$ کدام است؟

۱۲ (۴) ☐

۸ (۳) ☐

۶ (۲) ☐

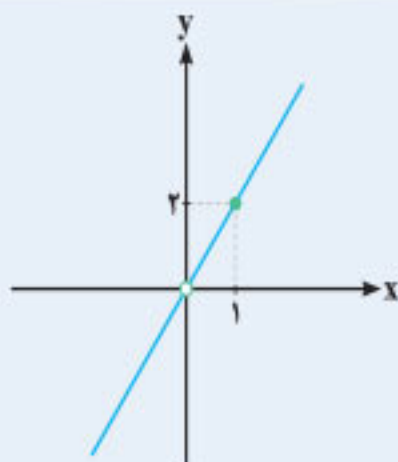
۳ (۱) ☐

پاسخ: الان عدد ثابت ما $(2a - b)$ است، پس بقیه جملات که متغیر دارن باید از بین برن. برای این کار ضریب x^2 و ضریب x رو مساوی صفر میذاریم:

$$b - 1 = 0 \Rightarrow b = 1, \quad a - 2b = 0 \xrightarrow{b=1} a - 2(1) = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$f(x) = 2a - b \Rightarrow f(x) = 2(2) - 1 \Rightarrow f(x) = 3 \Rightarrow f(10) = 3$$

بنابراین گزینه «۱» درست است.



۳. اگر $f(x) = x^2$ و نمودار تابع $(\frac{f}{g})(x)$ به صورت مقابل باشد، ضابطه تابع $g(x)$ کدام است؟

$$g(x) = \frac{x^2}{2} \quad (۲) \quad \square$$

$$g(x) = \frac{x}{2} \quad (۱) \quad \square$$

$$g(x) = 2x^2 \quad (۴) \quad \square$$

$$g(x) = 2x \quad (۳) \quad \square$$

پاسخ: نمودار $\frac{f}{g}$ به ما داده شده که به کمک دو نقطه از اون، معادله‌اش رو به دست میاریم:

$$A \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{1 - 0} = 2$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x \xrightarrow[\text{است } \frac{f}{g}]{\text{همون } y} (\frac{f}{g})(x) = 2x \xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} \frac{x^2}{g(x)} = 2x \xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} 2xg(x) = x^2$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2}$$

بنابراین گزینه «۱» درست است.

حواستون باشه: الان در نمودار داده شده، مبدأ جزء نمودار نیست (تو خالیه) ولی برای محاسبه شیب خط و معادله خط، میشه ازش استفاده کرد و مشکلی پیش نمیاد. در واقع باید ازش استفاده کرد چون فقط داشتن نقطه $B(1, 2)$ برای محاسبه شیب و معادله خط، کافی نیست. ■

تذکر: چون $g(0) = \frac{0}{2} = 0$ هست، پس در تابع $(\frac{f}{g})(x)$ مقدار $x = 0$ در دامنه نیست، به همین علت نقطه $(0, 0)$ تو خالی رسم شده است. البته شما الان قرار نیست کاری کنید فقط اینو گفتیم که بدونین. ■

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

روش‌های مختلف نمایش تابع

تساوی دو زوج مرتب

۲۵۰. اگر زوج‌های مرتب $(a-b, 13)$ و $(2, 2a+b)$ با هم برابر باشند، حاصل $a+b$ کدام است؟

۳ (۴)

۸ (۳)

صفر (۲)

۵ (۱)

۲۵۱. می‌خواهیم سه زوج مرتب $(n-2, 3m)$, $(m-1, 6)$, $(-4, 6)$ را به دو زوج مرتب تبدیل کنیم، حاصل $m+n$ کدام است؟ $(m, n \in \mathbb{N})$

۵ (۴)

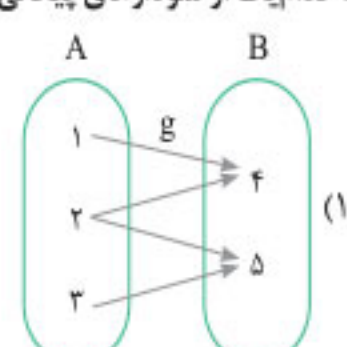
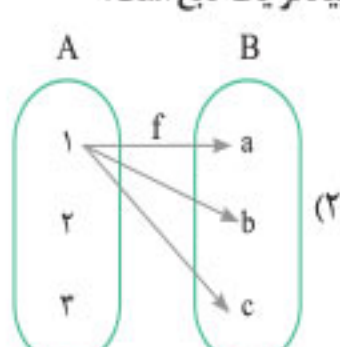
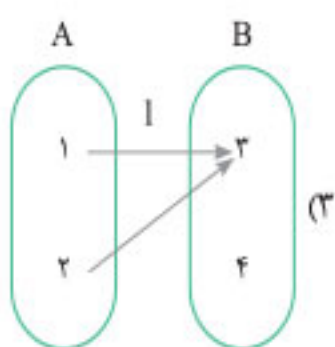
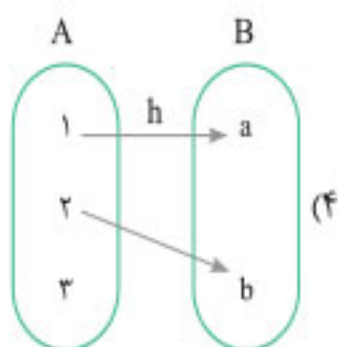
۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

تابع به شکل نمودار پیکانی

۲۵۲. کدام یک از نمودارهای پیکانی زیر، بیانگر یک تابع است؟



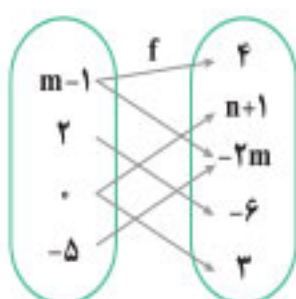
۲۵۳. اگر نمودار پیکانی مقابل، مربوط به یک تابع باشد، حاصل $n+m$ کدام است؟

صفر (۱)

-۴ (۲)

۴ (۳)

(۴) هیچ وقت تابع نیست.



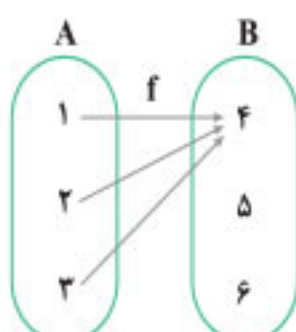
۲۵۴. با توجه به نمودار پیکانی (نمودار ون) مقابل، دامنه و برد کدام است؟

$$R_f = \{4, 5, 6\}, D_f = \{1, 2, 3\} \quad (۱)$$

$$R_f = \{4\}, D_f = \{1, 2, 3\} \quad (۲)$$

$$R_f = \{1, 2, 3\}, D_f = \{4, 5, 6\} \quad (۳)$$

$$R_f = \{1, 2, 3\}, D_f = \{4\} \quad (۴)$$



تابع به شکل زوج مرتب

۲۵۵. کدام یک از مجموعه‌های (رابطه‌ها) زیر، بیانگر یک تابع نیست؟

$$i = \{(1, 2)\} \quad (4) \quad h = \{(1, 2), (3, 5), (1, 2)\} \quad (3) \quad g = \{(1, 4), (2, 5)\} \quad (2) \quad f = \{(1, 2), (2, 5), (1, 4)\} \quad (1)$$

۲۵۶. با توجه به تابع $f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 7), (5, 5)\}$ ، دامنه و برد کدام است؟

$$R_f = \{3, 5, 7\}, D_f = \{1, 2, 4\} \quad (2) \quad R_f = \{1, 2, 3, 5\}, D_f = \{2, 4, 5, 7\} \quad (1) \\ R_f = \{2, 4, 5, 7\}, D_f = \{1, 2, 3, 5\} \quad (4) \quad R_f = \{1, 2, 4\}, D_f = \{3, 5, 7\} \quad (3)$$

۲۵۷. اگر مجموعه $f = \{(1, 2a-5), (1, 1-a), (\frac{a}{4}, b)\}$ یک تابع باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

$$-1 \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad 1 \quad (3) \quad 2 \quad (4)$$

۲۵۸. به ازای کدام مقدار m ، رابطه $R = \{(2, m^2), (2, 1), (-4, m), (1, m+3), (m, 5)\}$ یک تابع است؟

$$-1 \quad (1) \quad \pm 2 \quad (2) \quad -2 \quad (3) \quad \pm 1 \quad (4)$$

۲۵۹. اگر $f = \{(1, x-2y), (2, 3), (9, 5), (1, -7), (9, x+y)\}$ یک تابع باشد، مقدار $x^2 + y^2$ چند برابر $-x-4y$ است؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۲۰۰۷۳۰۱**

(سراسری ۱۴۰۱)

$$2 \quad (1) \quad 1 \quad (2) \quad -1 \quad (3) \quad -2 \quad (4)$$

۲۶۰. رابطه $f = \{(a, x+y), (b, m^2), (a, m^2-1), (b, x-y), (a, 4)\}$ یک تابع است. مقدار $x^2 + y^2$ کدام است؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۲۰۰۷۴۰۱**

(دی ۱۴۰۱)

$$2/5 \quad (1) \quad 20/5 \quad (2) \quad 24 \quad (3) \quad 42 \quad (4)$$

۲۶۱. به ازای کدام مقدار m ، رابطه $\{(1, m^2), (3, m^2), (4, 9)\}$ یک تابع است؟

$$1 \quad (1) \quad \pm 2 \quad (2) \quad \text{فقط } 3 \quad (3) \quad \text{هیچ مقدار } m \quad (4)$$

(سراسری ۹۸)

۲۶۲. اگر رابطه $\{(3, a+2b), (5, 4), (7, 2), (3, 7), (5, 2a-b)\}$ یک تابع باشد، $a^2 - b^2$ کدام است؟

$$3 \quad (1) \quad 4 \quad (2) \quad 5 \quad (3) \quad 6 \quad (4)$$

تست

۲۶۳. به ازای چند مقدار حقیقی برای a ، رابطه $f = \{(1, 3a^2), (a+1, 1), (0, 1-\sqrt{3}a), (a^2-3, 2), (1, a^4)\}$ یک تابع است؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۲۰۰۷۵۰۱**

$$3 \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad 1 \quad (3) \quad 4 \quad (4) \quad \text{صفر}$$

(سراسری ۱۴۰۰)

۲۶۴. فرض کنید تابع f به صورت $f = \{(a, a^2) | a = 0, 1, 2\} \cup \{(a, a+b) | a, b \in \{0, 1, 2\}\}$ توصیف شده باشد. تعداد عناصر f ، کدام است؟

$$8 \quad (1) \quad 9 \quad (2) \quad 10 \quad (3) \quad 12 \quad (4) \quad \text{کد پاسخ تصویری: ۰۰۰۲۰۰۷۶۰۱}$$

۲۶۵. در تابع $f = \{(2, 5), (3, 1), (4, 2), (1, 4)\}$ ، مقدار $2f(1) - f(2)$ کدام است؟

$$1 \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 4 \quad (4)$$

۲۶۶. با توجه به رابطه $f = \{(1, 4), (1, 3), (2, 1), (3, 2)\}$ زیرمجموعه‌ای از آن که به صورت یک تابع با برد $\{2, 1\}$ باشد، دارای چه دامنه‌ای است؟

$$\{2, 3\} \quad (1) \quad \{1, 3\} \quad (2) \quad \{1, 1\} \quad (3) \quad \{1, 2\} \quad (4)$$

۲۶۷. اگر در تابع $f = \{(1, a-1), (2, 3), (b+2, 7)\}$ ، $D_f = \{1, 2, 5\}$ و $R_f = \{3, 7, -1\}$ باشد، $2a+b$ کدام است؟

$$5 \quad (1) \quad 3 \quad (2) \quad 7 \quad (3) \quad -1 \quad (4)$$

۲۶۸. اگر مجموع اعضای برد تابع $f = \{(a-2, a+1), (2a+1, a^2), (a^2-3, 1-2a)\}$ برابر با ۴ باشد، مجموع اعضای دامنه کدام است؟

$$4 \quad (1) \quad -8 \quad (2) \quad -5 \quad (3) \quad 10 \quad (4)$$

۲۶۹. اگر $f = \{(2, x-y), (2, -3), (4x+y, -3)\}$ تابعی باشد که دامنه آن فقط یک عضو داشته باشد، حاصل $\frac{x}{y}$ کدام است؟

$$-5 \quad (1) \quad -\frac{1}{5} \quad (2) \quad -14 \quad (3) \quad -\frac{1}{14} \quad (4)$$

تابع به شکل جدول

۲۷۰. در تابع مقابل x متغیر مستقل و y متغیر وابسته می‌باشد. مقدار $m-n$ کدام است؟

$$f: \begin{array}{c|ccccc} x & 0 & -1 & 2\sqrt{2} & -1^3 & \sqrt{8} \\ \hline y & 6 & m-n & n-2m & 2m & 4 \end{array}$$

$$\frac{-4}{3} \quad (1) \quad \frac{4}{3} \quad (2) \quad \frac{-8}{3} \quad (3) \quad \frac{8}{3} \quad (4)$$

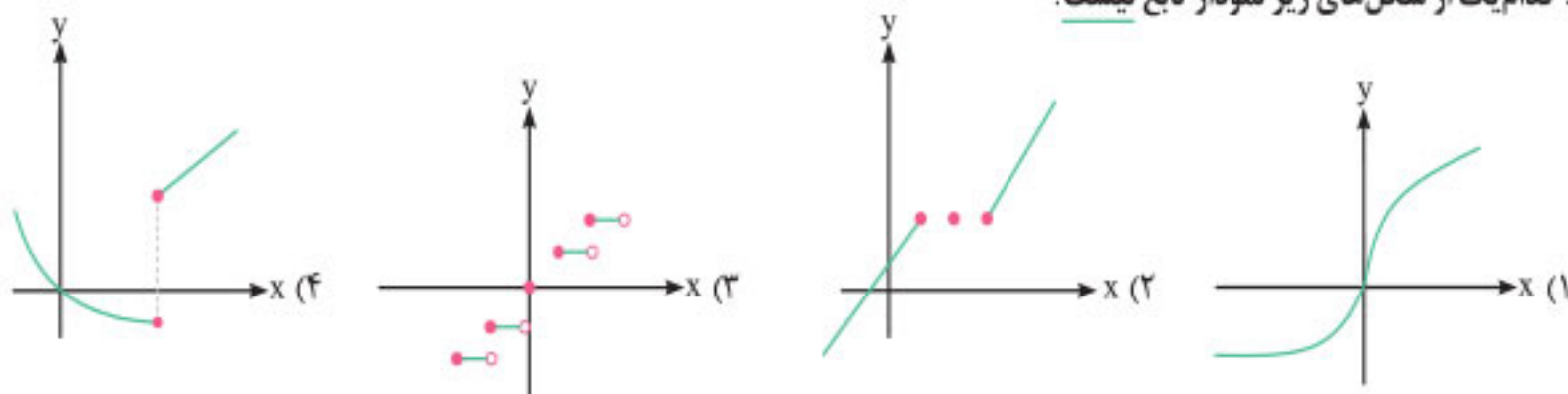
۲۷۱. در جدول مقابل به جای a یا b یا c چه عددی قرار دهیم تا g تابع نباشد؟

$$g: \begin{array}{c|ccccc} x & -3 & (-2)^2 & -1 & 0 & -1 & 4 & -3 \\ \hline y & 4 & 9 & c & a^3 & 5 & a^2 & 7b \end{array}$$

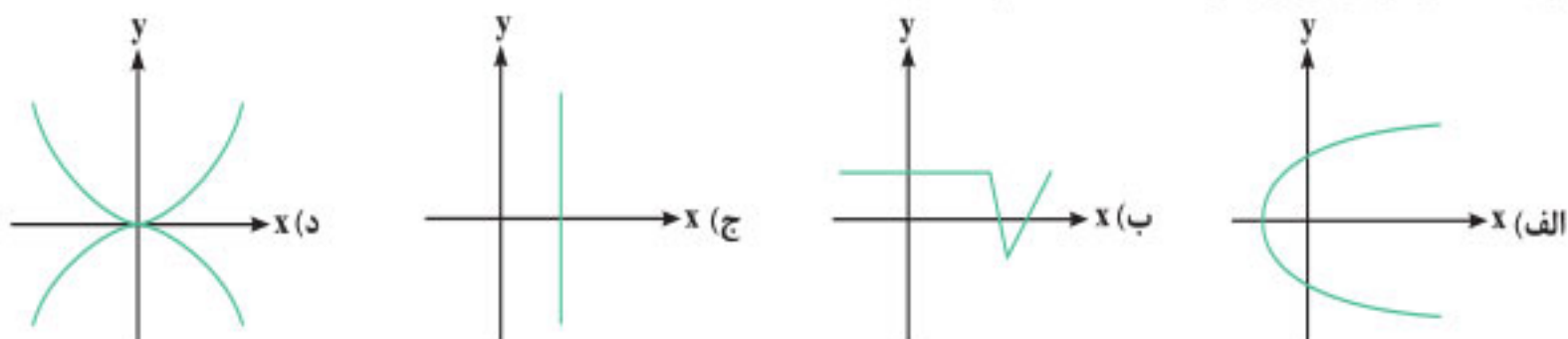
$$a=2 \quad (1) \quad b=\frac{4}{y} \quad (2) \quad c=5 \quad (3) \quad \text{به ازای هر مقدار } a, \text{ رابطه } g \text{ تابع است.} \quad (4)$$

تابع به شکل نمودار هندسی

۲۷۲. کدام یک از شکل‌های زیر نمودار تابع نیست؟



۲۷۳. چه تعداد از نمودارهای زیر تابع هستند؟ (x متغیر مستقل است.)



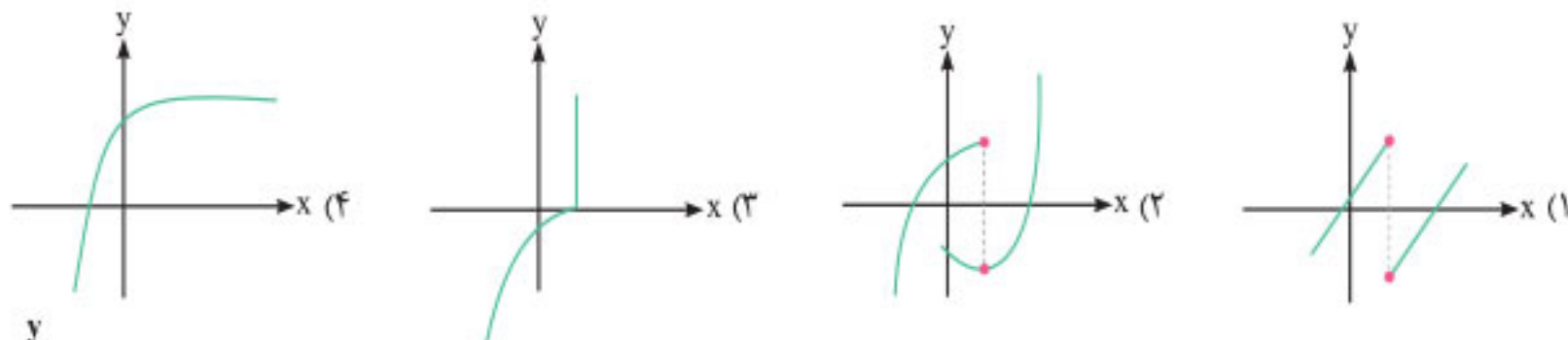
(۱) صفر

(۲) یک

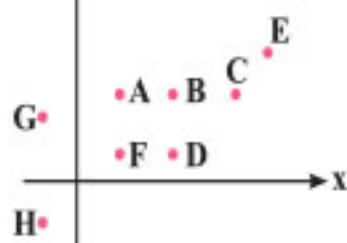
(۳) دو

(۴) سه

۲۷۴. کدام نمودار نمایش یک تابع $y = f(x)$ است؟ (x متغیر مستقل است.)



