

مقدمه ناشر

شنیدین می‌گن ذهن سیاله؟ یعنی ولش کنی مثل گاز به هر طرفی می‌ره. حالا این سیالیت ذهن خوبه یا بد؟ من که می‌گم حرف نداره! چون باهاش می‌شه چیزایی رو تصور کرد و به جاهایی سرک کشید که امکان نداره تو واقعیت تجربه کنی. ویژگی مشترک همه نابغه‌های دنیا اینه که ذهنشون از آدمای عادی سیال‌تره، مثلاً اینشتین وقتی داشت نسبیت رو می‌پروروند، معلوم نیست ذهنش تا کجاها رفت. در اون زمان نسبیت اون قدر عجیب و غریب به نظر می‌اومد که کسی باورش نمی‌شد یه روزی به یکی از مهم‌ترین نظریه‌های فیزیک تبدیل بشه. اون موقع اینشتین بابت این نظر، حتی یه تمبر پستی هم جایزه نگرفت. سی چهل سالی طول کشید تا کم‌کم یه چیزایی از این نظریه اثبات شد و هنوز هم که هنوزه، داره زوایای پنهانش آشکار می‌شه. این دیگه اوج سیالیت ذهنه. حالا اگه تو هم یه وقت

«می‌نشینی چند تمرین ریاضی حل کنی خط‌کش و نقاله و پرگار شاعر می‌شود»^۱

خوشحال باش که اینم یه جور سیالیت ذهنه، اما در مسیر درست قرار نگرفته! یعنی این‌که یه چیز دیگه که به ظاهر نقطه مقابل سیالیه لازم داری: تمرکز! یا همون از این شاخه به اون شاخه نپریدن.

خب! مشکل شد دوتا؛ حالا تمرکز داشته باشیم یا سیالیت؟ جوابش اینه: هر دو!

خلاصه‌اش این می‌شه وقتی که داری ریاضی می‌خونی، روی ریاضی تمرکز کن ولی بذار ذهنت هر جای ریاضی که دوست داره سرک بکشه و موضوع (یا مسئله) رو هر جور که دلش می‌خواد تحلیل کنه. اون وقت حتماً معجزه سیالیت رو تجربه می‌کنی و لذتجو می‌بری.

کتابای ریاضی از جمله این کتاب، پر از سوژه‌های ناب برای سیالیت ذهنه. پس بخونید و حالشو ببرید.

مرسی از رفقای باسواد و بامراممون رسول، کوروش و سروش. خودم شاهد بودم که چه قدر زحمت کشیدن و برای نوشتن و بعدش بازنویسی‌های این کتاب شب و روز نداشتن. مرسی از محسن فراهانی عزیز که در بازنویسی قبلی و کیوان صارمی عزیز که در بازنویسی جدید کتاب با دقت و وسواس زیاد هم‌پای مؤلفا برای به ثمر رسیدن کتاب جنگیدند و سپاس از مسئول پروژه این کتاب یگانه فلاحتی گرامی که این پروژه سخت و طاقت‌فرسا رو به سرانجام رساند.

دم کارشناسا و ویراستارای این کتاب گرم. دم بچه‌های R&D و QC خیلی سبز گرم. دم بچه‌های تولید (که همین‌جوری گرمه) بازم گرم‌تر. دم شما هم گرم.

مقدمه مؤلفان

تقدیم به

همه دانش‌آموزان و معلمان خوب ایران

به کتاب ریاضیات تجربی جامع خیلی سبز خوش آمدید.

کتاب جامع یعنی تمام مباحث دهم، یازدهم و دوازدهم، البته مباحث مشترک با هم ادغام شده‌اند. یعنی مثلاً در کتاب جامع یک فصل تابع داریم که هر چه را که از سال ۱۰، ۱۱ و ۱۲ باید بلد باشید شامل می‌شود.

نحوه استفاده از کتاب:

الف اگر به مدرسه یا کلاس می‌روید در مورد نحوه استفاده از کتاب حتماً از معلمان بپرسید. ما به شدت اعتقاد داریم که «درس معلم زمزمه محبت و موفقیت است»، با راهنمایی معلمان در مورد ترتیب خواندن درس‌نامه‌ها و حل کردن تست‌ها و بررسی پاسخ‌ها، برنامه‌ریزی و اجرا کنید.

ب اگر به شکل خودآموز از کتاب استفاده می‌کنید توصیه ما این است که: **۱** اول درس‌نامه را خوب و کامل بخوانید. **۲** چیزهایی که از درس‌نامه مهم است مشخص کنید یا برای خودتان یادداشت بردارید و خلاصه کنید. **۳** یک بار دیگر فقط تست‌های درس‌نامه را حل کنید. **۴** بروید سراغ تست‌ها، پاسخ تست‌ها را اول از پاسخ‌نامه کلیدی چک کنید و بعد بروید پاسخ‌ها را بخوانید. خیلی از وقت‌ها خواندن پاسخ تست‌هایی که درست حل کرده‌ایم هم بسیار کمکتان می‌کند.

ساختار کتاب:

۱ در ابتدای کتاب، مقدمات را می‌بینید. در اینجا آن‌چه را که واجب است از محاسبات، درصد، ترتیب عملیات ریاضی و ... گفته‌ایم، سریعاً بخوانید و به یاد بسپارید. در تمام فصل‌های دیگر به این نکته‌ها نیاز دارید.

۲ کتاب با فصل صفر آغاز می‌شود. در فصل صفر از دو مبحث قدرمطلق و جزء صحیح، آن قسمت‌هایی را که برای شروع کتاب لازم دارید، آورده‌ایم. دلیل وجود فصل صفر و اهمیت خواندن و یادگرفتنش این است که در تمام فصل‌های آینده خیالمان راحت باشد که در کار با قدرمطلق و جزء صحیح مشکلی نداریم.

