



کتاب آنلاین®

مرجع تخصصی عرضه آنلاین کتاب

مشاهده

چند صفحه

اول کتاب

مقدمه ناشر

به نام خدا

بدون شک مارادونا اسطوره فوتبال جهانها!

جادوگری که از وسط زمین شروع به دریبل زدن بازیکنان می‌کند، سریعاً نزدیک و نزدیک دروازه می‌شه و ... !gooooooal
حالا برای این که مارادونای کنکورتون باشین، یه سری کتاب جیبی براتون تألیف کردیم به اسم نکته‌باز!

در فرایند تألیف کتابای نکته‌باز، هوشمندانه عمل کردیم، این طوری که نکات کاملاً ضروری کنکور و استراتژی‌های لازم برای حل سؤالات رو، یک جا براتون آوردیم. علاوه بر همه این‌ها، شما با انتخاب نکته‌باز، می‌تونین در سریع‌ترین زمان ممکن مطالب رو جمع‌بندی کنین، چون تو این کتابا همه مطالب کنکور به صورت نکته‌محور دسته‌بندی شدن.

در پایان جا داره یه تشکر ویژه کنیم از تیم تألیف و تولید خیلی سبز که بدون زحماتشون، بدون شک کتابای به این خوبی نداشتیم ...!

مارادونای زندگی‌ت باش ...

فهرست مطالب

- ۷ فصل اول: تابع
- ۴۴ فصل دوم: مثلثات
- ۶۹ فصل سوم: حد و پیوستگی
- ۹۶ فصل چهارم: مشتق
- ۱۲۰ فصل پنجم: کاربرد مشتق
- ۱۳۸ فصل ششم: احتمال و شمارش
- ۱۶۴ فصل هفتم: مقاطع مخروطی
- ۱۸۴ فصل هشتم: هندسه تحلیلی
- ۱۹۳ فصل نهم: معادله و نامعادله
- ۲۰۶ فصل دهم: معادله درجه ۲ و سهمی
- ۲۲۲ فصل یازدهم: توابع نمایی و لگاریتمی
- ۲۳۵ فصل دوازدهم: توان‌های گویا و عبارتهای جبری
- ۲۴۷ فصل سیزدهم: الگو و دنباله
- ۲۶۵ فصل چهاردهم: آمار
- ۲۷۹ فصل پانزدهم: هندسه



مشق

مفهوم شیب

۶۳

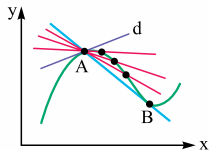
در سال‌های قبل خوانده‌ایم که شیب خط واصل بین دو نقطه $A(x_A, y_A)$

و $B(x_B, y_B)$ از رابطه $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ محاسبه می‌شود. برای تعیین

علامت شیب یک خط مطابق جدول زیر عمل می‌کنیم:

شکل	زاویه با جهت مثبت محور xها	علامت شیب
	حاده	+
	منفرجه	-
	0°	صفر
	90°	تعریف نشده

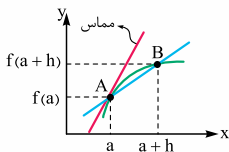
خط مماس: نقطه ثابت A و همچنین نقطه لغزان B را روی منحنی f مطابق شکل زیر در نظر بگیرید. خطی که از نقاط A و B می‌گذرد یک خط قاطع نامیده می‌شود.



با نزدیک کردن نقطه B به نقطه A ، خط قاطع AB به خط d نزدیک‌تر شده و تبدیل به خط مماس می‌شود.

شیب خط مماس:

با در نظر گرفتن نقاط $A(a, f(a))$ و $B(a+h, f(a+h))$ بر روی نمودار داریم:



$$m_{AB} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\xrightarrow[\text{شیب خط مماس}]{h \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

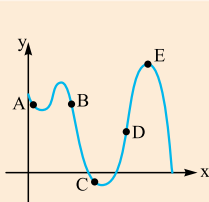
تعریف مشتق

شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $x = a$ ، همان مشتق تابع f در نقطه $x = a$ است که در صورت وجود، آن را با $f'(a)$ نمایش می‌دهیم:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

توجه کنید که در فرمول بالا اگر از تغییر متغیر $a+h = x$ استفاده کنیم، فرمول دوم محاسبه مشتق به صورت زیر به دست می‌آید:

$$a+h = x \Rightarrow h = x-a \Rightarrow f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$



تست از بین نقاط مشخص شده در نمودار، در چند نقطه حاصل ضرب مقدار تابع در مقدار مشتق در نقطه داده شده عددی منفی است؟

۴

۲

۳

۵

پاسخ گزینه F با بررسی نمودار و تکمیل جدول زیر داریم:

نقطه	علامت مقدار تابع	علامت مشتق	علامت حاصل ضرب مقدار تابع در مقدار مشتق
A	+	-	-
B	+	-	-
C	-	-	+
D	+	+	+
E	+	۰	۰

با توجه به جدول بالا، در نقاط A و B علامت حاصل ضرب مقدار تابع در مقدار مشتق، منفی است.