۲۷۵. با حذف کدام نقطه‌ها از نمودار مقابل، می‌توان یک تابع ساخت؟ (x متغیر مستقل است.)



(۱) A, B, C

(۲) B, F, G

(۳) D, F, E

(۴) A, E, H

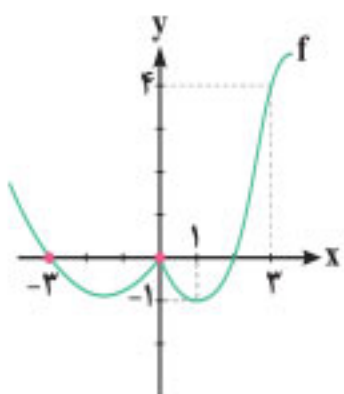
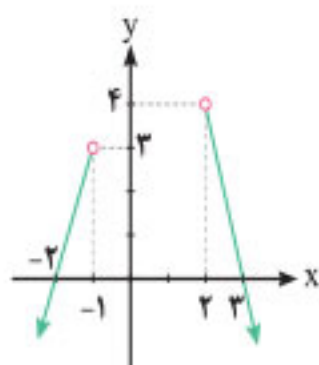
۲۷۶. با اضافه کردن کدام گزینه زیر به نمودار مقابل، تابع بودن آن، منتفی نمی‌شود؟

(۱) نقطه $A(3, 4)$

(۲) نقطه $B(-\frac{3}{2}, 0)$

(۳) پاره‌خط به معادله $y = 3$ با دامنه $-1 \leq x \leq 2$

(۴) پاره‌خط به معادله $y = 4$ با دامنه $-2 < x < 3$



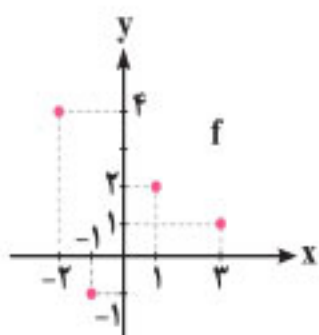
۲۷۷. با توجه به نمودار تابع f، حاصل $f(-3) - f(1) + f(3) + f(0)$ کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۵

(۳) ۳

(۴) -۳



۲۷۸. با توجه به نمودار تابع، کدام یک از گزینه‌های زیر، دامنه و برد آن را نشان می‌دهد؟

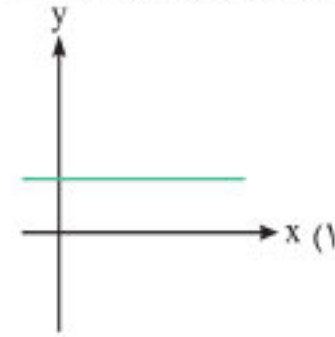
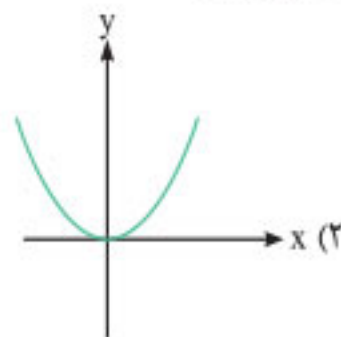
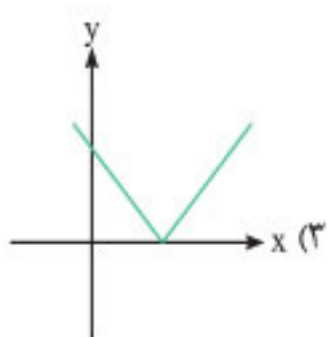
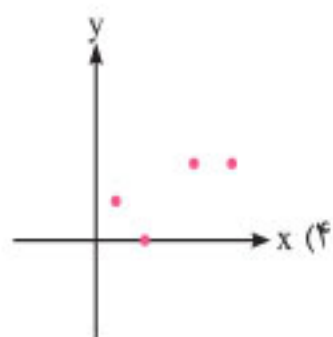
(۱) $R_f = \{-2, -1, 1, 3\}, D_f = \{-1, 1, 2, 4\}$

(۲) $R_f = \{-1, 1, 2, 4\}, D_f = \{-2, -1, 1, 3\}$

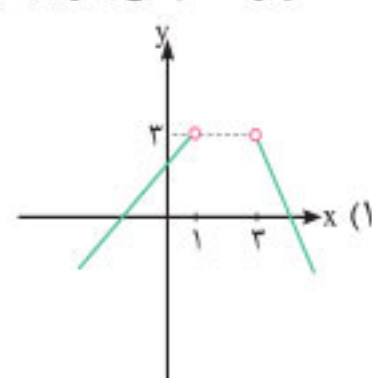
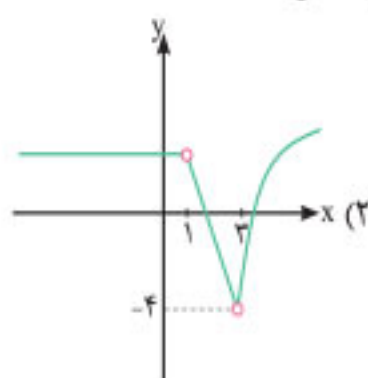
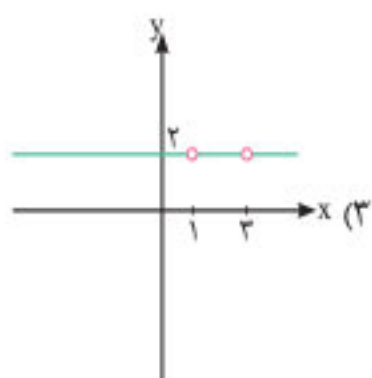
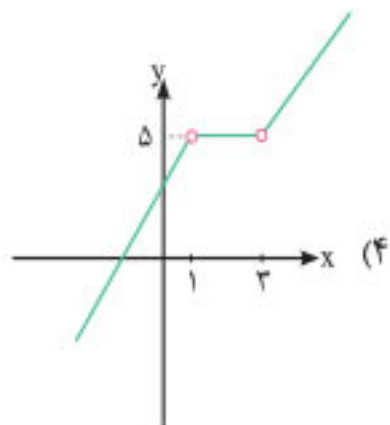
(۳) $R_f = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}, D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

(۴) $R_f = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}, D_f = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

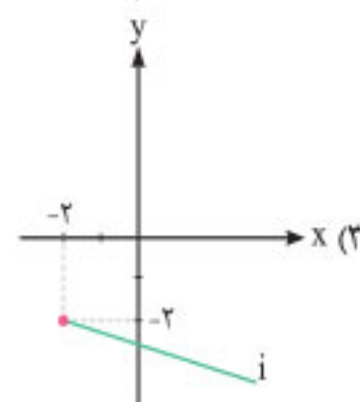
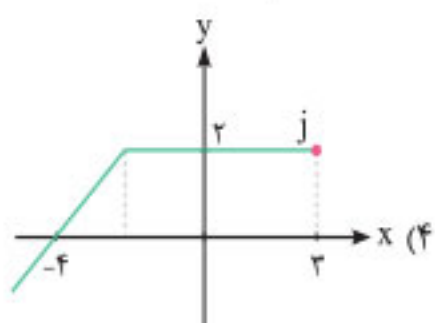
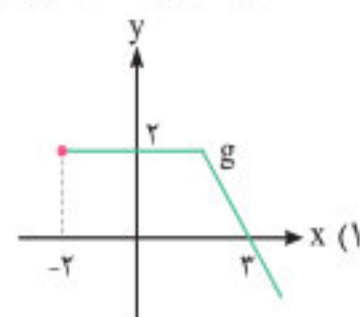
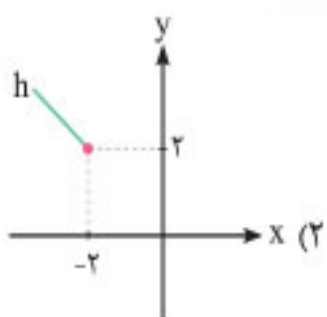
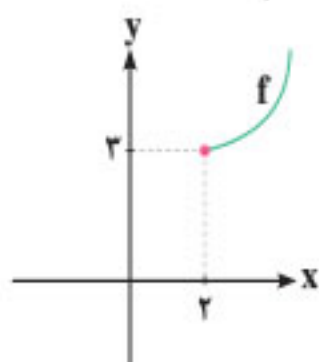
۲۷۹. در نمودارهای زیر، برد کدام تابع تک‌عضوی است؟



۲۸۰. دامنه و برد کدام تابع به ترتیب $\mathbb{R} - \{1, 2\}$ و $\mathbb{R}$ است؟



۲۸۱. دامنه تابع f با بُرد کدام تابع زیر برابر است؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۷۰۷۸۰۷۸**



تابع به شکل ضابطه و توصیف کلامی

۲۸۲. ضابطه تابع جدول مقابل، کدام گزینه می‌تواند باشد؟

x	۰	۱	۲	۳	۴
y	۱	۲	۵	۱۰	۱۷

$$y = x^2 + 1 \quad (۲)$$

$$y = 2x^2 + 1 \quad (۴)$$

$$y = x + 1 \quad (۱)$$

$$y = 2x + 1 \quad (۳)$$

۲۸۳. تابع f به هر عدد حقیقی، سه برابر مجموع آن عدد و مربعش را نسبت می‌دهد. ضابطه f کدام است؟

$$\begin{cases} f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ f(x) = 3x + x^2 \end{cases} \quad (۴)$$

$$\begin{cases} f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 3(x + x^2) \end{cases} \quad (۳)$$

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 3(x + x^2) \end{cases} \quad (۲)$$

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 3x + x^2 \end{cases} \quad (۱)$$

۲۸۴. کدام توصیف کلامی، برای تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{3}$ مناسب است؟

(۱) تابع f به هر عدد طبیعی، جذر ثلث تفاضل آن عدد از یک را نسبت می‌دهد.

(۲) تابع f به هر عدد طبیعی، ثلث جذر تفاضل آن عدد از یک را نسبت می‌دهد.

(۳) تابع f به هر عدد طبیعی، جذر ثلث تفاضل عدد ۱ از آن عدد را نسبت می‌دهد.

(۴) تابع f به هر عدد طبیعی، ثلث جذر تفاضل عدد ۱ از آن عدد را نسبت می‌دهد.

۲۸۵. در یک سری از مستطیل‌ها، طول از ۳ برابر عرض، ۴ واحد بیشتر است. اگر طول را با x نمایش دهیم تابع f که مساحت این مستطیل‌ها را بر حسب طول

آن‌ها بیان می‌کند کدام است؟ ($\mathbb{R}^+$ یعنی اعداد حقیقی مثبت) **کد پاسخ تصویری: ۰۷۰۷۹۰۷۹**

$$\begin{cases} f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = \frac{x^2 - 4x}{3} \end{cases} \quad (۴)$$

$$\begin{cases} f: \{x > 4\} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = \frac{x^2 - 4x}{3} \end{cases} \quad (۳)$$

$$\begin{cases} f: \{x > 0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 - 4x \end{cases} \quad (۲)$$

$$\begin{cases} f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ f(x) = x^2 - 4x \end{cases} \quad (۱)$$



۲۸۶. ماشین f هر عدد حقیقی که به آن وارد شود را به توان ۲ رسانده و سپس ۵ برابر x را از جواب کم می کند.

با توجه به شکل مقابل، مجموع مقادیر قابل قبول برای x کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

(خارج ۹۲)

۲۸۷. اگر $f(x) = |3x - 5|$ و $g(x) = \sqrt{\frac{1}{4}x + 2}$ باشند، مقدار $f(\frac{1}{4}) + g(\frac{1}{4})$ چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۲۸۸. کدام گزینه می تواند ضابطه تابع $f = \{(1, 3), (2, -4), (3, 9), (4, -8)\}$ باشد؟

- (۱) $f(x) = 3x$ (۲) $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{اعداد طبیعی فرد} \\ -2x & \text{اعداد طبیعی زوج} \end{cases}$ (۳) $f(x) = -2x$ (۴) $f(x) = \begin{cases} 3x & ; x > 0 \\ -2x & ; x < 0 \end{cases}$

(سراسری ۹۷)

۲۸۹. اگر $f(x) = \sqrt{|2x - 5|}$ باشد، مقدار $f(-2) + 2f(\frac{1}{4})$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

(خارج ۹۷)

۲۹۰. اگر $f(x) = x\sqrt{2 + |x|}$ باشد، مقدار $f(2) + 4f(-\frac{1}{4})$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۲/۵ (۳) ۳ (۴) ۳/۵

۲۹۱. اگر نمودار تابع $f(x) = x^2 + ax + 1$ از نقطه $(2, 3)$ عبور کند، مقدار $f(1)$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۱ (۳) ۵ (۴) -۱

۲۹۲. در تابع با ضابطه $f(x) = ax^2 + bx - 2$ ، تساوی های $f(1) = -3$ و $f(3) = 7$ برقرار است. مقدار b کدام است؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۲۰۲۰۰۸۰**

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) -۱ (۴) ۱

(سراسری ۹۵)

۲۹۳. اگر $f(x) = |2x - 5|$ باشد، مقدار $f(2 + \sqrt{2}) + f(1 + \sqrt{2})$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $4\sqrt{2} - 4$ (۳) ۳ (۴) $2\sqrt{2} + 2$

(سراسری ۹۲)

۲۹۴. در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{-2x^2 + 8x + 7}$ ، مقدار $f(2 - \sqrt{3})$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۹۵. عبارت ذکر شده در کدام گزینه صحیح است؟

(۱) دامنه یک تابع، مجموعه مقادیری است که یک متغیر وابسته می تواند داشته باشد.

(۲) دامنه یک تابع، مجموعه مقادیری است که یک متغیر مستقل می تواند داشته باشد.

(۳) در رابطه $h(x) = |x^2 - 3x|$ متغیر x متغیر وابسته و $h(x)$ متغیر مستقل است.

(۴) برد یک تابع، مجموعه مقادیری است که یک متغیر مستقل می تواند داشته باشد.

۲۹۶. با توجه به تابع $f(x) = 2x - 1$ ، اگر $R_f = \{1, 3, 5\}$ باشد، دامنه تابع کدام خواهد بود؟

- (۱) $D_f = \{1, 3, 5\}$ (۲) $D_f = \{-1, -3, -5\}$ (۳) $D_f = \{1, 2, 3\}$ (۴) $D_f = \{-1, -2, -3\}$

۲۹۷. اگر برد تابع $f(x) = x^2 - 5x + 1$ برابر $R_f = \{1\}$ باشد، تابع f به صورت زوج مرتب کدام می تواند باشد؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۲۰۲۰۰۸۱**

- (۱) $f = \{(0, 1), (4, 1)\}$ (۲) $f = \{(4, 1)\}$ (۳) $f = \{(0, 1), (5, 1)\}$ (۴) $f = \{(1, 1), (5, 1)\}$

۲۹۸. با توجه به تابع $f: A \rightarrow B$ و $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$ ، $A = \{0, -1, 8, 3\}$ ، برد تابع f کدام است؟

- (۱) $R_f = \{0, 1, -2, -1\}$ (۲) $R_f = \{0, -1, 2, 1\}$ (۳) $R_f = \{0, 1, 2\}$ (۴) $R_f = \{0, -1, -2\}$

۲۹۹. در تابع $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ اگر $f(a) = 3$ باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) فقط -۳ (۲) فقط ۱ (۳) ۱ و -۳ (۴) ۳

۳۰۰. اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{x^2 - 4}{3x}$ چهار عضوی و برد آن $\{0, 1\}$ باشد، مجموع عضوهای دامنه کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) صفر (۴) ۱

۳۰۱. کدام یک از رابطه های زیر، تابع نیست؟

(۱) رابطه بین هر مسلمان و قبله او

(۳) رابطه بین مساحت هر مربع و ضلع آن

۳۰۲. کدام گزینه بیانگر یک تابع نیست؟

(۱) رابطه ای که به هر شخص، شماره ملی او را نسبت می دهد.

(۳) رابطه ای که به هر شخص، نام والدین او را نسبت می دهد.

(۲) رابطه بین هر فرد و شماره ملی او

(۴) رابطه بین هر شهر و سوغاتی آن شهر

(۲) رابطه ای که به هر فرد، نام خانوادگی اش را نسبت می دهد.

(۴) رابطه ای که به هر شخص، رنگ پوستش را نسبت می دهد.