۳ بعد از فصل صفر فصل‌های دیگر کتاب، اول به ترتیب فصل‌های ریاضی ۳ (دوازدهم) و سپس به ترتیب اهمیت و هماهنگ بودن مطالب آمده‌اند. در اول هر فصل مباحث مهم و پرسؤال، فصل‌های مرتبط با کتاب درسی و مباحث پیش‌نیاز را آورده‌ایم. حواستان باشد که وقتی می‌گوییم پیش‌نیاز منظورمان این است که بهتر است روش‌های اصلی و مطالب بنیادی فصل‌های پیش‌نیاز را قبل از خواندن فصل مورد نظر بلد باشید.

تست‌ها:

۱ تست‌های هر درس به دقت و مرتب چیده شده‌اند که باعث می‌شود در روند حل تست‌ها، درکتان از مبحث درس بیشتر شود.
۲ با توجه به سخت‌شدن کنکور از تست‌های ترکیبی، محاسباتی و مفهومی زیادی استفاده کرده‌ایم تا در آزمون‌های آزمایشی و خصوصاً سر جلسه کنکور هیچ تستی برایتان غریبه نباشد.

۳ از جذاب‌ترین قسمت‌های چاپ جدید این کتاب تست‌های «مثل کنکور» است. این تست‌ها شبیه‌سازی تست‌های کنکور است، اما به صورتی هنرمندانه! مثلاً ممکن است تستی که در فصل تابع آمده است براساس ایده‌ای از کنکور که در کاربرد مشتق استفاده شده، طراحی شده باشد. خلاصه ببینید و حل کنید و لذت ببرید!

۴ در تست‌های هر درس، کنار تست‌های عادی یک آیکن ☹️ گذاشته‌ایم. قرار است شما بعد از حل تست‌ها و بررسی پاسخ‌نامه این آیکن‌ها را به 😊 یا 😐 یا ☹️ تبدیل کنید:

یعنی تست دشوار ☹️

یعنی تست متوسط 😐

یعنی تست آسان 😊

این نمادگذاری باعث می‌شود تا بعداً که خواستید فصل را دوره کنید بتوانید تصمیم بگیرید که از کدام تست‌ها برای این کار استفاده کنید و روی سؤال‌ها با نماد مورد نظر تمرکز کنید تا خوب یادشان بگیرید. (البته برای این‌ها از هر نماد دیگری هم که خودتان می‌خواهید می‌توانید استفاده کنید چون هدف اصلی این است که بتوانید بعداً به این سؤال‌ها برگردید).

برای بعضی از تست‌ها هم نماد **☹☹** داریم که نشان‌دهنده تست‌های دشوار یا ترکیبی است. این تست‌ها مختص دانش‌آموزان علاقه‌مند است و قرار نیست همه دانش‌آموزان به این تست‌ها پاسخ دهند.

۵ نماد کنار بعضی از تست‌ها به رنگ قرمز **☹☹** آمده است. این‌ها تست‌های نشان‌دار هستند برای دوره سریع فصل و دوتا کاربرد دارند:

الف دوره و جمع‌بندی فصل

ب اگر قبل از یک آزمون وقت خیلی کمی دارید می‌توانید فقط این تست‌ها را حل کنید. ما معتقدیم که جمع‌بندی واقعی با این روش انجام می‌شود نه با جدول و نمودار و ...!

درس‌نامه‌ها:

۱ در درس‌نامه آیکن‌های **نکته**، **اشاره** و **خاطره** داریم:

نکته: نشان‌دهنده نکته‌ای است که یا یادگرفتنش لازم است یا باعث می‌شود تست را سریع‌تر و بهتر حل کنید.

اشاره: نشان‌دهنده یک اشاره کوچک به مطلب، مفهوم، توضیح یا مثالی است که باعث می‌شود مطلب را بهتر بفهمید. **خاطره**: نشان‌دهنده یک تعریف، فرمول، مقدار یا ... از درس‌های قبلی یا سال‌های قبل است.

۲ درس‌نامه‌ها خیلی کامل و مفهومی و تکنیکی و در عین حال تا جای ممکن به دور از اضافه‌گویی نوشته شده‌اند. تک‌تک مثال‌ها و تست‌های درس‌نامه به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که اولاً کاربرد نکته‌ها و مفاهیم گفته‌شده را ببینید و یاد بگیرید و ثانیاً نمونه‌های اصلی و پرتکرار تست‌های کنکور را ببینید.

پاسخ‌ها:

در حل تست‌ها چه در درس‌نامه و چه در جلد پاسخ این نمادها را داریم:

راه اول، **راه دوم** ... این‌ها نشان‌دهنده روش‌های مختلف حل یک تست است. معمولاً در **راه اول**: متداول‌ترین راه‌حل و یا سریع‌ترین آن‌ها آمده است. **عددگذاری**: در بعضی از تست‌ها که با بررسی گزینه‌ها و یا عددگذاری هم حل می‌شوند و یا بسیار سریع‌تر حل می‌شوند. در قسمت مقدمات به طور کامل در مورد استفاده از این روش هم صحبت کرده‌ایم. البته در این کتاب تأکید اصلی ما بر استفاده از راه‌های مفهومی و اصلی است ولی خب گاهی اوقات که ممکن بوده از **عددگذاری**: استفاده کرده‌ایم اگرچه حواسمان بوده که در استفاده از این روش افراط نکنیم.

آزمون‌ها:

برای هر کدام از فصل‌ها و هم‌چنین برای نقطه‌های زمانی مشخص در سال (مثلاً پایان نیم سال اول یا دوران تعطیلات عید و ...) برایتان آزمون، همراه حل تشریحی و حل ویدیویی آماده کرده‌ایم. برای استفاده از این‌ها کافی است QRCode صفحه شناسنامه را اسکن کنید.