فرمول‌های مشتق‌گیری

۶۶

فرض کنید u تابعی بر حسب x باشد، در آن صورت مشتق توابع مختلف مطابق جدول زیر محاسبه می‌شود:

تابع	مشتق	مثال
c (عدد ثابت)	صفر	$(c)' = 0$
u^n	$nu^{n-1}u'$	$((x^3 + x^2)^3)'$ $= 3(x^3 + x^2)^2(3x^2 + 2x)$

تابع	مشتق	مثال
\sqrt{u}	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(\sqrt{\Delta x + 3})' = \frac{\Delta}{2\sqrt{\Delta x + 3}}$
$\sqrt[n]{u^m}$	$\frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$	$(\sqrt[3]{x^2 + x})' = \frac{1 \times (2x + 1)}{3\sqrt[3]{(x^2 + x)^2}}$
$kf(x)$	$kf'(x)$	$(\Delta\sqrt{2x - 1})' = \Delta \times \frac{2}{2\sqrt{2x - 1}}$
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$	$(x^2 + \sqrt{x})' = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) \times g(x)$	$f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$	$(\sqrt{x}(x+1))'$ $= \frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) + 1 \times \sqrt{x}$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$	$(\frac{\sqrt{x}}{x+1})'$ $= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - 1 \times \sqrt{x}}{(x+1)^2}$

توجه! مشتق تابع $\sqrt[n]{u^m}$ را می‌توانیم با مشتق‌گیری از تابع $(u)^{\frac{m}{n}}$ نیز به دست آوریم.

مشتق عبارات‌های کاربردی را مطابق جدول زیر به خاطر بسپارید.

تابع	\sqrt{x}	$\sqrt[3]{x}$	$\frac{k}{x}$	$\frac{ax + b}{cx + d}$
مشتق	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$-\frac{k}{x^2}$	$\frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$

تست اگر $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}$ و $g(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{(x+1)\sqrt{x+1}}$ باشد،

حاصل $f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$ به ازای $x=1$ کدام است؟

- 1 $-\frac{1}{4}$
 2 $\frac{1}{4}$
 3 $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$
 4 $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

پاسخ گزینه ۱ می‌دانیم $f'g + g'f$ همان $(f \cdot g)'$ است، پس

ابتدا $f \cdot g$ را تشکیل می‌دهیم و سپس از آن مشتق می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
 f(x) \times g(x) &= \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} \times \frac{x^2 + 4x + 4}{(x+1)\sqrt{x+1}} \\
 &= \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} \times \frac{(x+2)^2}{(x+1)\sqrt{x+1}} \Rightarrow f(x) \times g(x) = \frac{x+2}{x+1}
 \end{aligned}$$

از ۲ طرف مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)g(x) + g'(x)f(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$\xrightarrow{x=1} f'(1)g(1) + g'(1)f(1) = -\frac{1}{4}$$

تست مشتق تابع $f(x) = \left(\frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x^2 - x}\right)^3$ ، در نقطه $x=2$ کدام



(سراسری تجربی ۹۹)

- 1 $-\frac{3}{4}$
 2 $-\frac{5}{4}$
 3 $-\frac{5}{2}$
 4 $-\frac{15}{4}$

پاسخ گزینه ۴ به کمک رابطه $(u^n)' = n \times u^{n-1} \times u'$ داریم:

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x^2 - x}\right)^3 \xrightarrow{\text{مشتق}} \\
 &3 \times \left(\frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x^2 - x}\right)^2 \times \frac{3^2 \sqrt{(x^2 + 2x)^2}}{(x^2 - x)^2} \times (x^2 - x) - (2x - 1) \times \sqrt{x^2 + 2x}
 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{x=2} 3 \times \left(\frac{2}{2}\right)^2 \times \frac{6 \times 2 - 3 \times 2}{4} = 3 \times \frac{1-6}{4} = -\frac{15}{4}$$

در تابع $f(x) = \frac{-x-1}{\sqrt{x}}$ ، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\frac{1}{4}+h) - f(\frac{1}{4})}{h}$ کدام است؟  

(خارج تجربی ۹۸)

۴ 

۳ 

۲ 

۱ 


 پاسخ گزینه ۳ طبق تعریف مشتق:



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\frac{1}{4}+h) - f(\frac{1}{4})}{h} = f'(\frac{1}{4})$$

حال با مشتق گیری از تابع f و با جای گذاری $x = \frac{1}{4}$ داریم:

$$f(x) = \frac{-x-1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(-x-1)}{x}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{1}{4}} \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times \frac{1}{2}}(-\frac{1}{4}-1)}{\frac{1}{4}} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{5}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = 3$$

 **تذکر** گاهی اوقات قبل از مشتق گیری بهتر است تابع مورد نظر را تا جای ممکن ساده کنیم و سپس مشتق بگیریم.

مشتق تابع $y = \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+1}}$ ، به ازای $x = 8$ کدام است؟  

$\frac{1}{12}$ 

$\frac{1}{64}$ 

۶۴ 

۱۲ 

✓ پاسخ گزینه F ابتدا در صورت از $\sqrt[3]{x}$ فاکتور می‌گیریم:

$$y = \frac{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x^2} + 1)}{\sqrt[3]{x^2} + 1} = \sqrt[3]{x}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \xrightarrow{x=8} \frac{1}{3\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{12}$$

عامل صفرشونده در مشتق‌گیری

۶۷

اگر تابع f در $x = a$ دارای عامل صفرشونده باشد، برای محاسبه $f'(a)$ فقط از عامل صفرشونده مشتق گرفته و به بقیه جملات کاری نداریم؛ سپس در تمام جملات مقدار a را جای‌گذاری می‌کنیم.

✓ تست اگر $f(x) = (x^2 - x - 2)\sqrt[3]{x^2} - 7x$ باشد، حاصل

(سراسری ریاضی ۹۲) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$ کدام است؟

$-\frac{3}{4}$ (F)

$-\frac{3}{2}$ (T)

-3 (Y)

-6 (A)

✓ پاسخ گزینه A طبق تعریف مشتق:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = f'(-1)$$

$$f(x) = \underbrace{(x^2 - x - 2)}_{\text{عامل صفرشونده}} \sqrt[3]{x^2} - 7x$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق در } x=-1} \underbrace{(2x-1)}_{\substack{\text{مشتق عامل} \\ \text{صفرشونده}}} \sqrt[3]{x^2} - 7x \xrightarrow{x=-1} -3\sqrt[3]{8} = -6$$

$f(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 + 1$ فرض کنید:

	$f \xrightarrow{\text{مشتق}} f' \xrightarrow{\text{مشتق}} f'' \xrightarrow{\text{مشتق}} f'''$
مشتق اول	$f'(x) = 5x^4 + 8x^3 + 3x^2$
مشتق دوم	$f''(x) = 20x^3 + 24x^2 + 6x$
مشتق سوم	$f'''(x) = 60x^2 + 48x + 6$

تذکره اگر مشتق مراتب بالاتر هم نیاز باشد، به همین صورت مشتق گیری را ادامه می دهیم.

تست اگر $f'(0) = g(0) = 1$ و $f(x) = x + 1 + (g(x))^5$ ، مقدار $f''(0)$ برابر کدام است؟

$5g''(0) + 20$ $4g''(0) + 20$ $5g''(0)$ $4g''(0)$

پاسخ گزینه ۲ ابتدا از طرفین رابطه $f(x) = x + 1 + (g(x))^5$ مشتق می گیریم:

$$f'(x) = 1 + 5(g(x))^4 g'(x) \quad (I)$$

$$\xrightarrow{x=0} f'(0) = 1 + 5(g(0))^4 g'(0) \Rightarrow 1 = 1 + 5(1)^4 g'(0)$$

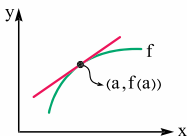
$$\Rightarrow g'(0) = 0$$

برای محاسبه $f''(0)$ از طرفین رابطه (I) مشتق می گیریم. دقت کنید که $g'(0) = 0$ است، پس با استفاده از مشتق عامل صفرکننده داریم:

$$f''(0) = 0 + \underbrace{g''(0)} \times 5(g(0))^4 \Rightarrow f''(0) = g''(0) \times 5(1)^4$$

مقدار مشتق عامل صفرکننده در $x=0$

$$\Rightarrow f''(0) = 5g''(0)$$



برای نوشتن معادله خط مماس بر منحنی $f(x)$ در نقطه $(a, f(a))$ از رابطه زیر استفاده

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

می‌کنیم:

تست عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی $y = \log_5 5^{\sqrt{x+1}}$ در