۳۰۳. سه نفر می‌خواهند زمین مستطیل شکلی را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده و حصار کشی کنند، به طوری که یک حصار مشترک بین دو قسمت کشیده شود. اگر کمترین حصار کشی ۱۹۰ متر باشد، ضابطه جبری مساحت زمین کدام است؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۲۰۲۰۰۸۲**

(سراسری ۱۴۰۲)

$$S(x) = 190x - x^2, 0 < x < 95 \quad (2)$$

$$S(x) = 95x - 2x^2, 0 < x < 47/5 \quad (1)$$

$$S(x) = 190x - x^2, 0 < x < 47/5 \quad (4)$$

$$S(x) = 95x - 2x^2, 0 < x < 95 \quad (3)$$

۳۰۴. دو نفر می‌خواهند زمینی به شکل مستطیل را به دو قسمت مساوی تقسیم کرده و حصار کشی کنند، به طوری که یک حصار بین دو قسمت مشترک باشد. اگر کمترین طول حصار کشی ۲۱۰ متر باشد، ضابطه جبری مساحت زمین کدام است؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۲۰۲۰۰۸۳**

(خارج ۱۴۰۲)

$$S(x) = 210x - \frac{1}{2}x^2, 0 < x < 105 \quad (2)$$

$$S(x) = 210x - \frac{1}{2}x^2, 0 < x < 70 \quad (1)$$

$$S(x) = 105x - \frac{3}{2}x^2, 0 < x < 105 \quad (4)$$

$$S(x) = 105x - \frac{3}{2}x^2, 0 < x < 70 \quad (3)$$

محاسبه تعداد توابع از A به B

۳۰۵. مجموعه A دارای ۱۰ عضو و مجموعه B دارای ۴ عضو می‌باشد. چند تابع مختلف از A به B می‌توان ساخت؟

$$2^{10} \quad (4)$$

$$10^4 \quad (3)$$

$$2^{20} \quad (2)$$

$$10^4 \quad (1)$$

۳۰۶. چند تابع مختلف از مجموعه اعداد طبیعی زوج یک رقمی به مجموعه اعداد طبیعی اول یک رقمی می‌توان ساخت؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۲۰۲۰۰۸۴**

$$32 \quad (4)$$

$$64 \quad (3)$$

$$128 \quad (2)$$

$$256 \quad (1)$$

۳۰۷. مجموعه A دارای ۳ عضو و مجموعه B دارای ۲ عضو است. چند تابع از مجموعه A به مجموعه B می‌توان نوشت؟

$$5 \quad (4)$$

$$9 \quad (3)$$

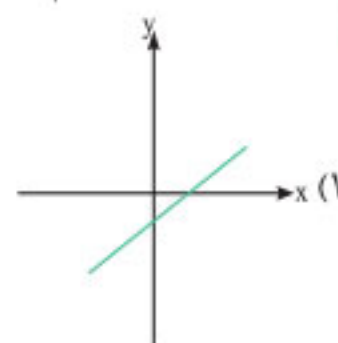
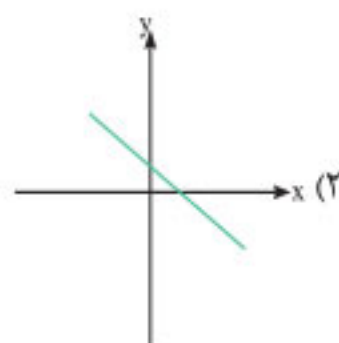
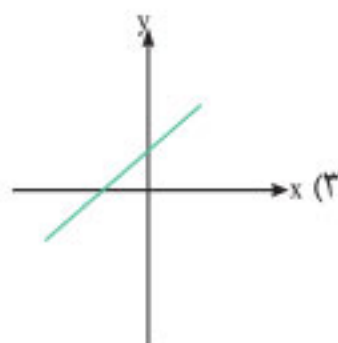
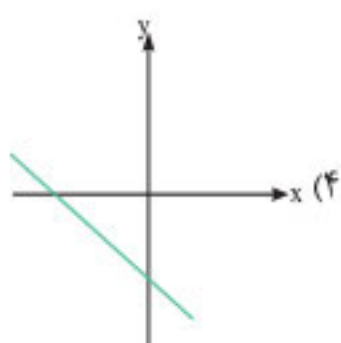
$$8 \quad (2)$$

$$6 \quad (1)$$

تابع درجه اول (خط)

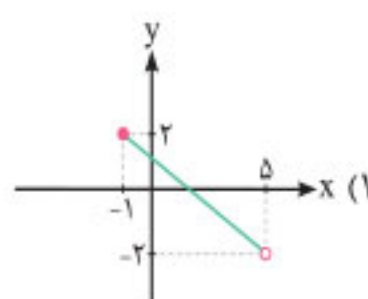
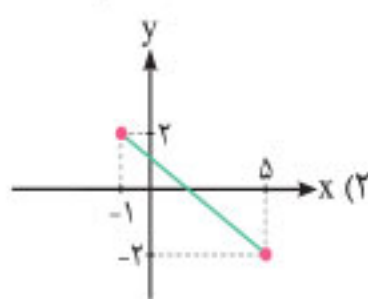
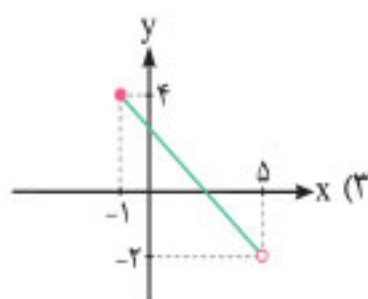
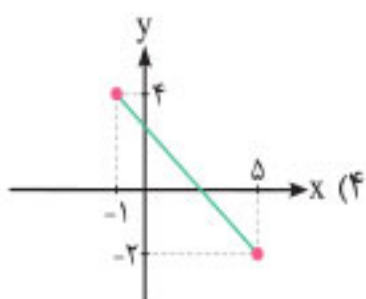
شیب، معادله خط و نمودار آن

۳۰۸. نمودار تابع $\frac{2y-1}{3} = -2x$ کدام است؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۲۰۲۰۰۸۵**



تست

۳۰۹. نمودار تابع $y = 3 - x$ ، با دامنه $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 5\}$ کدام است؟



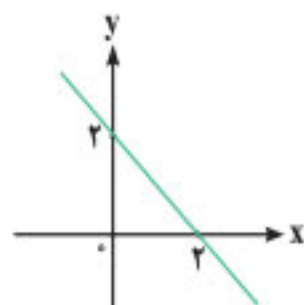
۳۱۰. نمودار مقابل مربوط به کدام ضابطه زیر است؟

$$y = -x + 2 \quad (1)$$

$$y = x + 2 \quad (2)$$

$$y = x - 2 \quad (3)$$

$$y = -2x + 2 \quad (4)$$



(سراسری ۱۴۰۱)

۳۱۱. نمودار یک تابع خطی از نقاط $(-2, a)$ ، $(-1, 3)$ و $(1, -4)$ می‌گذرد. مقدار a کدام است؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۱۰۲۰۰۸۶**

$$7/5 \quad (4)$$

$$7 \quad (3)$$

$$6/5 \quad (2)$$

$$6 \quad (1)$$

۳۱۲. در یک تابع خطی $f(1) = 5$ و $f(3) = -9$ است. اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 5\}$ دامنه تابع f باشد، بردارین تابع کدام است؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۱۰۲۰۰۸۷**

(خارج ۱۴۰۱)

$$-23 \leq y \leq 12 \quad (4)$$

$$-47 \leq y \leq 12 \quad (3)$$

$$-23 \leq y \leq 7 \quad (2)$$

$$-47 \leq y \leq 7 \quad (1)$$

۳۱۳. در تابع خطی f داریم: $f(1) = 3$ و $f(10) = 21$ ، حاصل $-2\sqrt{2} + f(\sqrt{2})$ کدام است؟

$$2\sqrt{2} \quad (4)$$

$$\sqrt{2} \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$\text{صفر} \quad (1)$$



۳۱۴. نمودار تابع $y = -2mx + n$ با فرض $m > 0$ و $n > 0$ از کدام ناحیه محاورهای مختصات عبور نمی‌کند؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۳۱۵. معادله خطی با شیب یک که از نقاط $(1, a)$ و $(a, 3)$ بگذرد، به چه صورت است؟

- (۱) $y = x + 2$ (۲) $y = x - 1$ (۳) $y = x - 2$ (۴) $y = x + 1$

۳۱۶. اگر شیب تابع خطی گذرنده از نقاط $A(2k-1, 7)$ و $B(-3, k+2)$ برابر یک باشد، مقدار k چقدر است؟

- (۱) -1 (۲) 3 (۳) -3 (۴) 1

۳۱۷. خط $ay + 4x = 4b$ از نقطه‌های $(1, 4)$ و $(-1, 2)$ عبور می‌کند. حاصل $a+b$ کدام است؟

- (۱) 7 (۲) -7 (۳) 4 (۴) -4

۳۱۸. اگر خط به معادله $3mx - (2m-2)y - 18 = 0$ از نقطه‌ای به طول ۳ واقع بر محور طول‌ها بگذرد، شیب خط کدام است؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

۳۱۹. اگر تابع خطی $f(x) = (1-2m)x - \frac{2m+3}{2}$ به‌ازای همه مقادیر m از نقطه (α, β) بگذرد، مقدار $\beta - \alpha$ کدام است؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۲۰۲۰۰۸۸**

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $-\frac{5}{2}$ (سراسری ۱۴۰۲)

۳۲۰. اگر تابع خطی $f(x) = (\frac{1-m}{2})x - m + \frac{1}{2}$ به‌ازای همه مقادیر m از نقطه (a, b) بگذرد، مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۲۰۲۰۰۸۹**

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) 4 (۴) -4 (خارج ۱۴۰۲)

۳۲۱. اگر ضابطه تابع خطی $f(x) = \frac{-4}{a+2}x + b$ و $f(1) = 2a-1$ و $f(-\frac{a}{2}) = 2$ باشد، مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۲۰۲۰۰۹۰**

- (۱) $3/2$ (۲) $1/6$ (۳) 2 (۴) 1 (خارج ۱۴۰۲)

۳۲۲. در خط گذرنده از دو نقطه $(4, 5)$ و $(2, -3)$ ، علامت شیب و عرض از مبدأ چگونه است؟

- (۱) شیب منفی - عرض از مبدأ مثبت (۲) شیب منفی - عرض از مبدأ منفی (۳) شیب مثبت - عرض از مبدأ مثبت (۴) شیب مثبت - عرض از مبدأ منفی

۳۲۳. تابع $f(x) = -\frac{1}{4}x + 4$ را در دامنه $\{-99, -98, \dots, 0, 1, \dots, 99, 100\}$ در نظر بگیرید. مقدار متوسط عضوهای برد تابع f ، کدام است؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۲۰۲۰۰۹۱**

- (۱) $3/5$ (۲) $3/75$ (۳) 4 (۴) $4/25$ (سراسری ۱۴۰۰)

۳۲۴. در تابع $f(x) = -4x + 1$ اگر دامنه برابر $-3 \leq x < 6$ باشد برد تابع کدام است؟

- (۱) $-23 \leq y < 13$ (۲) $-23 < y \leq 13$ (۳) $-10 \leq y < 18$ (۴) $-10 < y \leq 18$

۳۲۵. نقاط متمایز $(1, 3a)$ ، $(-1, a)$ و $(a, 3)$ روی یک خط قرار دارند. مقدار a کدام است؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۳۰۲۰۰۹۲**

- (۱) -2 (۲) -3 (۳) 1 (۴) 3 (سراسری ۱۴۰۳)

۳۲۶. نقاط متمایز $(-\frac{a}{2}, 2/5)$ ، $(3, a-2)$ و $(3a, -1)$ روی یک خط قرار دارند. مقدار a کدام است؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۳۰۲۰۰۹۳**

- (۱) 1 (۲) -1 (۳) 3 (۴) -3 (خارج ۱۴۰۳)

۳۲۷. نمودار تابع خطی f از مبدأ گذشته و $f(-6) = 2$ است. حاصل $f(0/3) - f(-0/3)$ کدام است؟

- (۱) $0/2$ (۲) $0/4$ (۳) $-0/2$ (۴) $-0/4$

۳۲۸. در تابع خطی f اگر $f(1) - f(4) = 10$ باشد و نمودار f از نقطه‌ای به عرض ۴ روی محور y ها بگذرد، مقدار $f(100)$ کدام است؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۲۰۲۰۰۹۴**

- (۱) -296 (۲) -300 (۳) -396 (۴) -400

۳۲۹. اگر بدانیم دامنه و برد تابع خطی f به شکل $-4 \leq x < 1$ و $10 \leq y < 12$ باشد؛ مقدار $f(0)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{58}{2}$ (۲) $\frac{58}{5}$ (۳) $\frac{60}{5}$ (۴) $\frac{62}{5}$

۳۳۰. نمودار دو تابع خطی $f(x) = -mx - h$ و $g(x) = ax + h$ از نقطه $(-2, 3)$ می‌گذرند. اگر $f(-\frac{5}{4}) = g(-5)$ باشد، مقدار $\frac{m}{a}$ کدام است؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۳۰۲۰۰۹۵**

- (۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴) 5 (اردیبهشت ۱۴۰۳)

۳۳۱. اگر تابع $g(x) = (2k-5)x^2 + 3x - k^2$ خطی باشد حاصل $g(1)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{9}{4}$ (۲) $-\frac{11}{4}$ (۳) $-\frac{13}{4}$ (۴) $-\frac{17}{4}$

۳۳۲. اگر تابع $f(x) = \frac{x^2 + mx + 5}{x+1}$ در دامنه خود خطی باشد، مقدار $\frac{f(2)}{m}$ کدام است؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۲۰۲۰۰۹۶**

- (۱) $\frac{7}{5}$ (۲) $\frac{5}{7}$ (۳) $\frac{6}{7}$ (۴) $\frac{7}{6}$

۳۳۳. اگر دامنه و برد تابع خطی f برابر با $1 < x < 6$ و $-2 < y < 0$ باشند، حاصل ضرب جواب‌های ممکن برای $f(4)$ کدام است؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۲۰۲۰۰۹۷**

- (۱) $\frac{24}{25}$ (۲) $\frac{12}{25}$ (۳) $\frac{8}{25}$ (۴) $\frac{11}{25}$

تابع درجه دوم (سهمی)

رأس سهمی، محور تقارن، ماکزیمم یا مینیمم داشتن سهمی

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۳۴۶. مختصات رأس سهمی به معادله $y = 2x^2 - 4x + 1$ کدام است؟

- (۱) $(1, -1)$ (۲) $(2, 1)$ (۳) $(-1, 7)$ (۴) $(-1, 2)$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۳۴۷. مختصات رأس سهمی به معادله $y = -\frac{1}{4}(x+2)^2 + 5$ کدام است؟

- (۱) $(2, 5)$ (۲) $(-2, 5)$ (۳) $(-1, \frac{5}{4})$ (۴) $(-1, -\frac{5}{4})$

۳۴۸. معادله محور تقارن منحنی $y = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 1$ کدام است؟

- (۱) $x = -6$ (۲) $x = -3$ (۳) $x = 3$ (۴) $x = 6$

۳۴۹. سهمی $y = 2(x-1)^2 + 3$ از کدام نواحی می‌گذرد؟

- (۱) اول و دوم (۲) دوم، سوم و چهارم (۳) سوم و چهارم (۴) اول، دوم و سوم

۳۵۰. اگر رأس سهمی $y - 2 = -3(x+a)^2 + b$ نقطه $(2, 5)$ باشد، حاصل $a \times b$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) -۶ (۳) ۴ (۴) -۴

۳۵۱. خط $x = -1$ محور تقارن سهمی $y = ax^2 + 3x + c$ است. اگر رأس سهمی روی خط $y = 1$ قرار داشته باشد، مقدار ac کدام است؟

- (۱) $5/75$ (۲) $3/75$ (۳) $-3/25$ (۴) $-5/25$ (خارج ۱۴۰۱)

۳۵۲. به ازای چند مقدار m ، تابع $y = (1-18m)x^2 + 8(m^2+1)x + 11$ در نقطه‌ای به طول $\frac{1}{4}$ دارای ماکزیمم است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) هیچ مقدار m (۴) تمام مقادیر m (خارج ۱۴۰۱)

۳۵۳. شیب خط $y = ax + b$ برابر شیب خط $y = cx + d$ است. اگر دو خط در $x = -2$ روی محور x ها یکدیگر را قطع کنند، محور تقارن

۳۵۴. رأس سهمی به معادله $y = -x^2 + ax + 5$ بر روی خط به معادله $x = 2$ قرار دارد. این سهمی از کدام نقطه می‌گذرد؟

- (۱) $(-1, 4)$ (۲) $(-1, 5)$ (۳) $(1, 8)$ (۴) $(1, 10)$

(سراسری ۹۷)

۳۵۵. به ازای کدام مقدار a ، بیشترین مقدار تابع $f(x) = ax^2 + 20x - 120$ برابر ۱۸۰ است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۳۵۶. به ازای چه محدوده‌ای از m تابع $y = (m-1)x^2 - mx + \frac{1}{4}m$ دارای مینیمم است و نمودار آن محور x ها را قطع نمی‌کند؟

- (۱) $m < 0$ (۲) $m > 1$ (۳) $\mathbb{R}$ (۴) $\emptyset$

۳۵۷. اگر کمترین مقدار تابع $f(x) = \frac{x^2}{4} - 2ax + 1$ برابر -۲ باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) $\pm\sqrt{\frac{4}{6}}$ (۲) $\pm\sqrt{\frac{6}{4}}$ (۳) $\pm\frac{\sqrt{6}}{4}$ (۴) $\pm\sqrt{6}$

۳۵۸. مجموع ریشه‌های معادله $x^2 - ax - 1 = 0$ با حاصل ضرب ریشه‌های معادله $ax^2 - 4x + a + 2 = 0$ برابر است. طول رأس سهمی $y = x^2 + (1-2a)x - 3$

(سراسری ۱۴۰۲)

۳۵۹. کدام است؟

- (۱) $-1/5$ (۲) -۳ (۳) $1/5$ (۴) ۳

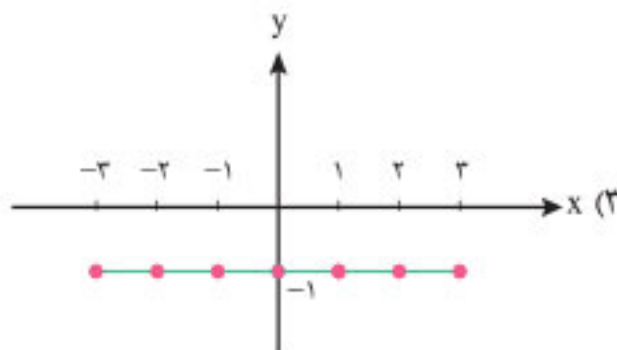
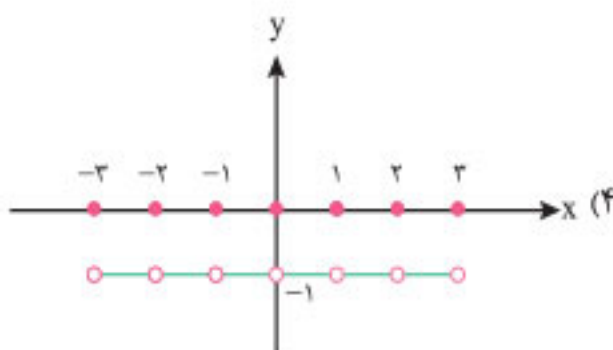
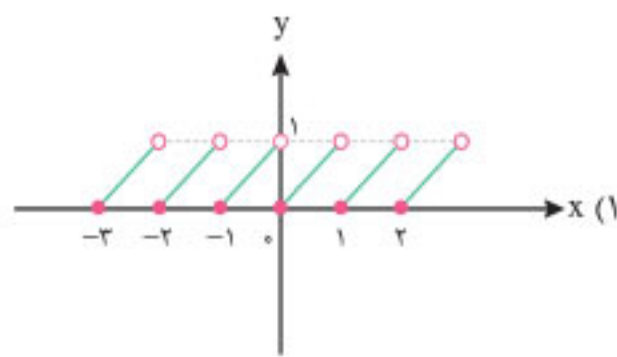
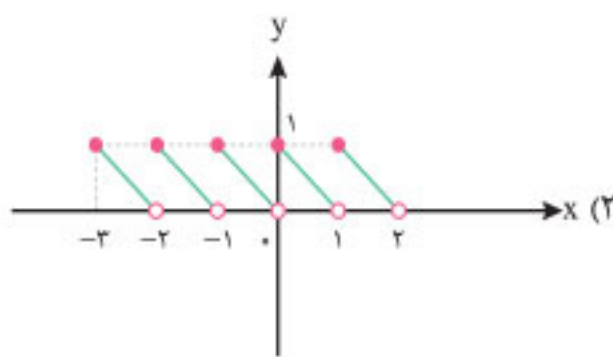
۳۵۹. مجموع ریشه‌های معادله $ax^2 + (a + \frac{4}{3})x + 2 = 0$ با حاصل ضرب ریشه‌های معادله $3x^2 - 4x - a = 0$ برابر است. محور تقارن سهمی