تشکرها:

از تمامی همکارانی که با ارائه نظرات و پیشنهادات خود در مورد چاپ قبلی کتاب به ما در بازنویسی کتاب کمک کرده‌اند، از این دوستان، آقایان حسین نادری، افشین ملاک‌پور، علی مقدم‌نیا، مهدی عزیزی، معین کرمی، مصطفی کرمی، سجاد نقیه، محمد گودرزی، حمید گلزاری، ایمان کاظمی نیز کمال تشکر را داریم.

از تمام معلمان، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی که از این کتاب استفاده می‌کنند نیز درخواست می‌کنیم هر نظری در مورد کتاب دارند برایمان بفرستند. حتماً برایمان بسیار ارزشمند و مؤثر است.

برای این‌که این کتاب خیلی بهتر از قبل شود کلی کار کرده‌ایم. به نظر خودمان بهترین کتاب ریاضیات تجربی است 😊 و امیدواریم نظر شما هم همین باشد.

اگر اشتباه، غلط، جابه‌جایی یا ... در کتاب دیدید حتماً برایمان بفرستید تا هم اصلاح و هم تشکر کنیم. از پیشنهادهایتان هم استقبال می‌کنیم.

تشکر می‌کنیم از دانش‌آموز سخت‌کوش آقای علیرضا سی‌سخت که در بی‌غلط‌شدن این کتاب به ما کمک کرد.

می‌توانید هر سؤالی که داشتید را از طریق کانال @riazikheilisabz از ما پرسید

و از اخبار جدید کتاب مطلع شوید.

خوب و شاد و پیروز باشید!

@ mathmohsenimanesh

@ soroushmueeni

فهرست

مقدمات

فصل صفر: قدرمطلق و جزء صحیح

درس ۱: قدرمطلق	۱۲	۲۳
درس ۲: جزء صحیح	۱۸	۲۵

فصل اول: تابع

فصل ۵ ریاضی دهم - فصل ۳ ریاضی یازدهم - فصل ۱ ریاضی دوازدهم

درس ۱: رابطه و بازنمایی‌های یک رابطه	۲۹	۸۰
درس ۲: مفهوم دامنه و برد - تعیین دامنه - تساوی دو تابع		
درس ۳: انواع تابع	۴۰	۸۷
درس ۴: انتقال نمودارها	۴۵	۹۱
درس ۵: معرفی توابع چندجمله‌ای و بررسی x^3	۴۹	۹۶
درس ۶: اعمال جبری روی توابع	۵۱	۹۸
درس ۷: ترکیب توابع	۵۵	۱۰۲
درس ۸: یکنوایی (توابع صعودی و نزولی)	۶۱	۱۰۸
درس ۹: تابع یک‌به‌یک	۶۶	۱۱۱
درس ۱۰: وارون تابع و تابع وارون	۶۹	۱۱۲
درس ۱۱: تعیین برد تابع	۷۶	۱۱۹

فصل دوم: مثلثات

فصل ۲ ریاضی دهم - فصل ۴ ریاضی یازدهم - فصل ۲ ریاضی دوازدهم

درس ۱: واحدهای اندازه‌گیری زاویه (درجه و رادیان)	۱۲۲	۱۶۰
درس ۲: نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه	۱۲۵	۱۶۱

درس‌نامه تست

درس ۳: دایره مثلثاتی و علامت نسبت‌های مثلثاتی

درس ۳: دایره مثلثاتی و علامت نسبت‌های مثلثاتی	۱۲۹	۱۶۵
درس ۴: اتحادهای اولیه	۱۳۳	۱۶۸
درس ۵: زاویه‌های ترکیبی	۱۳۶	۱۷۱
درس ۶: کمان‌های 2α	۱۳۹	۱۷۲
درس ۷: تابع متناوب	۱۴۳	۱۷۶
درس ۸: رسم نمودار توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس		
درس ۹: تانژانت	۱۴۹	۱۸۲
درس ۱۰: معادله مثلثاتی	۱۵۴	۱۸۶

فصل سوم: حد و پیوستگی

فصل ۶ ریاضی یازدهم - فصل ۳ ریاضی دوازدهم

درس ۱: تقسیم چندجمله‌ای‌ها	۱۹۲	۲۳۰
درس ۲: همسایگی	۱۹۴	۲۳۰
درس ۳: فرایندهای حدی و قوانین محاسبه حد	۱۹۵	۲۳۱
درس ۴: رفع ابهام صفرصفرم ($\frac{0}{0}$)	۲۰۵	۲۳۶
درس ۵: حد بی‌نهایت	۲۱۲	۲۴۴
درس ۶: حد در بی‌نهایت	۲۱۸	۲۴۸
درس ۷: پیوستگی	۲۲۳	۲۵۴

فصل چهارم: مشتق

فصل ۴ ریاضی دوازدهم

درس ۱: آشنایی با مفهوم مشتق	۲۶۰	۲۹۳
درس ۲: قواعد مشتق‌گیری	۲۶۴	۲۹۵

درس‌نامه	تست
درس ۵: پیشامدهای مستقل ۴۰۱	۴۱۴
درس ۶: قانون احتمال کل ۴۰۲	۴۱۶
فصل هشتم: معادله درجه دو و سهمی فصل ۴ ریاضی دهم - فصل ۱ ریاضی یازدهم	
درس ۱: معادله درجه دوم ۴۲۰	۴۳۴
درس ۲: سهمی ۴۲۸	۴۴۰
فصل نهم: معادله، نامعادله و تعیین علامت فصل ۱ ریاضی دهم	
درس ۱: معادلات گویا ۴۴۸	۴۶۰
درس ۲: معادلات رادیکالی ۴۵۰	۴۶۱
درس ۳: تعیین علامت و نامعادله ۴۵۱	۴۶۳
درس ۴: معادلات و نامعادلات قدرمطلق ۴۵۶	۴۶۶
فصل دهم: هندسه تحلیلی فصل ۱ ریاضی یازدهم	
درس ۱: یادآوری و تکمیل معادله خط ۴۶۹	۴۷۷
درس ۲: فاصله‌ها - نقطه وسط پاره خط ۴۷۲	۴۷۸
فصل یازدهم: توابع نمایی و لگاریتمی فصل ۵ ریاضی یازدهم	
درس ۱: تابع نمایی ۴۸۵	۴۹۵
درس ۲: تابع لگاریتمی ۴۸۸	۴۹۷
درس ۳: ویژگی‌های لگاریتم ۴۹۰	۵۰۰
درس ۴: معادلات لگاریتمی ۴۹۲	۵۰۳
درس ۵: کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی ۴۹۳	۵۰۵
فصل دوازدهم: توان‌های گویا و عبارتهای جبری فصل ۳ ریاضی دهم	
درس ۱: توان و ریشه ۵۰۷	۵۱۵
درس ۲: رادیکال و توان‌های گویا ۵۰۹	۵۱۶