$x = 3$ کدام است؟

$\frac{1}{4}$

$\frac{7}{4}$

$\frac{3}{4}$

$\frac{5}{4}$

پاسخ **گزینه ۱** ابتدا تابع را به کمک ویژگی‌های لگاریتم ساده

می‌کنیم: $y = \log_5 5^{\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1} \log_5 5 \Rightarrow y = \sqrt{x+1}$

حالا نقطه تماس و شیب مماس را پیدا می‌کنیم:

$x = 3 \Rightarrow y = \sqrt{3+1} = 2 \Rightarrow A(3, 2)$

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \xrightarrow{x=3} y'(3) = \frac{1}{4}$

$\xrightarrow{\text{معادله مماس}} y - 2 = \frac{1}{4}(x - 3)$

برای محاسبه عرض از مبدأ در معادله مماس، $x = 0$ قرار می‌دهیم:

$\Rightarrow y - 2 = \frac{1}{4}(0 - 3) \Rightarrow y = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$

اگر خطی بر تابع مماس باشد، معادله تلاقی (برخورد) آن‌ها ریشه مضاعف دارد.

تست اگر خط $y = 2x + b$ بر نمودار $y = \frac{x+a}{ax+1}$ در نقطه‌ای به

(خارج تجربی ۱۴۰۱)

طول واحد مماس باشد، مقدار $a - b$ کدام است؟

۱

$\frac{2}{3}$

$\frac{1}{2}$

صفر

✓ پاسخ گزینه ۳ خط و منحنی در نقطه‌ای به طول واحد

($x=1$) بر هم مماس‌اند، بنابراین $f(1) = g(1)$ ، یعنی:

$$\frac{1+a}{a(1)+1} = 2(1)+b \Rightarrow b = -1$$

از طرفی دلتای معادله تلاقی خط $y_1 = 2x - 1$ و منحنی $y_2 = \frac{x+a}{ax+1}$ باید برابر صفر باشد (چون معادله تلاقی ریشه مضاعف دارد):

$$\text{معادله تلاقی: } \frac{x+a}{ax+1} = 2x-1$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2ax^2 + 2x - ax - 1 = x + a$$

$$\Rightarrow 2ax^2 + (-a+1)x - 1 - a = 0$$

$$\Delta = (-a+1)^2 - 4(2a)(-1-a) = 0 \Rightarrow 9a^2 + 6a + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (3a+1)^2 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$


$$\xrightarrow{b=-1} a-b = -\frac{1}{3} - (-1) = \frac{2}{3}$$

خط مماس بر تابع وارون

۷۰

اگر نقطه $A(a, b)$ روی تابع f قرار داشته باشد، در آن صورت $A'(b, a)$ نقطه متناظر آن روی f^{-1} است.

اگر شیب خط مماس بر منحنی $y = f(x)$ در نقطه $x = a$ برابر $m = f'(a)$ باشد، در آن صورت شیب خط مماس بر منحنی $y = f^{-1}(x)$ در نقطه A' برابر $\frac{1}{m}$ می‌باشد.

تست  تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$ را در نظر بگیرید؛ شیب خط مماس بر

منحنی $f^{-1}(x)$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن کدام است؟ (خارج تجربی ۱۴۰۰)

-۱۲ 

-۸ 

۸ 

۱۲ 

✓ پاسخ گزینه F فرض می‌کنیم $A(2, \alpha)$ روی f^{-1} باشد:

$$A(2, \alpha) \in f^{-1} \Rightarrow A'(\alpha, 2) \in f$$

ابتدا مختصات نقطه را به دست می‌آوریم:

$$2 = \frac{\sqrt{\alpha} + 1}{\sqrt{\alpha} - 1} \Rightarrow 2\sqrt{\alpha} - 2 = \sqrt{\alpha} + 1 \Rightarrow \sqrt{\alpha} = 3 \Rightarrow \alpha = 9$$

پس مختصات نقاط A و A' به صورت زیر می‌باشد:

$$A(2, 9) \in f^{-1}, A'(9, 2) \in f$$

برای به دست آوردن شیب خط مماس بر منحنی f^{-1} در نقطه $x = 2$ کافی است شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه $x = 9$ را به دست آورده

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)^2} \quad \text{و معکوس کنیم:}$$

$$\xrightarrow{x=9} \frac{\frac{1}{6}(2) - \frac{1}{6}(4)}{4} = -\frac{1}{12} \Rightarrow f'(9) = -\frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow f'(2) = \frac{1}{f'(9)} = -12$$

مشتق چپ و راست

۷۱

$\text{حد راست تعریف مشتق} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ $= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'_+(a)$	مشتق راست
$\text{حد چپ تعریف مشتق} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ $= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'_-(a)$	مشتق چپ