(خارج ۱۴۰۲)

۳۶۰. کدام است؟

- (۱) $x = \frac{3}{4}$ (۲) $x = -\frac{3}{4}$ (۳) $x = \frac{11}{8}$ (۴) $x = -\frac{11}{8}$

۶۲۹. اگر $f(x) = [x + [x]]$ و $(f - g)(x) = [x - [-x]]$ باشد، بخشی از نمودار تابع $g(x)$ کدام است؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۲۰۲۰۲۱۷**



تابع - آزمون ششم

آزمون ۳ - Level Up



۶۳۰. اگر $[\frac{x}{2} - 3] = \text{sign}(|x| + 2)$ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای $[-3x + 30]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.) **کد پاسخ تصویری: ۰۲۰۲۰۲۱۸**

(۴) ۵۰

(۳) ۴۱

(۲) ۳۰

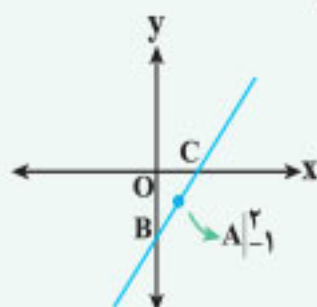
(۱) ۲۱

تست

۶۳۱. اگر $f(x) = \sqrt{x-2}$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}}$ باشند، دامنه تابع $f \times g$ کدام است؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۲۰۲۰۲۱۹**

(۴) $\{x < 3\}$ (۳) $\{x \geq 0\}$ (۲) $\{x \geq 2\}$ (۱) $\{2 \leq x < 3\}$

۶۳۲. با توجه به شکل مقابل، مساحت مثلث OBC بر حسب شیب خط (m) کدام است؟

(۲) $S = (m+1)^2$ (۱) $S = \frac{(m+1)^2}{m}$ (۴) $S = (2m+1)^2$ (۳) $S = \frac{(2m+1)^2}{2m}$ 

۶۳۳. سهمی $y = x^2 + x - 2k$ با نیمساز ربع اول و سوم دو نقطه برخورد دارد و با نیمساز ربع دوم و چهارم نقطه برخوردی ندارد. حدود k کدام است؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۲۰۲۰۲۲۰**

(۲) $k < -\frac{1}{2}$ (۱) $k > 0$

(۴) هیچ مقداری برای k وجود ندارد.

(۳) $-\frac{1}{2} < k < 0$

۶۳۴. اگر دامنه و برد تابع $f = \{(3, b), (a, 2), (4, c)\}$ با هم برابر باشند و ضمناً رابطه $f(4) = f(a)$ برقرار باشد، مقدار $(a+b+c)$ کدام است؟

(۴) ۷

(۳) ۸

(۲) ۱۰

(۱) ۱۱

۶۳۵. اگر سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ از نقاط $A(m-2, \sqrt{2n})$ ، $B(m, -2)$ و $C(m+2, \sqrt{2n})$ بگذرد و ضمناً خط $y = k$ سهمی را در دو نقطه قطع کند، مجموعه تمام مقادیر ممکن برای k کدام است؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۲۰۲۰۲۲۱**

(۴) $k < -3$ (۳) $k < 0$ (۲) $k > -3$ (۱) $k > 0$

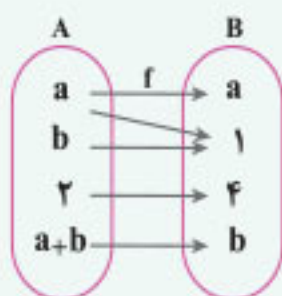
۶۳۶. اگر نمودار پیکانی مقابل تابع باشد، b چند مقدار را نمی پذیرد؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

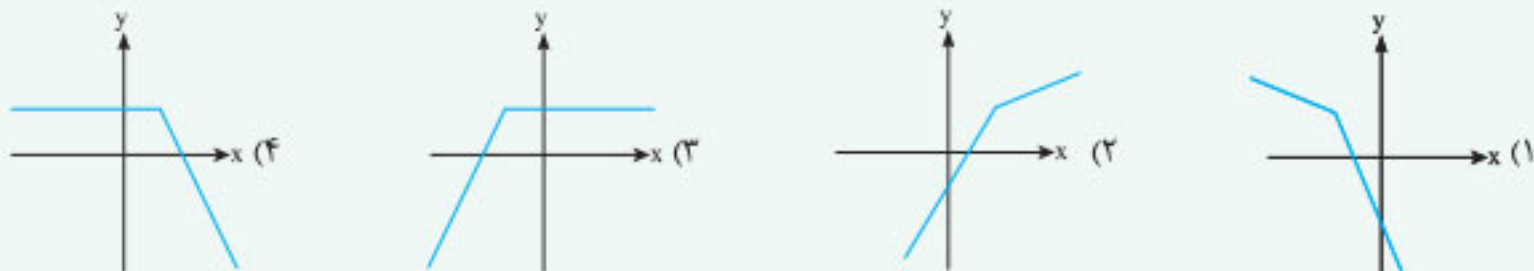




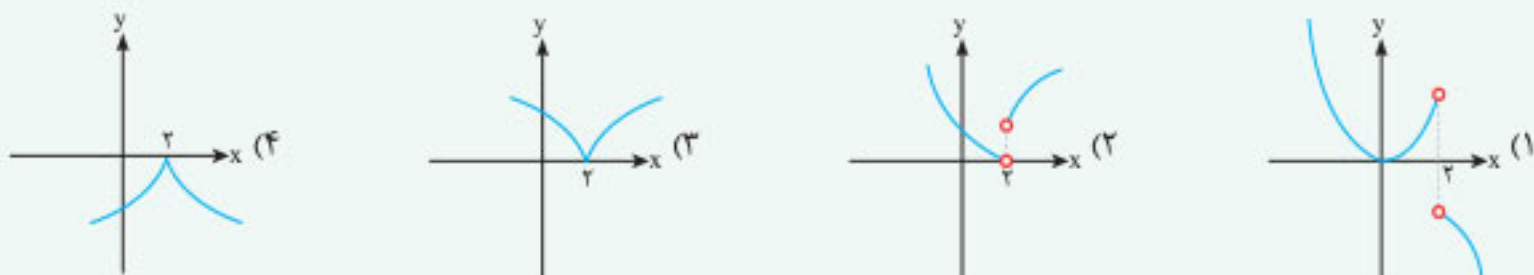
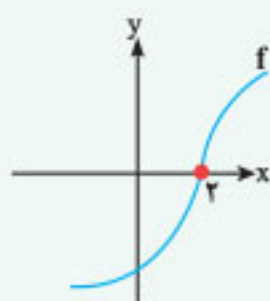
۶۳۷. اگر $f = \left\{(-3, 8), \left(\frac{1}{2}, 1\right)\right\}$ و $g(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & x \in \mathbb{Z} \\ \lfloor \frac{x+1}{2} \rfloor & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ باشند، آن گاه تابع $\left(\frac{f-g}{f+g}\right)^2$ کدام است؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۷۰۲۰۲۷۷**

- (۱) $\left\{(-\frac{1}{2}, 25), \left(\frac{1}{2}, 625\right)\right\}$ (۲) $\{(0, 4), (4, 100)\}$ (۳) $\left\{(-3, 81), \left(\frac{1}{2}, 4\right)\right\}$ (۴) $\left\{(-3, \frac{81}{625}), \left(\frac{1}{2}, 1\right)\right\}$

۶۳۸. نمودار تابع $f(x) = 2x - \sqrt{x^2 - 6x + 9}$ شبیه کدام است؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۷۰۲۰۲۷۳**



۶۳۹. با توجه به نمودار f در شکل مقابل، نمودار تابع $g(x) = -x^2 \times \frac{|f(x)|}{f(x)}$ کدام است؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۷۰۲۰۲۷۴**

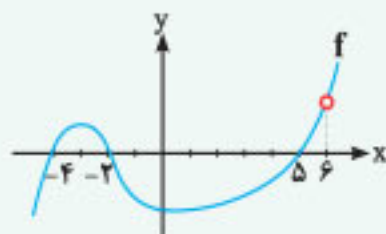


تابع - آزمون هفتم

آزمون ۴ - Level Up



۶۴۰. اگر نمودار f به صورت مقابل باشد، دامنه تابع $g(x) = \frac{3x-1}{f(x)}$ کدام است؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۷۰۲۰۲۷۵**



- (۱) $\mathbb{R} - \{-4, 6\}$ (۲) $\mathbb{R} - \{-2, 5\}$ (۳) $\mathbb{R} - \{-4, -2, 5, 6\}$ (۴) $\mathbb{R} - \{6\}$

۶۴۱. نمودار تابع $f(x) = \left|\frac{1}{2}x\right| - 2$ را ۴ واحد به طرف x های منفی و ۱ واحد به طرف y های مثبت انتقال می دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه با کدام

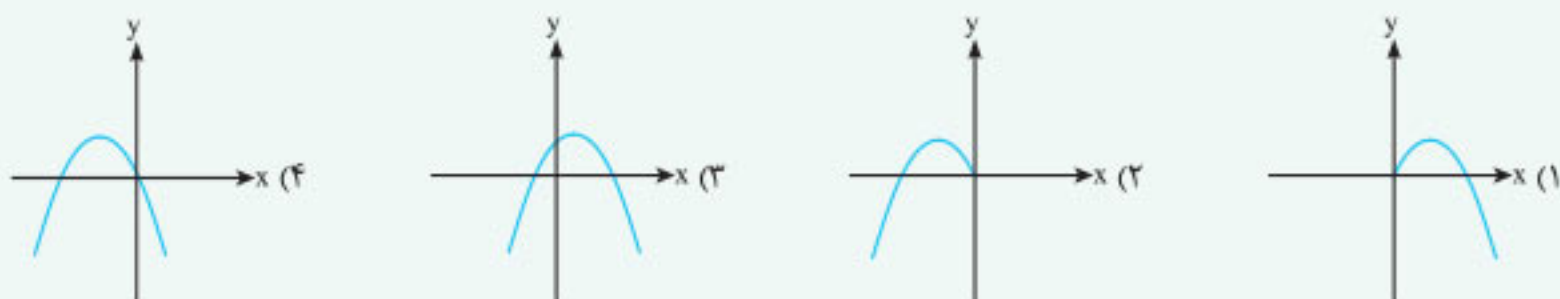
طول متقاطع اند؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۷۰۲۰۲۷۶**

- (۱) $-3/5$ (۲) -3 (۳) $-2/5$ (۴) -2

۶۴۲. اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+ax+b}{x+1} & x \neq -1 \\ \frac{c}{x+3} & x = -1 \end{cases}$ یک تابع همانی باشد، حاصل $ab+c$ کدام است؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۷۰۲۰۲۷۷**

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) ۳

۶۴۳. اگر $f(x) = \sqrt{x} + x$ و $g(x) = \sqrt{x} - x$ باشد، آن گاه نمودار تابع $y = (f \cdot g)(x)$ کدام است؟



۶۴۴. کدام یک از روابط زیر، معرف یک تابع است؟ (x متغیر مستقل است.)

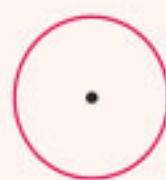
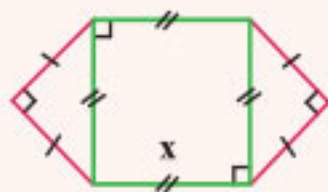
- (۱) $x^2 + y^4 = 1$ (۲) $y^2 + \sqrt{x+x^2} = 0$ (۳) $3|x| = 3|y|$ (۴) $(-1)^x = (-1)^y$



کنکور اردیبهشت ۱۴۰۴

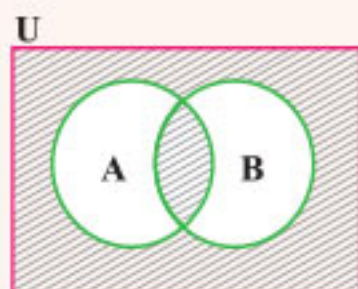
۱۲

۲۴۱۴. اگر شعاع دایره شکل زیر برابر $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x$ و مجموع مساحت‌های دو شکل برابر ۱۶ باشد، محیط دایره کدام است؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۴۰۱۰۷۷۷**



- (۱) $\sqrt{\pi}$
(۲) $2\sqrt{\pi}$
(۳) $3\sqrt{\pi}$
(۴) $4\sqrt{\pi}$

۲۴۱۵. با توجه به نمودار ون مقابل، مجموعه سایه زده شده کدام است؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۴۰۵۰۷۷۸**



- (۱) $(A \cup B)'$
(۲) $(A' \cap B')'$
(۳) $(A \cup B') \cap (A' \cup B)$
(۴) $(A' \cup B') \cup (A \cap B)$

۲۴۱۶. مجموع معکوس دو مضرب متوالی عدد ۵ برابر $\frac{1}{6}$ است. اگر a مجموع آن دو عدد باشد، مجموع ارقام a کدام است؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۴۰۱۰۷۷۹**

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۲۴۱۷. اگر تابع f به هر عدد حقیقی، دو برابر مکعب همان عدد، منهای ۳ را نسبت دهد، حاصل $f(\sqrt[3]{4}) - f(\frac{1}{\sqrt[3]{4}})$ کدام است؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۴۰۲۰۷۸۰**

- (۱) $-7/5$ (۲) $-2/5$ (۳) $2/5$ (۴) $7/5$

۲۴۱۸. اگر رابطه $f = \{(-1, 1-2a^2), (a^2-2b, 2a+b+1), (a+6b, 4b^2-a)\}$ تابع همانی باشد، مقدار b-a کدام است؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۴۰۲۰۷۸۱**

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

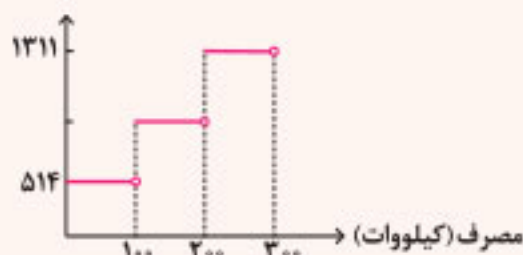
۲۴۱۹. تابع $f: A \rightarrow B$ که در آن B مجموعه‌ای تک‌عضوی است را در نظر بگیرید. اگر $a \in A \cap B$ و $f(\frac{1}{a}) = \frac{f(1)}{f(a)} - a$ باشد، کدام مورد قطعاً درست است؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۴۰۲۰۷۸۲**

- (۱) $2 \in A$ (۲) $2 \notin A$ (۳) $3 \notin A$ (۴) $2 \notin A$

۲۴۲۰. می‌خواهیم از یک رشته سیم به طول ۱۰۰، یک مستطیل به اضلاع $\frac{a}{4}$ و $2x$ بسازیم به طوری که مساحت آن ماکسیمم شود. مقدار x کدام است؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۴۰۱۰۷۸۳**

- (۱) ۵۰ (۲) ۲۵ (۳) $12/5$ (۴) $6/25$

۲۴۲۱. نمودار پلکانی هزینه برق مصرفی در یک دوره در زیر رسم شده است. اگر هزینه مصرفی مازاد بر ۱۰۰ تا ۲۰۰ (کیلووات ساعت) ۶۱۵۰ تومان باشد، هزینه



کل برق مصرفی در این دوره چند هزار ریال است؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۴۰۲۰۷۸۴**

- (۱) ۲۴۰
(۲) ۲۴۴
(۳) ۲۵۰
(۴) ۲۵۴

۲۴۲۲. در یک نمودار حبابی، سه تایی مرتب (a, b, c) مربوط به حبابی به شعاع $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ است. کدام مورد در خصوص مختصات این حباب می‌تواند درست باشد؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۴۰۳۰۷۸۵**

- (۱) (۴, ۴, ۴)
(۲) (۲, ۲, ۲)
(۳) $(4\sqrt{\pi}, 4\sqrt{\pi}, 4\sqrt{\pi})$
(۴) $(\frac{2}{\sqrt{\pi}}, \frac{2}{\sqrt{\pi}}, \frac{2}{\sqrt{\pi}})$

۲۴۲۳. دانش‌آموزی معادله $x - 2 = 2$ را با استدلال زیر حل کرده است. ایراد این استدلال در کدام گام است؟ **کد پاسخ تصویری: ۰۴۰۴۰۷۸۶**

- (۱) یکم
(۲) سوم
(۳) پنجم
(۴) ششم
- اول $(x-2)(x-5) = 2(x-5)$
دوم $x^2 - 7x + 10 = 2x - 10$
سوم $(x^2 - 7x + 10) - (x-6) = (2x-10) - (x-6)$
چهارم $x^2 - 8x + 16 = x - 4$
پنجم $\frac{(x-4)^2}{x-4} = \frac{x-4}{x-4}$
ششم $x - 4 = 1$
هفتم $x = 5$

۲۴۲۴. اگر گزاره $r \Rightarrow (q \vee \sim p)$ نادرست باشد، آنگاه کدام گزاره زیر با آن هم‌ارزش است؟ «کد پاسخ تصویری: ۰۴۰۴۰۷۸۷»

- (۱) $r \Rightarrow p$ (۲) $p \Rightarrow r$ (۳) $q \Rightarrow p$ (۴) $p \Rightarrow q$

۲۴۲۵. دو مجموعه ۲۰ عضوی $A = \{3x_1 - 5, 3x_2 - 5, \dots, 3x_{20} - 5\}$ و $B = \{\frac{x_1+4}{5}, \frac{x_2+4}{5}, \dots, \frac{x_{20}+4}{5}\}$ را در نظر بگیرید. اگر میانگین

اعضای مجموعه A برابر ۱۳ باشد، میانگین اعضای مجموعه B کدام است؟ «کد پاسخ تصویری: ۰۴۰۳۰۷۸۸»