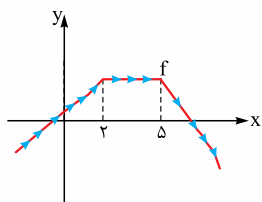
درس‌نامه	تست
درس ۳: قواعد مشتق‌گیری با چشم‌های باز (عامل صفرشونده - ساده‌کردن) ۲۶۹	۳۰۰
درس ۴: معادله خط مماس بر منحنی ۲۷۳	۳۰۳
درس ۵: مشتق چپ و راست - مشتق‌گیری در حضور براکت و قدرمطلق ۲۷۶	۳۰۵
درس ۶: مشتق‌پذیری (در نقطه و بازه) ۲۷۹	۳۰۸
درس ۷: دامنه و نمودار تابع مشتق ۲۸۵	۳۱۲
درس ۸: مشتق تابع مرکب ۲۸۸	۳۱۴
درس ۹: آهنگ تغییر ۲۹۱	۳۱۷
فصل پنجم: کاربرد مشتق فصل ۵ ریاضی دوازدهم	
درس ۱: بررسی یکنوایی تابع به کمک مشتق ۳۲۱	۳۴۰
درس ۲: نقطه بحرانی ۳۲۴	۳۴۲
درس ۳: اکسترم‌های نسبی ۳۲۸	۳۴۴
درس ۴: اکسترم‌های مطلق ۳۳۳	۳۴۸
درس ۵: بهینه‌سازی ۳۳۵	۳۵۰
فصل ششم: هندسه (تفکر تجسمی و ...) فصل ۶ ریاضی دوازدهم	
درس ۱: تفکر تجسمی (برش و دوران) ۳۵۵	۳۷۷
درس ۲: بیضی ۳۶۲	۳۸۱
درس ۳: دایره ۳۶۷	۳۸۴
فصل هفتم: احتمال فصل ۷ ریاضی دهم - فصل ۷ ریاضی یازدهم - فصل ۷ ریاضی دوازدهم	
درس ۱: فضای نمونه‌ای و پیشامد ۳۹۰	۴۰۵
درس ۲: احتمال رخداد یا پیشامد ۳۹۲	۴۰۶
درس ۳: قوانین احتمال ۳۹۶	۴۱۰
درس ۴: احتمال شرطی ۳۹۸	۴۱۱

درس‌نامه	تست
درس ۳: ترکیب ۵۶۰	۵۷۱
درس ۴: جایگشت با حضور اشیای تکراری ۵۶۵	۵۷۴
فصل شانزدهم: آمار فصل ۷ ریاضی دهم - فصل ۷ ریاضی یازدهم	
درس ۱: مقدمه‌ای بر علم آمار ۵۷۷	۵۸۷
درس ۲: شاخص‌های مرکزی ۵۷۸	۵۸۷
درس ۳: شاخص‌های پراکندگی ۵۸۱	۵۸۹
فصل هفدهم: هندسه فصل ۲ ریاضی یازدهم	
درس ۱: ترسیم‌های هندسی ۵۹۴	۶۰۹
درس ۲: استدلال ۵۹۷	۶۱۱
درس ۳: نسبت و تناسب - قضیه تالس ۵۹۸	۶۱۱
درس ۴: تشابه مثلث‌ها ۶۰۱	۶۱۵
درس ۵: نسبت مساحت‌ها ۶۰۴	۶۱۷
درس ۶: روابط طولی مثلث قائم‌الزاویه ۶۰۶	۶۲۰
پاسخ‌نامه کلیدی	۶۲۳

درس‌نامه	تست
درس ۳: اتحادها و تجزیه ۵۱۰	۵۱۷
درس ۴: گویاکردن مخرج کسرها ۵۱۴	۵۲۰
فصل سیزدهم: مجموعه و بازه فصل ۱ ریاضی دهم	
درس ۱: مجموعه‌های اعداد، بازه، مجموعه‌های متناهی و نامتناهی ۵۲۴	۵۲۹
درس ۲: مجموعه مرجع و متمم ۵۲۶	۵۳۰
درس ۳: تعداد اعضای مجموعه ۵۲۷	۵۳۱
فصل چهاردهم: الگو و دنباله فصل ۱ ریاضی دهم	
درس ۱: الگوهای هندسی ۵۳۴	۵۴۴
درس ۲: دنباله حسابی ۵۳۷	۵۴۶
درس ۳: دنباله هندسی ۵۴۰	۵۴۹
فصل پانزدهم: شمارش، بدون شمردن فصل ۶ ریاضی دهم	
درس ۱: شمارش ۵۵۳	۵۶۷
درس ۲: جایگشت ۵۵۶	۵۶۹

درس ۸: یکنوایی (توابع صعودی و نزولی)