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۶

۲۴۲۶. انحراف معیار ۳۰ داده آماری که ۱۰ درصد آن‌ها با میانگین برابر است، ۳ می‌باشد. اگر داده‌های برابر میانگین را از کل داده‌ها کنار

بگذاریم، واریانس داده‌های باقی‌مانده کدام است؟ «کد پاسخ تصویری: ۰۴۰۳۰۷۸۹»

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۲۴۲۷. داده‌های ۸، ۹، ۶، ۳، ۸، ۱، ۴، ۷، ۵، در آمد ماهانه کارمندان یک اداره برحسب میلیون تومان است. اگر مقدار خط فقر از دو روش میانگین

و میانه برابر باشد، چند کارمند زیر خط فقر قرار دارند؟ «کد پاسخ تصویری: ۰۴۰۳۰۷۹۰»

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۲۴۲۸. با حروف کلمه «آموزشی» چند کلمه ۶ حرفی بدون تکرار حروف می‌توان نوشت به طوری که هیچ حرف نقطه‌داری قبل از «آ» ظاهر نشود؟ (بدون توجه به معنی)

- (۱) ۱۵۶ (۲) ۱۸۰ (۳) ۲۱۶ (۴) ۲۴۰ «کد پاسخ تصویری: ۰۴۰۵۰۷۹۱»

۲۴۲۹. هر یک از اعداد دو رقمی را که می‌توان با ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ نوشت، روی کارت‌هایی می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها،

یک کارت را به طور تصادفی خارج می‌کنیم. با کدام احتمال عدد روی کارت مضرب ۴ یا ۶ است؟ «کد پاسخ تصویری: ۰۴۰۵۰۷۹۲»

- (۱) $\frac{7}{16}$ (۲) $\frac{5}{16}$ (۳) $\frac{3}{8}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۲۴۳۰. دنباله‌های $a_n = n^2 - 2$ و a_{n+1} فرد $a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$ و زوج $a_{n+1} = 3b_n + 1$ را در نظر بگیرید. اگر $b_1 = -3a_1$ باشد، حاصل $a_7 \times b_7 + a_1 \times b_7$ کدام است؟ «کد پاسخ تصویری: ۰۴۰۶۰۷۹۳»

- (۱) ۲۵ (۲) ۳۰ (۳) ۴۰ (۴) ۴۵

آزمون‌ها ۲۴۳۱. اگر مجموع جملات یازدهم و نوزدهم یک دنباله خطی برابر ۱۴۴ باشد، جمله پانزدهم این دنباله کدام است؟ «کد پاسخ تصویری: ۰۴۰۶۰۷۹۴»

- (۱) ۴۸ (۲) ۵۲ (۳) ۷۲ (۴) ۸۴

۲۴۳۲. دنباله a_n با رابطه بازگشتی $a_{n+1} = ra_n$ را در نظر بگیرید. اگر جملات دوم و سوم این دنباله به ترتیب $9\sqrt{3}$ و ۹ باشند، جمله

هشتم این دنباله کدام است؟ «کد پاسخ تصویری: ۰۴۰۷۰۷۹۵»

- (۱) -۱ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{9}$ (۴) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

۲۴۳۳. در تساوی $\frac{x^5 \times \sqrt[4]{5^2} \times \sqrt[3]{15^9}}{\sqrt[4]{5^6} \times (\frac{3}{5})^{-2}} = 21^5$ مقدار x کدام است؟ «کد پاسخ تصویری: ۰۴۰۷۰۷۹۶»

- (۱) ۷ (۲) ۱۵ (۳) ۵ (۴) ۲۱

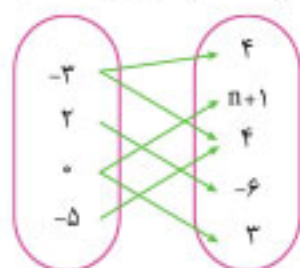


۲۵۲. ۳

اگر رابطه بین مجموعه A و مجموعه B را با نمودار پیکانی نمایش بدیم، در صورتی این رابطه تابع هست که از هر عضو مجموعه A دقیقاً یک پیکان خارج بشه. **بررسی گزینه‌ها:** ۱) تابع نیست، زیرا از عدد ۲، دو پیکان خارج شده است. ۲) تابع نیست، زیرا از عدد ۱، سه پیکان خارج شده و از دو عضو دیگه یعنی ۲ و ۳ عضوی خارج نشده است. ۳) تابع است. ۴) تابع نیست، زیرا از عضو ۳، پیکانی خارج نشده است.

۲۵۳. ۱

باید از هر عضو مجموعه اول فقط یک پیکان خارج بشه، پس اگر از عضوی دو پیکان خارج شده باشه، باید عضوهای مربوط به اون‌ها در مجموعه دوم با هم برابر باشن: $(m-1, 4) = (m-1, -2m) \Rightarrow 4 = -2m \Rightarrow m = -2$



پس نمودار به صورت مقابل درمیا:

دو تا -۳ در مجموعه اول داریم ولی هر دو به سمت ۴ رفته‌اند و در واقع عضو $(-3, 4)$ تکراریه و مشکلی ایجاد نمی‌کنه.

اما باز از صفر دو پیکان خارج شده است. دو زوج مرتب

$(0, 3)$ و $(0, n+1)$ عضوهای اول تکراری دارن، پس عضوهای دوم اون‌ها نیز باید با هم برابر باشن. $n+1 = 3 \Rightarrow n = 2 \Rightarrow n+m = (2) + (-2) = 0$

۲۵۴. ۲

اگر نمودار پیکانی رو به صورت زوج مرتب نمایش بدیم، مجموعه عضوهای اول، دامنه و مجموعه عضوهای دوم، برد تابع است؛ پس:

$$f = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\} \Rightarrow \begin{cases} D_f = \{1, 2, 3\} \\ R_f = \{4\} \end{cases}$$

۲۵۵. ۱

مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها در صورتی تابع هست که هیچ دو زوج مرتب مختلفی با عضوهای اول برابر در اون مجموعه وجود نداشته باشه. (اگر عضو اول دو زوج برابر بودن، عضو دوم اون‌ها هم باید برابر باشن.)

بررسی گزینه‌ها: ۱) دو زوج مرتب $(1, 2)$ و $(1, 4)$ ، عضوهای اول برابر دارن، ولی عضوهای دومشون با هم برابر نیست، بنابراین تابع نیست. ۲) عضوهای اول برابر نیستن، بنابراین تابع است. ۳) دو زوج مرتب $(1, 2)$ و $(1, 2)$ عیناً مثل هم هستن، پس مشکلی ایجاد نمیشه و تابع داریم. ۴) فقط یک زوج مرتب داریم، بنابراین تابع است.

۲۵۶. ۴

می‌دونیم در نمایش تابع به صورت زوج مرتب، مجموعه عضوهای اول، دامنه تابع و مجموعه عضوهای دوم، برد تابع هستن، بنابراین:

$$D_f = \{1, 2, 3, 5\} \quad R_f = \{2, 4, 5, 7\}$$

۲۵۷. ۳

اگر زوج‌های مرتبی دارای عضوهای اول برابر باشن، برای اینکه مجموعه داده‌شده تابع باشه، باید عضوهای دومشون هم با هم برابر باشن.

$$(1, 2a-5) = (1, 1-a) \Rightarrow 2a-5 = 1-a$$

$$\Rightarrow 2a+a = 1+5 \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = \frac{6}{3} = 2$$

حالا $a = 2$ رو در مجموعه f قرار میدیم: $f = \{(1, -1), (1, -1), (1, b)\}$ برای اینکه مجموعه داده‌شده تابع باشه، زوج مرتب $(1, b)$ نیز باید به صورت $(1, -1)$ باشه.

$$\Rightarrow (1, b) = (1, -1) \Rightarrow b = -1 \Rightarrow a+b = 2+(-1) = 1$$

۲۴۸. ۱

$$5x^2 + 5x + 5c = 0 \xrightarrow{\div 5} x^2 + x + c = 0 \xrightarrow[\text{فرض}]{\text{طبق}} \Delta \geq 0$$

$$\Rightarrow 1^2 - 4(1)(c) \geq 0 \Rightarrow 1 - 4c \geq 0 \Rightarrow 4c \leq 1 \Rightarrow c \leq \frac{1}{4}$$

حالا بررسی می‌کنیم به ازای $c \leq \frac{1}{4}$ دلتای کدوم معادله نامنفی میشه:

$$x^2 + 3x + c + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 3^2 - 4(1)(c+1) = 9 - 4c - 4 = 5 - 4c$$

شما هر عدد دلخواهی از محدوده $c \leq \frac{1}{4}$ رو به c بدین حاصل $(5-4c)$ مثبت میشه پس همین گزینه، جواب این سؤاله.

۲۴۹. ۲

$$\Delta = 6^2 - 4(1)(-1) = 40$$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-6}{1} = -6$$

$$\left| \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right| = \frac{|\alpha - \beta|}{|\alpha + \beta|} = \frac{\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}}{|S|} = \frac{\frac{\sqrt{40}}{1}}{|-6|} = \frac{\sqrt{40}}{6}$$

$$\alpha^2 \beta^2 = (\alpha\beta)^2 = P^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \left(\frac{-1}{1}\right)^2 = -1$$

$$\Rightarrow A = \left(\frac{\sqrt{40}}{6}\right)^2 + 6(-1) = \frac{40}{36} - 6 = \frac{10}{9} - 6 = \frac{10-54}{9} = \frac{-44}{9}$$

فصل دوم: تابع

۲۵۰. ۳

به مطلب زیر توجه کنین.

راهنما: برای حل یک دستگاه ۲ معادله ۲ مجهول کافیست ضرایب یک مجهول (a یا b) در دو معادله، با هم قرینه باشن که این کار رو میشه با ضرب هر یک از معادلات در عددی مناسب انجام داد. سپس دو طرف دو معادله رو با هم جمع کرده تا یکی از مجهول‌ها حذف بشه و معادله، تبدیل به یک معادله درجه اول یک مجهولی بشه.

دو زوج مرتب با هم مساوی هستن، پس عضوهای اولشون با هم و عضوهای دومشون هم، با هم برابرین. در یک دستگاه a و b رو به دست میاریم.

$$(2, 2a+b) = (a-b, 13) \Rightarrow \begin{cases} a-b=2 \\ 2a+b=13 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{دو معادله رو جمع می‌کنیم}} \begin{cases} a-b=2 \\ 2a+b=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b=2 \\ 3a=15 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{15}{3} = 5$$

$$a-b=2 \xrightarrow{a=5} 5-b=2 \Rightarrow -b=2-5=-3 \Rightarrow b=3$$

$$\Rightarrow a+b = 5+3 = 8$$

۲۵۱. ۴

زوج مرتب‌ها رو دو به دو با هم مساوی قرار میدیم:

$$\text{حالت اول: } (n-2, 3m) = (m-1, 6) \Rightarrow \begin{cases} n-2=m-1 \\ 3m=6 \end{cases} \Rightarrow m=2$$

حالا به جای m در رابطه بالا عدد ۲ رو قرار میدیم:

$$n-2=m-1 \xrightarrow{m=2} n-2=2-1 \Rightarrow n=3$$

$$\text{حالت دوم: } (n-2, 3m) = (-4, 6) \Rightarrow \begin{cases} n-2=-4 \\ 3m=6 \end{cases} \Rightarrow n=-2 \quad \times$$

$$\text{حالت سوم: } (m-1, 6) = (-4, 6) \Rightarrow \begin{cases} m-1=-4 \\ 6=6 \end{cases} \Rightarrow m=-3 \quad \times$$

m و n اعداد طبیعی هستن پس فقط جواب‌های حالت اول، قابل قبول هستن. پس داریم: $m+n = 2+3 = 5$

۲۶۳. کد پاسخ تصویری ۰۲۰۲۰۲۵

$$a^2 = 3a^2 \Rightarrow a^2 - 3a^2 = 0 \Rightarrow a^2(a^2 - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 0 \Rightarrow a = 0 \\ a^2 = 3 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

$\xrightarrow{a=0} f = \{(1, 0), (1, 1), (0, 1), (-3, 2), (1, 0)\}$ تابع نیست

$\xrightarrow{a=\sqrt{3}} f = \{(1, 9), (\sqrt{3}+1, 1), (0, -2), (0, 2), (1, 9)\}$ تابع نیست

$\xrightarrow{a=-\sqrt{3}} f = \{(1, 9), (-\sqrt{3}+1, 1), (0, 4), (0, 2), (1, 9)\}$ تابع نیست

۲۶۴. کد پاسخ تصویری ۰۰۰۲۰۰۷۶

ابتدا دو مجموعه داده شده رو به صورت مجزا به دست میاریم:

$$A = \{(a, a^2) | a = 0, 1, 2\} = \{(0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$$

$$B = \{(a, a+b) | a, b \in \{0, 1, 2\}\}$$

$$= \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$$

از آنجا که $A \subseteq B$ است، پس $A \cup B = B$ بوده و f همان مجموعه B می باشد که دارای ۹ عضو است.

تذکر: رابطه به دست آمده تابع نیست در حالی که در صورت سؤال f به عنوان یک تابع معرفی شده و این ایراد علمی به سؤال وارد است.

۲۶۵. ۳

با توجه به تابع داده شده، $f(1) = 4$ و $f(2) = 5$ است، بنابراین:

$$2f(1) - f(2) = 2(4) - 5 = 8 - 5 = 3$$

۲۶۶. ۱

در سؤال از ما خواسته شده که از رابطه f اعضای رو انتخاب کنیم که عضوهای دوشون ۱ و ۲ باشن. بنابراین باید زوج مرتب های $(2, 1)$ و $(3, 2)$ رو برداریم که عضوهای اولشون ۲ و ۳ هستن.

۲۶۷. ۲

چون دامنه $\{1, 2, 5\}$ است، پس نتیجه می گیریم که:

$$b+2=5 \Rightarrow b=5-2=3$$

$$a-1=-1 \Rightarrow a=0 \quad \text{و چون برد } \{3, 7, -1\} \text{ است، پس:}$$

$$\Rightarrow 2a+b = 2(0)+3=3$$

۲۶۸. ۲

$$\text{مجموع اعضای برد} = a+1+a^2+1-2a=4 \Rightarrow a^2-a-2=0$$

$$\Rightarrow (a+1)(a-2)=0 \Rightarrow a=-1 \text{ یا } a=2$$

حالا باید بررسی کنیم که کدام جواب قابل قبوله:

$$f = \{(0, 3), (5, 4), (1, -3)\}$$

اگر $a=2$ باشه:

f تابع است؛ پس $a=2$ قابل قبوله و مجموع اعضای دامنه در این حالت برابر با ۶ است.

$$f = \{(-3, 0), (-1, 1), (-4, 3)\}$$

اگر $a=-1$ باشه:

f تابع هست پس $a=-1$ قابل قبوله.

$$-3+(-1)+(-4)=-8$$

مجموع اعضای دامنه در این حالت:

۲۶۹. ۴

اولاً f تابع هست پس اگر دو زوج مرتب، عضو اولشون مساوی باشن باید عضوهای دوشون هم مساوی باشن. الان دو زوج داریم که با ۲ شروع میشن، پس:

$$x-y=-3$$

ثانیاً گفته شده دامنه فقط یک عضو داره که می دونیم $\{2\}$ است، پس حاصل

$4x+y$ هم فقط باید ۲ باشه چون اگر ۲ نباشه دامنه دو عضوی میشه:

$$4x+y=2$$

۲۵۸. ۱

باید زوج مرتب های مختلف، با عضوهای اول برابر نداشته باشیم یا در صورتی که عضوهای اول دو زوج مرتب برابر باشن، باید عضوهای دوشون هم با هم برابر باشن تا رابطه تبدیل به یک تابع بشه، بنابراین: $(2, m^2) = (2, 1) \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$

حالا هر یک از مقادیر m رو در رابطه R قرار میدیم تا ببینیم شرط تابع بودن برقرار شده یا نه: $m=1 \Rightarrow R = \{(2, 1), (-4, 1), (1, 4), (1, 5)\}$

به خاطر وجود دو زوج مرتب $(1, 4)$ و $(1, 5)$ که دارای عضو اول برابر و عضو دوم نابرابر هستن، این رابطه به ازای $m=1$ تابع نیست.

تابع است $m=-1 \Rightarrow R = \{(2, 1), (-4, -1), (1, 2), (-1, 5)\}$

۲۵۹. ۳ کد پاسخ تصویری ۰۱۰۲۰۰۷۳

زوج مرتب های $(1, x-2y)$ و $(1, -7)$ دارای مؤلفه های اول یکسان هستن، پس برای تابع بودن این رابطه، باید مؤلفه های دوم هم برابر باشن: $x-2y=-7$

به همین ترتیب برای $(9, x+y)$ و $(9, 5)$ داریم: $x+y=5$

از حل دو معادله دو مجهول فوق داریم:

$$\begin{cases} x-2y=-7 \\ x+y=5 \end{cases} \xrightarrow{-} -3y=-12 \Rightarrow y=4 \Rightarrow x=1$$

حالا خواسته سؤال رو پیدا می کنیم:

$$\frac{x^2+y^2}{-x-4y} = \frac{16+1}{-1-16} = \frac{17}{-17} = -1$$

۲۶۰. ۲ کد پاسخ تصویری ۰۱۰۲۰۰۷۴

شرط اینکه رابطه f تابع باشه این است که زوج مرتب هایی که دارای مؤلفه های اول برابر هستن، مؤلفه های دوشون نیز با یکدیگر برابر باشن. پس مؤلفه های دوم این زوج مرتب ها رو مساوی یکدیگر قرار میدیم:

$$(b, m^2) = (b, x-y) \Rightarrow x-y=m^2$$

$$(a, x+y) = (a, m^2-1) = (a, 4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ m^2-1=4 \end{cases} \Rightarrow m^2=5 \quad (1) \Rightarrow x-y=5 \quad (2)$$

رابطه های (۱) و (۲) رو در دستگاه حل می کنیم تا x و y را به دست بیاریم:

$$\begin{aligned} (+) \begin{cases} x-y=5 \\ x+y=4 \end{cases} \\ \hline 2x=9 \Rightarrow x=\frac{9}{2}=4.5 \end{aligned}$$

$$x+y=4 \xrightarrow{x=4.5} 4.5+y=4 \Rightarrow y=4-4.5=-0.5$$

$$\Rightarrow x^2+y^2 = (4.5)^2 + (-0.5)^2 = 20.25 + 0.25 = 20.5$$

۲۶۱. ۳

برای تابع بودن باید زوج مرتب های مختلف، با عضوهای اول برابر نداشته باشیم که در رابطه داده شده، هیچ کدام از زوج مرتب ها عضوهای اول برابر ندارن، پس این رابطه به ازای هر مقدار m همیشه تابع خواهد بود.

۲۶۲. ۳

در زوج های $(3, a+2b)$ و $(3, 7)$ فقط عضوهای اول مساوی هستن، پس خودمون عضوهای دوشون رو با هم مساوی قرار میدیم. در مورد زوج های $(5, 4)$ و $(5, 2a-b)$ هم همین کار رو انجام میدیم:

$$\begin{cases} (3, a+2b) \\ (3, 7) \end{cases} \Rightarrow a+2b=7 \quad \begin{cases} (5, 2a-b) \\ (5, 4) \end{cases} \Rightarrow 2a-b=4$$

اکنون دو معادله به دست اومده رو در یک دستگاه حل می کنیم:

$$\xrightarrow{\times 2} \begin{cases} 2a-b=4 \\ a+2b=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a-2b=8 \\ a+2b=7 \end{cases} \Rightarrow 5a=15 \Rightarrow a=3, b=2$$

$$\Rightarrow a^2-b^2 = 3^2-2^2 = 9-4=5$$



۲۷۴. ۴

فقط در نمودار ۴، هر خط موازی با محور y ، نمودار رو حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند و تابع داریم.

۲۷۵. ۲

با توجه به شکل، هیچ دو نقطه‌ای نباید زیر هم باشند (روی خطی موازی محور y ها). اگر نقاط B, F و G حذف بشن یک تابع ایجاد خواهد شد.

۲۷۶. ۳

هر خط عمودی که رسم می‌کنیم باید نمودار تابع رو حداکثر در یک نقطه قطع کند، پس فقط می‌تونیم پاره خط $y = 3$ با دامنه $-1 \leq x \leq 2$ رو به شکل اضافه کنیم.

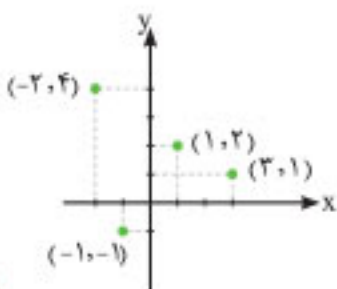
۲۷۷. ۲: کد پاسخ تصویری ۰۲۰۲۰۰۷۷

با توجه به نمودار تابع، مقدار تابع در هر نقطه به طول x برابر با عرض همون نقطه خواهد بود:

$$\left. \begin{array}{l} f(-3) = 0 \\ f(1) = -1 \\ f(3) = 4 \\ f(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(-3) - f(1) + f(3) + f(0) = 0 - (-1) + 4 + 0 = 5$$

۲۷۸. ۲

با توجه به نمودار، چهار نقطه با طول‌های $-2, -1, 1, 3$ ، -1 و 3 و عرض‌های $2, 1, 0, 4$ داریم؛ بنابراین دامنه که همون مجموعه مقادیر طول‌هاست به صورت $D_f = \{-2, -1, 1, 3\}$ و برد که همون مجموعه مقادیر عرض‌هاست به صورت $R_f = \{-1, 1, 2, 4\}$ خواهد بود.



۲۷۹. ۱

برد تابع، زمانی تک‌عضوی هست که نمودار اون، خطی موازی با محور x ها (یا قسمتی از یک خط افقی) باشه و در اینجا فقط گزینه ۱، چنین شرطی رو داره.

۲۸۰. ۴

دامنه باید $\mathbb{R} - \{1, 3\}$ باشه یعنی x هر عددی می‌تونه باشه به جز ۱ و ۳ که نمودارهای ۲، ۳ و ۴ این ویژگی رو دارن ولی برد تابع باید $\mathbb{R}$ باشه یعنی y هر عدد حقیقی رو باید بتونه داشته باشه. برد همه گزینه‌ها رو بررسی می‌کنیم:

- بررسی گزینه‌ها:**
- ۱ برد $\{y < 3\}$
 - ۲ برد $\{y > -4\}$
 - ۳ برد $\{2\}$
 - ۴ برد $\mathbb{R}$

۲۸۱. ۲: کد پاسخ تصویری ۰۲۰۲۰۰۷۸

دامنه f برابر با $x \geq 2$ می‌باشد، از طرفی برد تابع h هم برابر با $y \geq 2$ است که با هم برابر هستند.

۲۸۲. ۲

با توجه به جدول، میشه حدس زد که مقادیر x به توان ۲ میرسن، سپس با یک جمع میشن، یعنی گزینه ۲. اگر هم نتونستین حدس بزنین کافیه اعداد جدول رو در ضابطه‌ها قرار بدین و ببینین کدومشون درسته.

$$y = x^2 + 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0^2 + 1 = 1 \Rightarrow (0, 1) \\ x = 1 \Rightarrow y = 1^2 + 1 = 2 \Rightarrow (1, 2) \\ x = 2 \Rightarrow y = 2^2 + 1 = 5 \Rightarrow (2, 5) \\ x = 3 \Rightarrow y = 3^2 + 1 = 10 \Rightarrow (3, 10) \\ x = 4 \Rightarrow y = 4^2 + 1 = 17 \Rightarrow (4, 17) \end{cases}$$

بنابراین حدسمون درست بود. مثلاً اگر $x = 4$ رو در بقیه ضابطه‌ها بذارین، y هیچ کدوم ۱۷ نمیشه.

اکنون دو معادله داریم با دو تا مجهول، پس باید دستگاه حل کنیم:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x - y = -3 \\ 4x + y = 2 \end{cases} \\ & \quad 5x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{5} \\ & \quad 4x + y = 2 \xrightarrow{x = -\frac{1}{5}} 4(-\frac{1}{5}) + y = 2 \Rightarrow y = 2 + \frac{4}{5} \\ & \Rightarrow y = \frac{14}{5} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{-\frac{1}{5}}{\frac{14}{5}} = -\frac{1}{14} \end{aligned}$$

۲۷۰. ۳

می‌دونیم که: $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$ و $-1^3 = -1$ پس در ردیف بالای جدول ۴ خارج میشه

(ها) دوتا (-1) و دوتا $(2\sqrt{2})$ مشاهده می‌کنیم لذا y ها شون رو با هم مساوی قرار میدیم:

$$\begin{aligned} & \text{می‌بریم به راست} \quad m - n = 2m \rightarrow 2m - m + n = 0 \\ & \Rightarrow m + n = 0 \end{aligned}$$

$$\text{برای } (2\sqrt{2}) \text{ ها: } n - 2m = 4$$

حالا دستگاه رو حل می‌کنیم، برای این کار معادله $m + n = 0$ رو در یک منفی ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -m - n = 0 \\ n - 2m = 4 \end{cases} \\ & \quad -3m = 4 \Rightarrow m = -\frac{4}{3} \\ & \quad m + n = 0 \Rightarrow -\frac{4}{3} + n = 0 \Rightarrow n = \frac{4}{3} \Rightarrow m - n = -\frac{4}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

۲۷۱. ۱

می‌دونیم در یک تابع، اگر عضوهای اول، مساوی باشن، عضوهای دوم هم باید مساوی باشن. به ازای $b = \frac{4}{y}$ های مربوط به عدد $x = -3$ با هم مساوی میشن و g تابع خواهد بود. به ازای $c = 5$ هم y های مربوط به $x = -1$ مساوی میشن ولی به ازای $a = 2$ ، y های مربوط به $x = 4$ مساوی نمیشن پس g تابع نخواهد بود.

۲۷۲. ۴

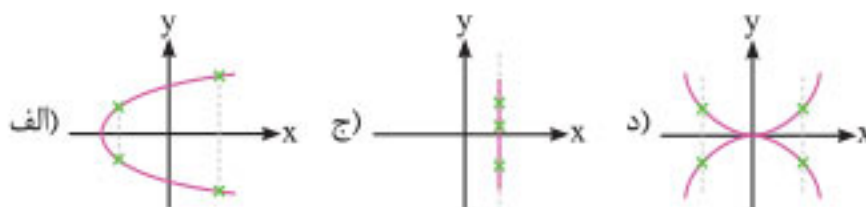
به کادر زیر که درباره گزینه ۴، است، توجه کنید.

دام آموزشی: نقاط توخالی جزء نمودار حساب نمیشن، ولی نقاط توپر جزئی از نمودار هستن.

می‌دونیم هر خط موازی با محور عرض‌ها نمودار تابع رو حداکثر توی یک نقطه قطع می‌کند. در نمودار گزینه ۴، دو نقطه توپر، زیرهم هستن یعنی اون خط عمودی، نمودار رو در دو نقطه قطع می‌کند، پس تابع نیست.

۲۷۳. ۲

خطی موازی محور y ها همیشه رسم کرد که نمودارهای «الف»، «ج» و «د» رو در بیش از یک نقطه قطع کند، پس هیچ کدومشون تابع نیستن.



بنابراین فقط یک نمودار (نمودار ب) تابع هست.

$$\begin{aligned} \text{۳} \quad & \begin{cases} \text{در سؤال: } f(1) = 3 \\ \text{در گزینه ۳: } f(1) = -2(1) = -2 \end{cases} \\ \text{۴} \quad & \begin{cases} \text{در سؤال: } f(2) = -4 \\ \text{در گزینه ۴: } f(2) = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

۲۸۹. ۴

ابتدا مقادیر $f(-2)$ و $f(\frac{1}{2})$ رو با استفاده از ضابطه تابع، محاسبه می‌کنیم:

$$f(-2) = \sqrt{2(-2) - 5} = \sqrt{-4 - 5} = \sqrt{-9} = \sqrt{9} = 3$$

$$f(\frac{1}{2}) = \sqrt{2(\frac{1}{2}) - 5} = \sqrt{1 - 5} = \sqrt{-4} = \sqrt{4} = 2$$

و در نهایت، مقادیر به‌دست آمده رو در عبارت $f(-2) + 2f(\frac{1}{2})$ قرار میدیم:

$$f(-2) + 2f(\frac{1}{2}) = 3 + 2(2) = 3 + 4 = 7$$

۲۹۰. ۲

$$f(2) = 2\sqrt{2+2} = 2\sqrt{4} = 2\sqrt{4} = 2(2) = 4$$

$$f(-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{4}\sqrt{2+|-\frac{1}{4}|} = -\frac{1}{4}\sqrt{2+\frac{1}{4}} = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{4}(\frac{3}{2}) = -\frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow f(2) + 4f(-\frac{1}{4}) = 4 + 4(-\frac{3}{8}) = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

۲۹۱. ۲

$$f(x) = x^2 + ax + 1$$

$$f(2) = 3 \Rightarrow \text{تابع از نقطه } (2, 3) \text{ عبور می‌کند}$$

$$\Rightarrow f(2) = 2^2 + 2a + 1 = 3 \Rightarrow 2a + 5 = 3$$

$$\Rightarrow 2a = 3 - 5 \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = \frac{-2}{2} \Rightarrow a = -1$$

حالا $a = -1$ رو در ضابطه تابع قرار میدیم و بعدش $f(1)$ رو به‌دست میاریم:

$$a = -1 \Rightarrow f(x) = x^2 - x + 1$$

$$f(1) = 1^2 - 1 + 1 = 1 - 1 + 1 = 1 \Rightarrow f(1) = 1$$

۲۹۲. ۱ ☐ کد پاسخ تصویری ۰۲۰۲۰۸۰با توجه به اینکه $f(1) = -3$ است، آگه به جای x عدد ۱ رو قرار بدیم، حاصل باید -3 بشه، همچنین با توجه به اینکه $f(3) = 7$ است، آگه به جای x عدد ۳ رو قرار بدیم، حاصل باید ۷ بشه، پس:

$$f(1) = -3 \xrightarrow{f(x)=ax^2+bx-2} a(1)^2 + b(1) - 2 = -3$$

$$\Rightarrow a + b - 2 = -3 \Rightarrow a + b = -1$$

$$f(3) = 7 \xrightarrow{f(x)=ax^2+bx-2} a(3)^2 + b(3) - 2 = 7$$

$$\Rightarrow 9a + 3b - 2 = 7 \Rightarrow 9a + 3b = 9$$

حالا دو معادله رو در یک دستگاه قرار میدیم تا مقدار b رو به‌دست بیاریم:

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ 9a + 3b = 9 \end{cases} \xrightarrow{\text{معادله اول} \times (-9)} \begin{cases} -9a - 9b = 9 \\ 9a + 3b = 9 \end{cases}$$

$$-6b = 18 \Rightarrow b = \frac{18}{-6} = -3$$

۲۹۳. ۱

$$f(x) = |2x - 5| \xrightarrow{x=2+\sqrt{2}} f(2+\sqrt{2}) = |2(2+\sqrt{2}) - 5|$$

$$= |4 + 2\sqrt{2} - 5| = |\underbrace{2\sqrt{2} - 1}_{\text{مثبت}}| = 2\sqrt{2} - 1$$

$$f(x) = |2x - 5| \xrightarrow{x=1+\sqrt{2}} f(1+\sqrt{2}) = |2(1+\sqrt{2}) - 5|$$

$$= |2 + 2\sqrt{2} - 5| = |\underbrace{2\sqrt{2} - 3}_{\text{منفی}}| = -(2\sqrt{2} - 3) = -2\sqrt{2} + 3$$

اکنون دو عبارت رو با هم جمع می‌کنیم:

$$f(2+\sqrt{2}) + f(1+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 1 - 2\sqrt{2} + 3 = 2$$

۲۸۳. ۲

گزینه‌های ۳ و ۴، خیلی سریع رد میشن چون که طبق متن سؤال، دامنه تابع $\mathbb{R}$ هست ولی در این گزینه‌ها دامنه $\mathbb{N}$ است. طبق متن سؤال، آگه ورودی تابع رو x بگیریم، خواهیم داشت:

$$x \xrightarrow{\text{خروجی}} 3(x + x^2)$$

پس ضابطه f به صورت $f(x) = 3(x + x^2)$ می‌باشد ولی ضابطه تابع به شکل کامل، همان ضابطه گزینه ۲، است.

۲۸۴. ۴

اولاً با توجه به $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ دامنه تابع $\mathbb{N}$ است. ثانیاً آگه ورودی تابع رو x فرض کنیم، با توجه به رابطه $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{3}$ فقط و فقط توصیف کلامی گزینه ۴، درست است.۲۸۵. ۳ ☐ کد پاسخ تصویری ۰۲۰۲۰۰۷۹آگه طول مستطیل رو با x و عرض رو با y نمایش بدیم، با توجه به متن سؤال داریم:

$$x = 3y + 4 \xrightarrow{y \text{ رو بر حسب } x} 3y = x - 4 \xrightarrow{\div 3} y = \frac{x-4}{3}$$

$$\text{مساحت مستطیل} = x \cdot y = x \cdot (\frac{x-4}{3}) = \frac{x^2 - 4x}{3}$$

البته همیشه باید به دامنه هم توجه کنیم، چون ضابطه خالی، به درد نمی‌خوره، الان x باید از ۴ بزرگ‌تر باشه وگرنه مقدار مساحت، عددی منفی میشه که این، غیرممکن هست. گزینه ۴، به همین علت رد میشه چون آگه مثلاً x رو ۱ فرضکنیم، مساحت برابر میشه با: $\frac{1^2 - 4(1)}{3} = \frac{-3}{3} = -1$

۲۸۶. ۲

با توجه به توصیف کلامی مطرح‌شده در متن سؤال، ضابطه تابع f رو می‌نویسیم:

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 - 5x \end{cases}$$

در شکل خروجی یا همون y برابر ۶ است، لذا به جای $f(x)$ عدد ۶ رو قرار میدیم:

$$x^2 - 5x = 6 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-5)}{1} = 5$$

۲۸۷. ۴

ابتدا با جای‌گذاری $x = \frac{1}{2}$ در $f(x)$ و $g(x)$ مقادیر $f(\frac{1}{2})$ و $g(\frac{1}{2})$ رو به‌دست میاریم، سپس جواب‌ها رو با هم جمع می‌کنیم:

$$f(x) = |3x - 5| \Rightarrow f(\frac{1}{2}) = |3(\frac{1}{2}) - 5| = |\frac{3}{2} - 5|$$

$$= |\frac{3-10}{2}| = |\frac{-7}{2}| = \frac{7}{2}$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x + 2} \Rightarrow g(\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$$

$$= \sqrt{\frac{1+8}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \Rightarrow f(\frac{1}{2}) + g(\frac{1}{2}) = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

۲۸۸. ۲

در گزینه ۲، آگه به جای x مقادیر ۱، ۲، ۳ و ۴ رو قرار بدیم، به ترتیب اعداد ۳، ۴، ۹ و ۸- به‌دست میان. پس در گزینه ۲، داریم:

$$f(x) = \begin{cases} 3x: \text{اعداد طبیعی فرد} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 3(1) = 3 \\ f(3) = 3(3) = 9 \end{cases} \\ -2x: \text{اعداد طبیعی زوج} \Rightarrow \begin{cases} f(2) = -2(2) = -4 \\ f(4) = -2(4) = -8 \end{cases} \end{cases}$$

برای سایر گزینه‌ها یک مثال نقض میاریم: (مثال نقض یعنی یه مثال که نادرستی یک رابطه رو نشون میده.)

$$\text{بررسی سایر گزینه‌ها:} \quad \begin{cases} \text{در سؤال: } f(2) = -4 \\ \text{در گزینه ۱: } f(2) = 3(2) = 6 \end{cases}$$

پس دامنه برابر $\{-2, -1, 2, 4\}$ بوده و مجموع عضوهای دامنه برابر $3 = (-2) + (-1) + 2 + 4$ می‌شود.

۳۰۱. ۴

رابطه بین دو مجموعه A و B یعنی رابطه $A \rightarrow B$ وقتی تابع خواهد بود که به هر عضو x از مجموعه A ، دقیقاً یک عضو مانند y از مجموعه B رو نسبت بدیم. **بررسی گزینه‌ها:** ۱ برای هر مسلمان فقط یک قبله داریم، پس تابع است. ۲ متناظر با هر فرد فقط یک شماره ملی داریم، پس تابع است. ۳ برای مساحت هر مربع فقط یک ضلع داریم که برابر با جذر مساحت، پس تابع است. ۴ ممکنه شهری مانند مشهد چند سوغاتی داشته باشه، پس متناظر با هر شهر، ممکنه بیش از یک سوغاتی داشته باشیم. بنابراین گزینه «۴» تابع نیست.

۳۰۲. ۳

در گزینه «۳» به ازای یک شخص، دو تا نام والدین (پدر و مادر) وجود داره، پس تابع نداریم. اما در گزینه‌های دیگه به ازای یک شخص فقط یک شماره ملی، یک نام خانوادگی و یک رنگ پوست وجود داره و همگی تابع هستن.