توابع صعودی و نزولی

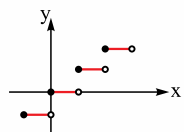


حرکت از چپ به راست

در تابع روبه‌رو اگر روی نمودار تابع از چپ به راست حرکت کنیم، گاهی اوقات y ها در حال افزایش هستند، گاهی اوقات y ها در حال کاهش‌اند و در قسمت‌هایی تابع ثابت می‌شود و عرض نقاط عوض نمی‌شود. هر کدام از این وضعیت‌ها، یک اسمی دارد تا بتوانیم منظورمان را راحت‌تر برسانیم، مثلاً می‌گوییم تابع f در $(-\infty, 2]$ اکیداً صعودی است. بیایید حالت‌های مختلف را در جدول زیر ببینیم:

تعریف فارسی	تعریف ریاضی	مثال
تابع اکیداً صعودی با افزایش x ، y هم افزایش پیدا می‌کند.	$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$	
تابع صعودی با افزایش x ، y زیاد می‌شود یا ثابت می‌ماند.	$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$	
تابع اکیداً نزولی با افزایش x ، y کاهش پیدا می‌کند.	$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$	
تابع نزولی با افزایش x ، y کم می‌شود یا ثابت می‌ماند.	$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$	

آشاره: هر تابع اکیداً صعودی، صعودی هم هست و هر تابع اکیداً نزولی، نزولی نیز به حساب می‌آید. دقت کنید عکس این حرف درست نیست یعنی نمی‌توانیم بگوییم که هر تابع صعودی، اکیداً صعودی است. مثلاً تابع $y = [x]$ فقط صعودی است.



البته تشخیص صعودی یا نزولی بودن از روی نمودار گاهی اوقات به دقت بیشتری احتیاج دارد، نمودارهای زیر را نگاه کنید:

اکیداً صعودی	صعودی	اکیداً نزولی	نزولی

تست: تابع $f(x) = (a-1)x - 2a$ ، هم صعودی است و هم نزولی، کدام جمله درباره این تابع درست است؟

- (۱) f اکیداً صعودی است. (۲) f اکیداً نزولی است. (۳) $f(3) = -2$ (۴) محور x ها را در نقطه‌ای به طول $\frac{2a}{a-1}$ قطع می‌کند.

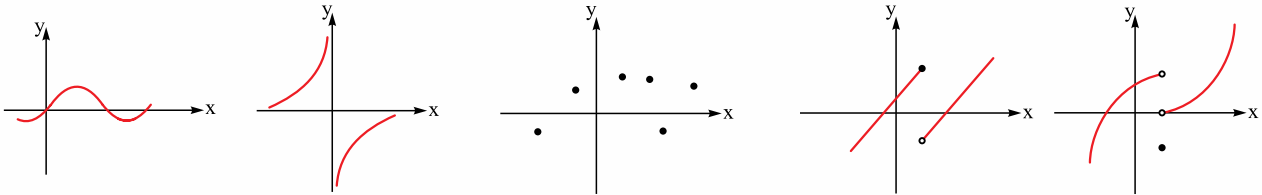
پاسخ ۳: تابع $f(x)$ هم صعودی است و هم نزولی؛ تنها تابعی که این ویژگی را دارد تابع ثابت است. می‌دانیم در تابع ثابت نباید x داشته باشیم پس باید ضریب x یعنی $a-1$ برابر صفر باشد:

$$a-1=0 \Rightarrow a=1 \Rightarrow f(x)=-2$$

حالا برویم سراغ بررسی گزینه‌ها: در تابع $f(x)=-2$ با افزایش x مقادیر y تغییری نمی‌کند، پس f اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی نیست و گزینه‌های ۱ و ۲ حذف می‌شوند. تابع $f(x)=-2$ یک تابع ثابت است، پس $f(3)=-2$ و ۳ درست است. حواسمان باشد که تابع $f(x)=-2$ اصلاً محور x ها را قطع نمی‌کند و ۴ هم نادرست است.

توابع یکنوا و غیریکنوا به تابع‌های صعودی، اکیداً صعودی، نزولی، اکیداً نزولی و ثابت، می‌گوییم: «یکنوا». به تابع‌های اکیداً صعودی و اکیداً نزولی، می‌گوییم: «اکیداً یکنوا».

بعضی تابع‌ها، رفتار یکنوا ندارند، یعنی با افزایش x و حرکت از چپ به راست روی نمودار، y همیشه زیاد یا کم نمی‌شود یا ثابت نمی‌ماند بلکه گاهی افزایش و گاهی کاهش دارد. این تابع‌ها را غیریکنوا می‌نامیم. حالا بگویید چرا نمودارهای زیر غیریکنوا هستند؟



بررسی یکنوایی تابع

۱. یکنوایی در نمایش زوج مرتبی در نمایش زوج مرتبی، x ها را به ترتیب از کم به زیاد می‌چینیم و به y ها نگاه می‌کنیم:

$g = \{(-1, 1), (0, 2), (2, 2), (3, 7)\}$ صعودی است (با افزایش x ، y ها زیاد شده یا ثابت مانده‌اند).

$h = \{(-2, 4), (-1, 2), (0, 1)\}$ اکیداً نزولی است (با افزایش x ، y ها کم شده‌اند).

$k = \{(1, 2), (2, 5), (3, 0)\}$ یکنوا نیست (با افزایش x ، y ها زیاد و کم شده‌اند).

تست: اگر $f = \{(-1, 1), (0, 2a-1), (1, a+5), (2, 7)\}$ اکیداً صعودی باشد، حدود a کدام است؟

$$a < 1 \quad (۴)$$

$$2 < a < 6 \quad (۳)$$

$$1 < a < 2 \quad (۲)$$

$$1 < a < 6 \quad (۱)$$

$$\underbrace{1 < 2a-1}_{a>1} < \underbrace{a+5 < 7}_{a<2} \Rightarrow \underbrace{a < 6}$$

پاسخ ۲: راه اول: خوشبختانه x ها از چپ به راست مرتب هستند، پس y ها باید افزایشی باشند:

بنابراین به ازای $1 < a < 2$ همه شرط‌ها تأمین می‌شوند.