۳۰۳. ۱ کد پاسخ تصویری ۰۲۰۲۰۰۸۲

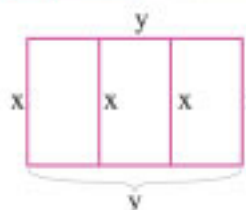
$$\Rightarrow 4x + 2y = 190 \Rightarrow 2y = 190 - 4x$$

$$\Rightarrow y = 95 - 2x$$

$$95 - 2x > 0 \Rightarrow x < 47.5$$

$$\xrightarrow{x \text{ مثبت است}} 0 < x < 47.5$$

$$S = xy \Rightarrow S(x) = x(95 - 2x) = 95x - 2x^2$$



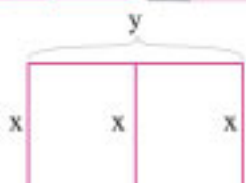
۳۰۴. ۳ کد پاسخ تصویری ۰۲۰۲۰۰۸۳

$$3x + 2y = 210 \Rightarrow 2y = 210 - 3x$$

$$\Rightarrow y = 105 - \frac{3}{2}x$$

$$105 - \frac{3}{2}x > 0 \Rightarrow \frac{3}{2}x < 105 \Rightarrow x < 70$$

$$S = xy \Rightarrow S(x) = x(105 - \frac{3}{2}x) \Rightarrow S(x) = 105x - \frac{3}{2}x^2, 0 < x < 70$$



۳۰۵. ۲

به نکته تستی زیر توجه کنین.

نکته تستی: اگر مجموعه A دارای m عضو و مجموعه B دارای n عضو باشد از مجموعه A به B به تعداد n^m تابع مختلف می‌تونیم بسازیم.

طبق نکته بالا الان می‌تونیم 4^{10} تابع بسازیم ولی 4^{10} رو در گزینه‌ها نمی‌بینیم لذا عدد ۴ رو تجزیه می‌کنیم:

$$4^{10} = (2^2)^{10} = 2^{20}$$

۳۰۶. ۱ کد پاسخ تصویری ۰۲۰۲۰۰۸۴

$$A = \{2, 4, 6, 8\} \text{ اعداد طبیعی زوج یک رقمی}$$

$$B = \{2, 3, 5, 7\} \text{ اعداد طبیعی اول یک رقمی}$$

$$\Rightarrow B \text{ به } A \text{ به } 4^4 = 256 \text{ تعداد توابع از } A \text{ به } B$$

۳۰۷. ۲

تعداد توابعی که از مجموعه ۳ عضوی A به مجموعه ۲ عضوی B می‌تونیم تشکیل بدیم، برابر با 2^3 یعنی ۸ است.

۳۰۸. ۲ کد پاسخ تصویری ۰۲۰۲۰۰۸۵

ابتدا طرفین وسطین می‌کنیم تا معادله خط رو به شکل استاندارد تبدیل کنیم. (شکل استاندارد یعنی y در سمت چپ تساوی، تنها بشه.)

$$\frac{2y-1}{3} = -2x \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2y-1 = -6x \Rightarrow 2y = -6x+1$$

$$\xrightarrow{\div 2} y = -3x + \frac{1}{2}$$

۲۹۴. ۳

در تابع $f(x)$ به جای x ها، عدد $(2-\sqrt{3})$ رو قرار میدیم:

$$\begin{aligned} f(2-\sqrt{3}) &= \sqrt{\underbrace{-2(2-\sqrt{3})^2}_{\text{اتحاد دوم}} + 8(2-\sqrt{3}) + 7} \\ &= \sqrt{-2(4-4\sqrt{3}+3) + 8(2-\sqrt{3}) + 7} \\ &= \sqrt{-8 + 8\sqrt{3} - 6 + 16 - 8\sqrt{3} + 7} = \sqrt{9} = 3 \end{aligned}$$

۲۹۵. ۲

دامنه یک تابع، مجموعه مقادیری هست که یک متغیر مستقل می‌تونه اختیار کنه و برد تابع، مجموعه مقادیری هست که یک متغیر وابسته می‌تونه داشته باشه. در گزینه «۳» متغیر x ، متغیر مستقل و متغیر $h(x)$ ، متغیر وابسته است.

۲۹۶. ۳

برای به دست آوردن دامنه با استفاده از برد، کافیه که مقادیر موجود در برد رو به جای $f(x)$ (یا همون y) قرار بدیم و x مورد نظر رو به دست بیاریم:

R_f	$f(x) = 2x - 1$
۱	$2x - 1 = 1 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$
۳	$2x - 1 = 3 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow D_f = \{1, 2, 3\}$
۵	$2x - 1 = 5 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$

۲۹۷. ۳ کد پاسخ تصویری ۰۲۰۲۰۰۸۱

چون برد $\{1\}$ است، پس به جای y یا $f(x)$ عدد ۱ رو قرار میدیم:

$$x^2 - 5x + 1 = 1$$

$$x^2 - 5x + 1 = 1 \Rightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \end{cases}$$

بنابراین تابع f می‌تونه از دو زوج مرتب $(0, 1)$ و $(5, 1)$ یا یکی از این دو زوج مرتب، تشکیل شده باشه. با توجه به گزینه‌ها داریم:

۲۹۸. ۲

در ضابطه تابع $(f(x) = \sqrt{x+1} - 1)$ به جای x مقادیر $A = \{0, -1, 8, 3\}$ رو قرار میدیم تا برد به دست بیاد.

x	$f(x) = \sqrt{x+1} - 1$
۰	$f(0) = \sqrt{0+1} - 1 = \sqrt{1} - 1 = 0$
-1	$f(-1) = \sqrt{-1+1} - 1 = \sqrt{0} - 1 = -1$
۸	$f(8) = \sqrt{8+1} - 1 = \sqrt{9} - 1 = 2 \Rightarrow R_f = \{0, -1, 2, 1\}$
۳	$f(3) = \sqrt{3+1} - 1 = \sqrt{4} - 1 = 1$

۲۹۹. ۲

وقتی گفته میشه $f(a) = 3$ یعنی هر جا x دیدیم به جاش a میذاریم و هر جا y دیدیم به جاش ۳ رو قرار میدیم:

$$f(a) = 3 \Rightarrow a^2 + 2a = 3 \Rightarrow a^2 + 2a - 3 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه با جمله مشترک}} (a-1)(a+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a-1=0 \Rightarrow a=1 \\ a+3=0 \Rightarrow a=-3 \end{cases}$$

ولی طبق فرض $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ تعریف شده یعنی دامنه f برابر اعداد طبیعی هست؛ بنابراین a نمی‌تونه -۳ باشه و فقط $a = 1$ قابل قبوله.

۳۰۰. ۱

برد تابع $R = \{0, 1\}$ هست، پس در ضابطه تابع، یکبار به جای y عدد صفر و بار دیگه عدد ۱ رو قرار میدیم:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} \frac{f(x)=0}{3x} &\Rightarrow \frac{x^2-4}{3x} = 0 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \\ \frac{f(x)=1}{3x} &\Rightarrow \frac{x^2-4}{3x} = 1 \Rightarrow x^2-4=3x \Rightarrow x^2-3x-4=0 \\ &\Rightarrow (x+1)(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=4 \end{cases} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

۳۱۲. کد پاسخ تصویری ۰۱۰۲۰۰۸۷

$$A \begin{vmatrix} 1 \\ 5 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} 3 \\ -9 \end{vmatrix} \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-9 - 5}{3 - 1} = \frac{-14}{2} = -7$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 5 = -7(x - 1)$$

$$\Rightarrow y = -7x + 12 \quad \begin{cases} x=3 \rightarrow y=12 \\ x=5 \rightarrow y=-23 \end{cases}$$

پس برد تابع به صورت $-23 \leq y \leq 12$ می باشد.

۳۱۳. ۲

به کمک دو نقطه داده شده، شیب و معادله خط رو به دست میاریم:

$$f(1) = 3 \Rightarrow A \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix}, f(10) = 21 \Rightarrow B \begin{vmatrix} 10 \\ 21 \end{vmatrix}$$

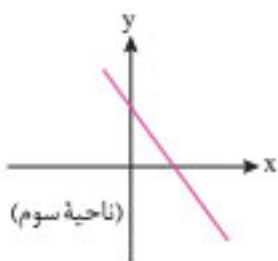
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{21 - 3}{10 - 1} = \frac{18}{9} = 2$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 3 = 2(x - 1) \Rightarrow y - 3 = 2x - 2$$

$$\Rightarrow f(x) = y = 2x + 1 \Rightarrow f(\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2}) + 1 = 2\sqrt{2} + 1$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{2} + f(\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 1 = 1$$

۳۱۴. ۳



m مثبت هست پس حاصل $-2m$ یعنی شیب خط عددی منفی خواهد شد. از طرفی گفته شده n که همون عرض از مبدأ خط هست، مثبت پس نمودار تقریبی خط به شکل مقابل خواهد بود:

پس نمودار از ناحیه سوم نمی گذره.

۳۱۵. ۴

ابتدا شیب خط رو به دست آورده و برابر با عدد ۱ قرار میدیم:

$$\frac{a-3}{1-a} = 1 \Rightarrow a-3 = 1-a \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

مقدار a رو در معادله خط جای گذاری می کنیم: $y - 2 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x + 1$

۳۱۶. ۴

شیب گذرنده از دو نقطه به صورت $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ تعریف میشه، بنابراین داریم:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow 1 = \frac{k+2-7}{-3-(2k-1)} \Rightarrow 1 = \frac{k-5}{-3-2k+1} \Rightarrow 1 = \frac{k-5}{-2-2k}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} k-5 = -2-2k \Rightarrow k+2k = -2+5 \Rightarrow 3k = 3 \Rightarrow k = 1$$

۳۱۷. ۲

مختصات دو نقطه داده شده رو در معادله خط قرار میدیم و دستگاه حاصل رو حل می کنیم:

$$ay + 4x = 4b \xrightarrow{\begin{smallmatrix} x & y \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}} a(4) + 4(1) = 4b \Rightarrow 4a - 4b = -4$$

$$ay + 4x = 4b \xrightarrow{\begin{smallmatrix} x & y \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}} a(2) + 4(-1) = 4b \Rightarrow 2a - 4b = +4$$

حالا به دلخواه معادله اول رو در (-1) ضرب می کنیم تا $4b$ و $-4b$ با هم حذف بشن:

$$\begin{cases} -4a + 4b = 4 \\ 2a - 4b = 4 \end{cases}$$

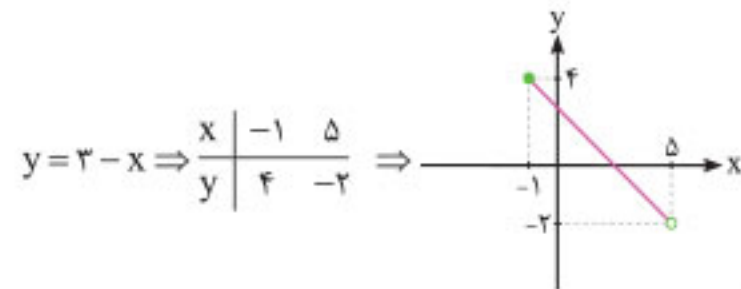
$$-2a = 8 \Rightarrow a = -4 \xrightarrow{2a - 4b = 4} 2(-4) - 4b = 4$$

$$\Rightarrow -4b = 12 \Rightarrow b = -3 \Rightarrow a + b = -7$$

شیب منفی (-3) و عرض از مبدأ مثبت $(\frac{1}{2})$ هست؛ پس خط به راحتی رسم میشه. (نیازی به رسم دقیق نیست ولی اگه دوست داشتن دقیق تر رسم کنین به x دو عدد دلخواه بدین y این دو عدد رو پیدا کنین و نقاط حاصل رو به هم وصل کنین.)

۳۰۹. ۳

در اینجا دامنه $\mathbb{R}$ نیست بلکه قسمتی از $\mathbb{R}$ است. الان دامنه از دو طرف محدود شده یعنی به ابتدا داره و به انتها. ابتدای دامنه عدد -1 است و انتهای اون عدد 5 (البته انتهای دامنه، توی نمودار توخالی میشه، چون مساوی نداره).



۳۱۰. ۱

با توجه به نمودار، خط از نقاط $(2, 0)$ و $(0, 2)$ می گذره، بنابراین معادله خط رو با داشتن دو نقطه می نویسیم:

$$(A \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix}) \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{0 - 2} = -1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = -1(x - 2) \Rightarrow y = -x + 2$$

۳۱۱. ۲ کد پاسخ تصویری ۰۱۰۲۰۰۸۶

روش اول: با داشتن دو نقطه $(-1, 3)$ و $(1, -4)$ معادله خط رو می نویسیم؛ ابتدا شیب خط رو به دست میاریم:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m = \frac{3 - (-4)}{-1 - 1} = \frac{-7}{2}$$

حال معادله خط رو از رابطه $y - y_1 = m(x - x_1)$ می نویسیم:

$$y - 3 = -\frac{7}{2}(x + 1)$$

نقطه $(-2, a)$ رو در تابع قرار میدیم:

$$a - 3 = -\frac{7}{2} \times (-1) \Rightarrow a = \frac{7}{2} + 3 = \frac{13}{2} = 6.5$$

روش دوم: با توجه به نقاط $(-1, 3)$ و $(1, -4)$ می تونیم نتیجه بگیریم که خط مذکور با افزایش x واحدی 7 واحد از y اون کم میشه، پس به ازای افزایش هر واحد x ، کاهش y داریم.

نقطه $(-2, a)$ یک واحد x کمتر نسبت به $(-1, 3)$ داره، پس y اون باید $\frac{7}{2}$ بیشتر باشه:

$$a = 3 + \frac{7}{2} = \frac{13}{2} = 6.5$$

روش سوم:

نکته: اگر سه نقطه A ، B و C روی یک خط باشن، داریم:

$$m_{AB} = m_{AC} = m_{BC}$$

با توجه به نکته بالا: $A(-2, a)$ ، $B(-1, 3)$ و $C(1, -4)$

حال شیب رو با استفاده از نقاط B و C به دست میاریم:

$$m_{BC} = \frac{3 - (-4)}{-1 - 1} = \frac{-7}{-2}$$

می دونیم که: $m_{BC} = m_{AC}$

$$m_{AC} = \frac{a - (-4)}{-2 - 1} = \frac{a + 4}{-3} \Rightarrow \frac{a + 4}{-3} = \frac{-7}{-2}$$

حال طرفین وسطین می کنیم:

$$-21 = -2a - 8 \Rightarrow -13 = -2a \Rightarrow a = \frac{-13}{-2} = 6.5$$



۳۲۳. کد پاسخ تصویری ۰۰۰۷۰۰۹۱

این تابع، یک تابع درجه اوله برای همین مشابه دنباله حسابی است و دنباله حسابی یعنی الگوی خطی. دقت کنید که در دنباله حسابی میانگین همه جمله‌ها همون میانگین جمله اول و آخره:

$$\begin{cases} f(-99) = \frac{99}{2} + 4 \\ f(100) = \frac{-100}{2} + 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} \frac{99}{2} + 4 - \frac{100}{2} + 4 = \frac{15}{2}$$

$$\text{میانگین} = \frac{15}{2} = \frac{15}{4} = 3.75$$

۳۲۴. کد پاسخ تصویری ۰۰۰۷۰۰۹۲

در توابع خطی، برای یافتن برد، نیازی به رسم نمودار نیست بلکه می‌تونیم ابتدا و انتهای دامنه رو به جای x ‌های تابع قرار بدیم تا y ‌ها به دست بیان:

$$f(x) = y = -4x + 1 \begin{cases} x = -3 \rightarrow y = -4(-3) + 1 = 13 \\ x = 6 \rightarrow y = -4(6) + 1 = -23 \end{cases}$$

پس برد تابع برابر میشه با: $-23 < y \leq 13$ حالا چرا مساوی رو فقط برای ۱۳ قرار دادیم؟ علت اینه که $x = -3$ متعلق به دامنه است ولی $x = 6$ جزء دامنه نیست، پس برای $y = 13$ که جواب $f(-3)$ بود مساوی گذاشتیم.

۳۲۵. کد پاسخ تصویری ۰۰۰۷۰۰۹۳

نقاط داده شده را نام گذاری می‌کنیم: $A(a, 3), B(-1, a), C(1, 3a)$ برای آنکه نقاط A, B, C روی یک خط واقع باشند، باید داشته باشیم:

$$m_{AB} = m_{BC} \quad m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{a - 3}{-1 - a}$$

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{3a - a}{1 + 1} = \frac{2a}{2} = a$$

$$\Rightarrow \frac{a - 3}{-1 - a} = a \Rightarrow -a - a^2 = a - 3 \Rightarrow a^2 + 2a - 3 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه می‌کنیم}} (a + 3)(a - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \quad \checkmark \\ a = 1 \quad \times \end{cases}$$

ولی به ازای $a = 1$ نقاط A و C بر هم منطبق می‌شوند، پس $a = -3$ قابل قبول است.

نکته مهم: اگر سه نقطه A, B, C روی یک خط راست باشند،

شیب خط AB باید با شیب خط BC و خط AC برابر باشد، لذا:

$$m_{AB} = m_{BC} = m_{AC}$$

۳۲۶. کد پاسخ تصویری ۰۰۰۷۰۰۹۳

نکته: اگر بدانیم نقاط A, B, C همگی روی یک خط راست هستند

باید رابطه $m_{AB} = m_{AC} = m_{BC}$ بین شیب‌های AB, AC, BC برقرار باشد. البته در کنکور، معمولاً انتخاب یک تساوی کفایت می‌کند یعنی از $m_{AB} = m_{AC}$ یا $m_{AB} = m_{BC}$ یا $m_{AC} = m_{BC}$ استفاده می‌کنیم.

شرط اینکه سه نقطه A, B, C روی یک خط راست باشند، این است که:

$$m_{AB} = m_{AC} = m_{BC} \xrightarrow{\text{به دلخواه یک تساوی را انتخاب می‌کنیم}} m_{AB} = m_{BC}$$

$$A \left(-\frac{a}{2}, \frac{3}{2} \right), B \left(\frac{3}{a-2}, -1 \right), C \left(\frac{3a}{3-3a}, -1 \right)$$

$$m_{BC} = \frac{a - 2 - (-1)}{3 - 3a} = \frac{a - 1}{3 - 3a} = \frac{a - 1}{3(1 - a)} = -\frac{1}{3}$$

۳۱۸. کد پاسخ تصویری ۰۰۰۷۰۰۸۸

چون نقطه A روی محور طول‌ها قرار داره، پس عرض اون برابر صفره:

$$y_A = 0 \Rightarrow A(3, 0)$$

حالا نقطه A رو در معادله خط جای گذاری می‌کنیم:

$$A(3, 0) \xrightarrow{\text{معادله خط}} 3m(3) - (2m - 2)(0) - 18 = 0$$

$$\Rightarrow 9m - 0 - 18 = 0 \Rightarrow 9m = 18 \Rightarrow m = 2$$

با جای گذاری $m = 2$ در معادله خط، رابطه اصلی معادله خط به دست میاد.