عددگذاری: به ازای $a=2$ تابع $\{(-1, 0), (0, 3), (1, 7), (2, 7)\}$ صعودی است اما اکید نیست پس $a=2$ غلط است. به ازای $a=3$ تابع $\{(-1, 1), (0, 5), (1, 8), (2, 7)\}$ یکنوا نیست. پس $a=3$ هم غلط است. با قراردادن $a=0$ نیز تابع $\{(-1, 1), (0, -1), (1, 5), (2, 7)\}$ یکنوا نیست. پس گزینه‌های ۱، ۳ و ۴ نادرست‌اند.

۲. یکنوایی در نمایش جبری تا قبل از فصل کاربرد مشتق، بهترین راه تعیین یکنوایی تابع، رسم نمودار تابع است، خصوصاً اگر تابع ما دارای قدم‌مطلق یا براکت باشد و یا چندجمله‌ای باشد.

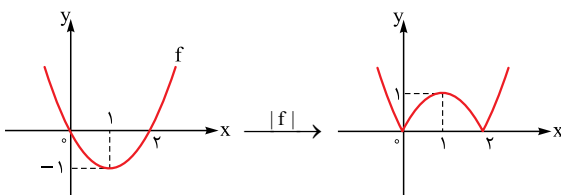
تست: تابع $f(x) = x(x-2)$ و $|f|$ در فاصله $(0, a)$ یکنوا است. اگر a بیشترین مقدار را داشته باشد، مقدار a و وضع تابع در این بازه کدام است؟

$$۲، نزولی \quad (۴)$$

$$۱، نزولی \quad (۳)$$

$$۲، صعودی \quad (۲)$$

$$۱، صعودی \quad (۱)$$



پاسخ ۱: نمودار $y = x(x-2)$ ریشه‌هایش صفر و ۲ است و نمودارش به راحتی قابل رسم است، یادتان هست که برای رسم $|f|$ باید قسمت‌های زیر محور x ها را نسبت به محور x ها قرینه می‌کردیم:

حالا با توجه به نمودار در فاصله $(0, 1)$ اکیداً صعودی است پس $a=1$ است.

خاطره: رأس سهمی دقیقاً در وسط دو ریشه‌اش قرار دارد.

اگر در تست، فقط صحبت از یکنوا بودن و نبودن گزینه‌ها باشد، یکی از بهترین کارها، عددگذاری و استفاده از مفهوم یکنوایی است، تست زیر را ببینید:

تست: کدام تابع اکیداً صعودی است؟

$$y = x|x| \quad (۴)$$

$$y = \frac{|x|}{x} \quad (۳)$$

$$y = x - [x] \quad (۲)$$

$$y = [x] \quad (۱)$$

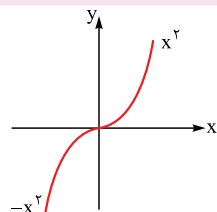
پاسخ ۴: گزینه‌ها رو بررسی می‌کنیم:

۱ اگر $x_1 = 0/1$ و $x_2 = 0/7$ را قرار دهیم، $y_1 = y_2 = 0$ می‌شود، پس تابع اکیداً صعودی نیست.

۲ اگر $x_1 = 2$ و $x_2 = 5$ باشند، $y_1 = y_2 = 0$ می‌شود، یعنی تابع اکیداً صعودی نیست.

۳ به ازای تمام x های مثبت مقدار تابع برابر ۱ است، یعنی تابع ثابت می‌شود و در نتیجه اکیداً صعودی نیست.

پس ۴ درست است، نمودارش را هم ببینیم:



در تابع‌های چندضابطه‌ای، بعضی وقت‌ها باید مقدار مجهول را طوری انتخاب کنیم که تابع مثلاً اکیداً صعودی شود. این تست را ببینید:

تست: اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 2 \\ x + a & x < 2 \end{cases}$ اکیداً صعودی باشد، حدود a کدام است؟

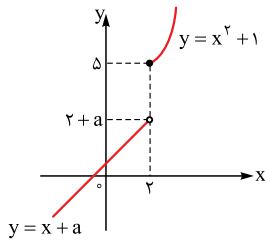
$a \leq 0$ (۴)

$a \leq 1$ (۳)

$a \leq 3$ (۲)

$a \leq 2$ (۱)

پاسخ ۲: شکل را ببینید:



برای $y = x^2 + 1$ یا بیشتر، قسمتی از شاخه سمت راست سهمی را نشان می‌دهد که در $x = 2$ ، عرض آن ۵ است و در ادامه، اکیداً صعودی است.
خطی با شیب ۱ است که در $x = 2$ مقدار نهایی آن $2 + a$ است.
حالا با توجه به شکل و اکیداً صعودی بودن تابع باید $2 + a \leq 5$ باشد، پس $a \leq 3$.

بررسی یکنوایی توابع خاص

الف. توابع معروف همواره یکنوا

بعضی توابعی که بلدیم همواره یکنوا هستند، توابعی مانند $y = \sqrt{x}$ و $y = x^3$ اکیداً صعودی هستند و یا تابع $y = [x]$ صعودی است و ... در بین این تابع‌ها، توابع خطی، $\sqrt{ax + b}$ ، نمایی و لگاریتمی در تست‌ها بیشتر مورد توجه هستند، نکات این سه تابع را خیلی جمع‌وجور در جدول زیر می‌بینیم:

تابع	یکنوایی	نمودار
تابع خطی $f(x) = ax + b$	اگر $a > 0$ باشد، اکیداً صعودی و اگر $a < 0$ باشد، اکیداً نزولی است.	
$f(x) = \sqrt{ax + b}$	اگر $a > 0$ باشد، اکیداً صعودی و اگر $a < 0$ باشد، اکیداً نزولی است.	
$y = a^x$	اگر $a > 1$ باشد، اکیداً صعودی و اگر $0 < a < 1$ باشد، اکیداً نزولی است.	
$y = \log_a x$	اگر $a > 1$ باشد، اکیداً صعودی و اگر $0 < a < 1$ باشد، اکیداً نزولی است.	