برای به دست آوردن شیب، معادله خط رو استاندارد می‌کنیم (y در یک طرف تنها بشه):

$$-2y = -6x + 18 \xrightarrow{:(-2)} y = 3x - 9$$

بنابراین شیب خط ۳ است.

۳۱۹. کد پاسخ تصویری ۰۰۰۷۰۰۸۸

چون تابع خطی به ازای هر مقدار m از نقطه (α, β) می‌گذره، پس:

$$m = \frac{\beta - \alpha}{1 - 2 \times 0} \Rightarrow \beta - \alpha = -\frac{3}{2}$$

۳۲۰. کد پاسخ تصویری ۰۰۰۷۰۰۸۹

چون تابع خطی به ازای تمام مقادیر از نقطه (a, b) می‌گذره، پس به ازای $m = 0, 1$ نیز از (a, b) می‌گذره. پس داریم:

$$f(x) = \left(\frac{1-m}{2}\right)x - m + \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{m=0} b = \frac{1}{2}a - 0 + \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{a+1}{2}$$

$$\xrightarrow{m=1} b = \left(\frac{1-1}{2}\right)a - 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

$$b = \frac{a+1}{2} \xrightarrow{b=-\frac{1}{2}} -\frac{1}{2} = \frac{a+1}{2} \Rightarrow a+1 = -1 \Rightarrow a = -2$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{-2}{-\frac{1}{2}} = 4$$

۳۲۱. کد پاسخ تصویری ۰۰۰۷۰۰۹۰

$$f(x) = \frac{-4}{a+2}x + b$$

$$f(1) = 2a - 1 \Rightarrow \frac{-4}{a+2} + b = 2a - 1 \quad (1)$$

$$f\left(-\frac{a}{2}\right) = 2 \Rightarrow \frac{-4}{a+2} \left(-\frac{a}{2}\right) + b = 2 \Rightarrow \frac{2a}{a+2} + b = 2 \Rightarrow b = 2 - \frac{2a}{a+2}$$

$$\xrightarrow{\text{جای گذاری در (1)}} -\frac{4}{a+2} + \left(2 - \frac{2a}{a+2}\right) = 2a - 1$$

$$\Rightarrow -\frac{4}{a+2} - \frac{2a}{a+2} - 2a = -3 \Rightarrow \frac{-4 - 2a - 2a^2 - 4a}{a+2} = -3$$

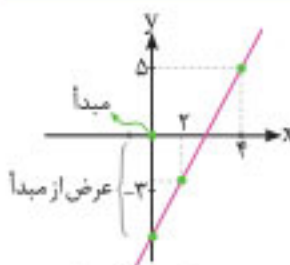
$$\xrightarrow{\text{ضرب همه جملات در (a+2)}} -2a^2 - 6a - 4 = -3a - 6 \Rightarrow -2a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4(-2)(2) = 9 + 16 = 25$$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{3+5}{-4} = -2 \Rightarrow b = 2 - \frac{-4}{0} \quad \times \\ a_2 = \frac{3-5}{-4} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 2 - \frac{1}{\frac{1}{2}+2} = \frac{8}{5} \quad \checkmark \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\frac{8}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{16}{5} = \frac{32}{10} = 3.2$$

۳۲۲. کد پاسخ تصویری ۰۰۰۷۰۰۹۱



در این سؤال، نیازی نیست که حتماً شیب و عرض از مبدأ رو به دست بیاریم فقط کافیست دو نقطه داده شده رو به هم وصل کنیم و علامت شیب و عرض از مبدأ رو از روی شکل، بررسی کنیم: با توجه به شکل، میشه گفت شیب خط مثبت و همچنین خط، محور عرض‌ها رو پایین مبدأ قطع کرده پس عرض از مبدأ خط منفیه.

۳۳۰. کد پاسخ تصویری ۰۳۰۲۰۰۹۵

نکته: اگر نمودار تابع f از نقطه $A(x_1, y_1)$ عبور کند به این معناست که $y_1 = f(x_1)$ یعنی مختصات نقطه A را در ضابطه f قرار میدیم تا مجهول خواسته شده به دست بیاید.

$$f(x) = -mx - h \xrightarrow{A(-2, 3)} 3 = -2m - h \Rightarrow m = \frac{h+3}{2}$$

$$g(x) = ax + h \xrightarrow{A(-2, 3)} 3 = -2a + h \Rightarrow a = \frac{h-3}{2}$$

فرض سؤال $f(-\frac{5}{4}) = g(-5) \Rightarrow \frac{5}{4}m - h = -5a + h$

$$\xrightarrow{\times 4} 5m - 4h = -20a + 4h \Rightarrow 5m - 8h + 20a = 0$$

$$\Delta(\frac{h+3}{2}) - 8h + 20(\frac{h-3}{2}) = 0$$

$$\xrightarrow{\times 2} 5h + 15 - 16h + 20h - 60 = 0 \Rightarrow 9h = 45 \Rightarrow h = 5$$

$$\Rightarrow m = \frac{h+3}{2} = \frac{5+3}{2} = 4, a = \frac{h-3}{2} = \frac{5-3}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{m}{a} = \frac{4}{1} = 4$$

۳۳۱. کد پاسخ تصویری ۰۳۰۲۰۰۹۶

در تابع خطی نباید x^2 داشته باشیم پس باید اون رو نابود کنیم، لذا ضریب x^2 رو مساوی با صفر قرار میدیم:

$$2k - 5 = 0 \Rightarrow 2k = 5 \Rightarrow k = \frac{5}{2}$$

حالا در تابع g به جای k عدد $\frac{5}{2}$ رو قرار میدیم:

$$g(x) = 2x - k^2 = 2x - (\frac{5}{2})^2 = 2x - \frac{25}{4}$$

$$\xrightarrow{x=1} g(1) = 2(1) - \frac{25}{4} = \frac{8-25}{4} = \frac{-17}{4}$$

۳۳۲. کد پاسخ تصویری ۰۳۰۲۰۰۹۷

تابع داده شده، ظاهراً خطی نیست ولی با انتخاب یک مقدار مناسب برای m به تابعی خطی تبدیلش می کنیم. در این گونه مسائل، همون طور که در درسنامه هم گفتیم باید ریشه مخرج رو در صورت قرار بدیم و صورت رو مساوی صفر بنویسیم:

$$\text{ریشه مخرج} = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

حالا این عدد رو در صورت کسر قرار میدیم.

$$\text{صورت} = 0 \Rightarrow x^2 + mx + 5 = 0$$

$$\xrightarrow{x=-1} (-1)^2 + m(-1) + 5 = 0 \Rightarrow 1 - m + 5 = 0 \Rightarrow m = 6$$

حالا این مقدار m رو در تابع قرار میدیم:

تجزیه با جمله مشترک

$$f(x) = \frac{x^2 + 6x + 5}{x+1} = \frac{(x+5)(x+1)}{x+1} = x+5$$

$$f(2) = 2+5 = 7 \Rightarrow \frac{f(2)}{m} = \frac{7}{6}$$

۳۳۳. کد پاسخ تصویری ۰۳۰۲۰۰۹۷

الان باید در دو حالت، مسئله رو حل کنیم.

حالت اول:

$$\begin{array}{c} x_1 \\ \uparrow \\ 1 < x < 6 \\ \uparrow \\ A \end{array} \quad \begin{array}{c} x_2 \\ \uparrow \\ 6 \\ \uparrow \\ B \end{array} \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - (-2)}{6 - 1} = \frac{2}{5}$$

$$\begin{array}{c} -2 < y < 0 \\ \uparrow \\ y_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} 0 \\ \uparrow \\ y_2 \end{array}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y + 2 = \frac{2}{5}(x - 1)$$

$$\xrightarrow{x=4} y + 2 = \frac{2}{5} \times 3 \Rightarrow y = \frac{6}{5} - 2 = \frac{-4}{5}$$

$$m_{AC} = \frac{2/5 - (-1)}{-\frac{a}{2} - 3a} = \frac{3/5}{-\frac{a}{2} - 3a}$$

$$m_{AC} = m_{BC} \Rightarrow \frac{3/5}{-\frac{a}{2} - 3a} = \frac{-1}{3}$$

طرفین وسطین می کنیم

$$\xrightarrow{\times 2} a + 6a = 21 \Rightarrow 7a = 21 \Rightarrow a = 3$$

۳۳۷. کد پاسخ تصویری ۰۳۰۲۰۰۹۷

ضابطه f به ما داده نشده ولی می دونیم که خطی هست پس اون رو به شکل $f(x) = mx + n$ در نظر می گیریم. حالا نقاط داده شده رو در این ضابطه قرار میدیم:

$$y = mx + n \xrightarrow{A(0, 0)} 0 = m(0) + n \Rightarrow n = 0$$

$$y = mx + n \xrightarrow{B(-6, 2)} 2 = m(-6) + 0 \Rightarrow -6m = 2 \Rightarrow m = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$$

پس ضابطه f به صورت $f(x) = -\frac{1}{3}x$ است. حالا $f(0/3)$ و $f(-0/3)$ رو حساب می کنیم:

$$f(0/3) = -\frac{1}{3} \times 0/3 = -\frac{1}{3} \times \frac{0}{10} = -\frac{1}{10}$$

$$f(-0/3) = -\frac{1}{3} \times (-0/3) = -\frac{1}{3} \times (-\frac{0}{10}) = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow f(0/3) - f(-0/3) = -\frac{1}{10} - \frac{1}{10} = \frac{-2}{10} = -0/2$$

۳۳۸. کد پاسخ تصویری ۰۳۰۲۰۰۹۴

خودمون فرمول تابع f رو به شکل $f(x) = mx + n$ در نظر می گیریم:

$$f(1) = m(1) + n = m + n$$

$$f(4) = m(4) + n = 4m + n$$

$$\xrightarrow{\text{در رابطه } 2f(1) - f(4) = 1 \text{ می ذاریم}} 2(m+n) - (4m+n) = 1$$

$$\Rightarrow 2m + 2n - 4m - n = 1 \Rightarrow -2m + n = 1$$

از طرفی گفته شده نمودار خط از نقطه $(0, 4)$ عبور می کنه، پس مختصات این نقطه رو در تابع قرار میدیم:

$$y = mx + n \xrightarrow{\substack{x=0 \\ y=4}} 4 = m(0) + n \Rightarrow n = 4$$

$$-2m + n = 1 \xrightarrow{n=4} -2m + 4 = 1$$

$$\Rightarrow -2m = 6 \Rightarrow m = -3$$

حالا این m و n رو که به دست آوردیم، در ضابطه f قرار میدیم:

$$f(x) = -3x + 4 \xrightarrow{x=100} f(100) = -3(100) + 4 = -296$$

۳۳۹. کد پاسخ تصویری ۰۳۰۲۰۰۹۷

دو علامت مساوی دامنه و برد، مربوط به یک نقطه هستن که این نقطه به صورت $(-4, 10)$ است، دو عدد دیگر دامنه و برد هم که علامت مساوی ندارن مربوط به یک نقطه دیگر خط هستن که مختصات این نقطه $(1, 12)$ است. حالا با داشتن دو نقطه از خط، شیب و معادله خط رو می نویسیم:

$$(A \begin{array}{c} -4 \rightarrow x_1 \\ 10 \rightarrow y_1 \end{array}, B \begin{array}{c} 1 \rightarrow x_2 \\ 12 \rightarrow y_2 \end{array}) \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{12 - 10}{1 - (-4)} = \frac{2}{5}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 10 = \frac{2}{5}(x - (-4))$$

$$\xrightarrow{\text{به جای } x \text{ عدد صفر رو میذاریم}} y - 10 = \frac{2}{5}(4) \Rightarrow y = \frac{8}{5} + 10 = \frac{58}{5}$$

۳۳۸. ۲

ابتدا دستگاه دو معادله و دو مجهول رو حل می کنیم تا نقطه تلاقی (برخورد) دو خط به دست بیاد.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -x + 3y = -6 \end{cases} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} 2x + y = 5 \\ -2x + 6y = -12 \end{cases} \Rightarrow 7y = -7 \Rightarrow y = -1$$

$$2x + y = 5 \xrightarrow{y=-1} 2x - 1 = 5 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

پس نقطه تلاقی $(3, -1)$ است. اکنون با داشتن دو نقطه $A(-2, 4)$ و $B(3, -1)$ شیب خط d رو محاسبه می کنیم:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1 - 4}{3 - (-2)} = \frac{-5}{5} = -1$$

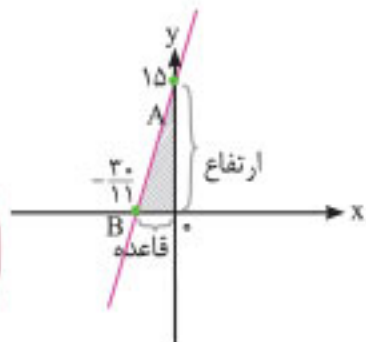
۳۳۹. ۴

برای یافتن محل برخورد با محور y ها به جای x و برای یافتن محل برخورد با محور x ها به جای y صفر می ذاریم:

$$\frac{y - 3x}{5} - \frac{x}{2} = 3 \xrightarrow{\times 10} \begin{cases} 2y - 3x = 30 \\ -5x = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y - 3x = 30 \\ x = -6 \end{cases} \Rightarrow 2y - 3(-6) = 30 \Rightarrow 2y + 18 = 30 \Rightarrow 2y = 12 \Rightarrow y = 6$$

$$\Rightarrow -5x = 30 \Rightarrow x = -6 \Rightarrow B \left(-6, \frac{30}{5} \right) = B(-6, 6)$$

پس نمودار خط به شکل مقابل خواهد بود:



$$OAB \text{ مثلث} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{15 \times 6}{2} = \frac{45}{1} = 45$$

۳۴۰. ۱ کد پاسخ تصویری ۰۷۰۷۰۰۹۹

چون تابع f با خط $3x - 2y = b$ برخورد ندارد، پس موازی اند. در نتیجه دارای شیب های برابرند:

$$2y = 3x - b \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{b}{2}$$

$$\Rightarrow m = \frac{3}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{3}{2}x + h$$

$$f(2) = 2a - 1 \Rightarrow 2a - 1 = \frac{3}{2} \times 2 + h \Rightarrow 2a = 4 + h \Rightarrow h = 2a - 4 \quad (1)$$

$$f(1-a) = 2 \Rightarrow 2 = \frac{3}{2}(1-a) + h \Rightarrow \frac{3}{2} - \frac{3}{2}a + h = 2$$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}a \quad (2) \xrightarrow{(1) \cdot (2)} \frac{1}{2} + \frac{3}{2}a = 2a - 4 \Rightarrow a = 9$$

$$\xrightarrow{(1)} h = 14 \Rightarrow f(x) = \frac{3}{2}x + 14 \Rightarrow f(-6) = \frac{3}{2}(-6) + 14 = 5$$

۳۴۱. ۲

دو نقطه A و B رو به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$A \begin{cases} 0 \rightarrow x_1 \\ 24 \rightarrow y_1 \end{cases}, B \begin{cases} 2000 \rightarrow x_2 \\ 4 \rightarrow y_2 \end{cases}$$

$$\text{شیب: } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 24}{2000 - 0} = \frac{-20}{2000} = -\frac{1}{100}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 24 = -\frac{1}{100}(x - 0)$$

$$\xrightarrow{x=1400} y - 24 = -\frac{1}{100} \times 1400 \Rightarrow y = -14 + 24 = 10$$

حالت دوم:

$$\Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 + 2}{1 - 6} = -\frac{2}{5}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y + 2 = -\frac{2}{5}(x - 6)$$

$$\xrightarrow{x=4} y + 2 = -\frac{2}{5} \times (-2) \Rightarrow y = \frac{4}{5} - 2 = -\frac{6}{5}$$

$$\Rightarrow \text{حاصل ضرب جواب ها} = \left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{6}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

۳۳۴. ۳

دو خط وقتی با هم موازی هستند که شیبشون مساوی باشه. ابتدا شیب خط اصلی (متن سؤال) رو به دست میاریم:

$$2y = -4x + 3 \xrightarrow{+2} y = -2x + \frac{3}{2} \Rightarrow \text{شیب} = -2$$

اگر خط های موجود در گزینه ها رو استاندارد کنیم فقط خط گزینه «۳» دارای شیب (-2) هست:

$$2x + y = 10 \Rightarrow y = -2x + 10 \Rightarrow \text{شیب} = -2$$

۳۳۵. ۱ کد پاسخ تصویری ۰۷۰۷۰۰۹۸

ابتدا شیب خط داده شده رو محاسبه می کنیم، برای این کار حتماً باید معادله خط رو استاندارد کنیم یعنی کاری کنیم که y تنها بشه:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \xrightarrow{\times 6} x + y = 2 \Rightarrow y = -x + 2 \Rightarrow \text{شیب} = -1$$

می دونیم که دو خط موازی، شیب مساوی دارن پس خواهیم داشت:

$$\left(A \begin{cases} 2 \rightarrow x_1 \\ 6 \rightarrow y_1 \end{cases}, m = -1 \right) \xrightarrow{y - y_1 = m(x - x_1)} y - 6 = -1(x - 2)$$

$$\Rightarrow y = -x + 8$$

۳۳۶. ۴

ابتدا شیب خط L رو به دست میاریم:

$$A \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}, B \begin{cases} 3 \\ 0 \end{cases} \Rightarrow m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 2}{3 - 0} = -\frac{2}{3}$$

از روی شکل، معلومه که خط d و L برهم عمودند پس شیب اون ها، قرینه و معکوس یکدیگر هست شیب خط L برابر $-\frac{2}{3}$ شد پس شیب خط d برابر $\frac{3}{2}$ خواهد بود و $\frac{3}{2}$ همون $1/5$ هست.

۳۳۷. ۲

اگر نمودار تابع خطی از نقطه ای عبور کنه، مختصات اون نقطه در ضابطه تابع صدق می کنه. این تابع از نقاط $(3, -2)$ و $(5, 0)$ عبور می کنه. پس خواهیم داشت:

$$f(x) = (3k - 1)x + 2m$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (3, -2) \rightarrow -2 = (3k - 1)3 + 2m \Rightarrow -2 = 9k - 3 + 2m \\ \Rightarrow 9k + 2m = -2 + 3 \Rightarrow 9k + 2m = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (5, 0) \rightarrow 0 = (3k - 1)5 + 2m \Rightarrow 0 = 15k - 5 + 2m \Rightarrow 15k + 2m = 5 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\times(-1)} \begin{cases} 9k + 2m = 1 \\ 15k + 2m = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9k - 2m = -1 \\ 15k + 2m = 5 \end{cases}$$

$$6k = 4 \Rightarrow k = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$9k + 2m = 1 \xrightarrow{k=\frac{2}{3}} 9\left(\frac{2}{3}\right) + 2m = 1 \Rightarrow 6 + 2m = 1 \Rightarrow m = -\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow 3k + m = 3\left(\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{5}{2}\right) = 2 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$$