تست: اگر $f(x) = \sqrt{(a+2)x+3}$ اکیداً صعودی و $g(x) = (a-1)x-1$ نزولی باشد، حدود a کدام است؟

$[-2, 1]$ (۴)

$[-2, 1]$ (۳)

$[-2, 1)$ (۲)

$(-2, 1)$ (۱)

پاسخ ۳: f اکیداً صعودی است، پس باید ضریب x مثبت باشد: $a+2 > 0$ پس $a > -2$
و g خطی و نزولی است پس باید شیب منفی یا صفر باشد: $a-1 \leq 0$ ، پس $a \leq 1$
دقت کنید که نگفته g اکیداً نزولی است و g می‌تواند ثابت باشد؛ پس داریم: $-2 < a \leq 1$

تست: اگر $f(x) = \left(\frac{m-1}{2}\right)^x$ اکیداً نزولی و $g(x) = \log_{\frac{1}{m}} x$ صعودی باشد، m کدام مقادیر را دارد؟

نشدنی (۴)

$(1, 3)$ (۳)

$(1, 2)$ (۲)

$(2, 3)$ (۱)

پاسخ ۲: f یک تابع نمایی است، برای این که تابع f اکیداً نزولی باشد، باید پایه آن بین صفر و ۱ باشد:

$$0 < \frac{m-1}{2} < 1 \xrightarrow{\times 2} 0 < m-1 < 2 \xrightarrow{+1} 1 < m < 3$$

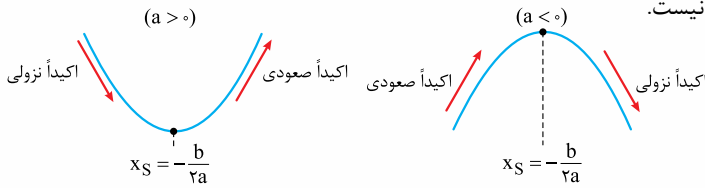
از طرف دیگر در $g(x) = \log_{\frac{1}{m}} x$ برای آن که g صعودی باشد باید پایه لگاریتم از ۱ بیشتر باشد، پس $\frac{1}{m} < 1$ و در نتیجه $0 < m < 2$ و از اشتراک این‌ها $1 < m < 2$.

ب. توابع معروف غیر یکنوا

در بین تابع‌هایی که می‌شناسیم تابع درجه ۲ (سه‌می) و تابع هموگرافیک همواره غیر یکنوا هستند، البته در قسمت‌های محدودی از دامنه ممکن است این تابع‌ها هم یکنوا شوند.

۱. تابع درجه دوم

سه‌می $f(x) = ax^2 + bx + c$ در کل $\mathbb{R}$ یکنوا نیست.



سه‌می رو به بالا قبل از رأس یعنی قبل از $x = -\frac{b}{2a}$ اکیداً نزولی و پس از آن اکیداً صعودی است. در سه‌می رو به پایین برعکس است. یعنی قبل از رأس اکیداً صعودی و بعد از رأس اکیداً نزولی می‌شود:

مثلاً $y = x^2 - 4x - 1$ سه‌می رو به بالا با رأس در $x = -\frac{-4}{2} = 2$ است، پس در فاصله $(-\infty, 2)$ و هر زیرمجموعه از آن، اکیداً نزولی و در فاصله $(2, +\infty)$ و هر زیرمجموعه‌ای آن اکیداً صعودی است.

نکته: سه‌می در هر بازه‌ای که رأس سه‌می درون آن بازه باشد (یعنی سر و ته بازه هم نباشد!)، غیر یکنوا است.

تست: اگر $f(x) = -x^2 + 3x$ در $(-\infty, a)$ اکیداً یکنوا باشد، بیشترین مقدار a کدام است؟

- ۱) ۳ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ ۲: گفتیم سه‌می در $(-\infty, x_S)$ و هم‌چنین $(x_S, +\infty)$ اکیداً یکنوا است. پس حداکثر a همان x_S است:

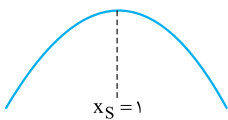
$$x_S = \frac{-(-3)}{2(-1)} = \frac{3}{2}$$

گاهی اوقات باید به کلمه‌ها و قیده‌های صورت سؤال خیلی دقت کنیم. تست زیر را ببینید:

تست: اگر $y = ax^2 + (a^2 - 3)x$ فقط در $(1, +\infty)$ نزولی باشد، a کدام است؟

- ۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۱ ۴) -۱

پاسخ ۲: این‌که گفته فقط در $(1, +\infty)$ نزولی است؛ یعنی سه‌می باید این شکلی باشد:



پس داریم: $a^2 - 3 = -2a \Rightarrow a^2 + 2a - 3 = 0$ جمع ضرایب صفر است $\Rightarrow a = 1$ یا $a = -3$. حالا دقت کنیم که سه‌می باید رو به پایین باشد، پس $a < 0$ است؛ پس فقط $a = -3$ قابل قبول است.

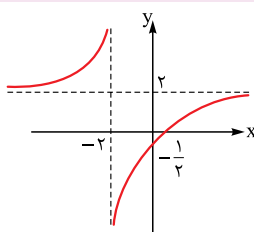
۲. تابع هموگرافیک تابع‌های هموگرافیک $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ به طور کلی غیر یکنوا هستند، اما قبل و بعد از ریشه‌ی مخرج یکنوا هستند. ببینید:

ریشه‌ی مخرج: $-\frac{d}{c}$	ریشه‌ی مخرج: $-\frac{d}{c}$
۱) تک‌تک شاخه‌های نمودار صعودی اکید هستند. ۲) تابع در $(-\infty, -\frac{d}{c})$ و در $(-\frac{d}{c}, +\infty)$ اکیداً صعودی است. ۳) در کل دامنه‌اش غیر یکنوا است.	۱) تک‌تک شاخه‌های نمودار اکیداً نزولی‌اند. ۲) تابع در $(-\infty, -\frac{d}{c})$ و در $(-\frac{d}{c}, +\infty)$ اکیداً نزولی است. ۳) در کل دامنه‌اش غیر یکنوا است.

تست: تابع با ضابطه $y = \frac{2x-1}{x+2}$ در کدام بازه، یکنوا است؟ نوع یکنوایی کدام است؟

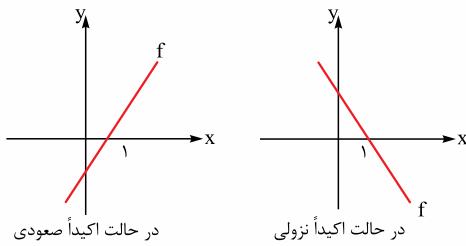
- ۱) $(-\infty, 0)$ ، نزولی ۲) $(-2, 4)$ ، نزولی ۳) $(-2, 4)$ ، صعودی ۴) $(-\infty, 0)$ ، صعودی

پاسخ ۳: دیدیم که مشکل در محل ریشه‌ی مخرج است، پس الان این تابع در $x = -2$ پرش خواهد کرد و باید بازه‌ای را انتخاب کنیم که شامل -۲ نباشد، پس گزینه‌های ۱ و ۲ رد می‌شوند. برای تعیین صعودی یا نزولی بودن باید نمودار را ببینیم: تابع در $(-\infty, -2)$ و نیز در $(-2, +\infty)$ اکیداً صعودی است.



خاطره: اگر رسم شکل هموگرافیک یادتان رفته، نگاهی به قسمت‌های قبلی داشته باشید.

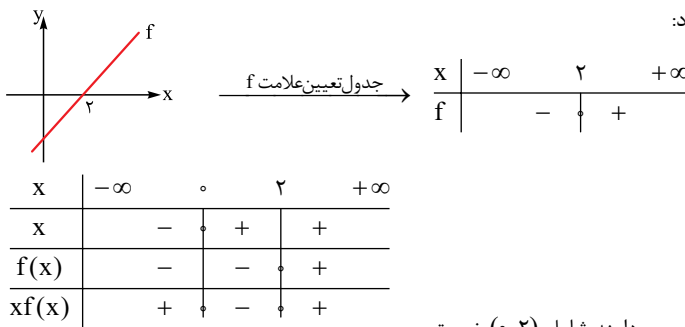
نکته: بعداً در فصل کاربرد مشتق، خواهیم دید که در تابع هموگرافیک، اگر $ad - bc > 0$ باشد، شاخه‌هایش صعودی و اگر $ad - bc < 0$ باشد، شاخه‌هایش نزولی است (حواستان هست که اگر $ad - bc = 0$ باشد، تابع دیگر هموگرافیک نیست!)



یک تیپ مهم یک مدل سؤال هم سال‌ها قبل در کنکور آمد که هنوز پس‌لرزه‌هایش دیده می‌شود. مثلاً می‌گوید f تابعی اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی با دامنه $\mathbb{R}$ است و $f(1) = 0$ ، کلید حل تست این است که نمودار f را به شکل روبه‌رو رسم کنیم:

این تست را ببینید:

تست: f تابعی اکیداً صعودی با دامنه $\mathbb{R}$ است که محور x را با طول ۲ قطع می‌کند. دامنه $y = \sqrt{xf(x)}$ شامل کدام نیست؟
 (۱) $(0, 2)$ (۲) $(-\infty, 0)$ (۳) $(2, +\infty)$ (۴) $\emptyset$



پاسخ: گفتیم معنی صورت سؤال این است که نمودار تابع این شکلی می‌شود:

و می‌توانیم $xf(x)$ را تعیین علامت کنیم:

یعنی دامنه $\sqrt{xf(x)}$ به صورت $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ یا $\mathbb{R} - (0, 2)$ است. پس دامنه شامل $(0, 2)$ نیست.

یکنواپی و نامساوی‌ها گفتیم:

$x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$	اگر f صعودی اکید باشد
$x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$	اگر f نزولی اکید باشد

حالا از این جهت به موضوع نگاه کنید که اگر تابع f اکیداً صعودی باشد و آن را از دو طرف نامساوی حذف کنیم، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند. اما وقتی f اکیداً نزولی است، با حذف آن از دو طرف جهت نامساوی تغییر می‌کند. مثلاً:

$$f(a-1) > f(3-a) \xrightarrow[\text{است.}]{\text{اگر اکیداً صعودی}} a-1 > 3-a \quad (\text{جهت تغییر نکرد})$$

$$f(6x+1) > f(x^2-3) \xrightarrow[\text{است.}]{\text{اگر اکیداً نزولی}} 6x+1 < x^2-3 \quad (\text{جهت تغییر کرد})$$

تست: اگر $f(a^2+1) < f(3a-1)$ و تابع f اکیداً نزولی باشد، a چند مقدار صحیح را اختیار نمی‌کند؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

پاسخ: ۳: خب تابع f اکیداً نزولی است، پس جهت نامساوی تغییر می‌کند:

$$a^2+1 > 3a-1 \Rightarrow a^2-3a+2 > 0$$

$$\xrightarrow[\text{صفر است}]{\text{جمع ضرایب}} a^2-3a+2 > 0 \Rightarrow a < 1 \text{ یا } a > 2$$

پس a نمی‌تواند ۱ یا ۲ باشد و دو مقدار صحیح را نمی‌پذیرد.

یکنواپی توابع kf , $f \pm g$, $f \times g$ و $\frac{f}{g}$

۱ اگر $f(x)$ صعودی باشد، با استفاده از خواص نامساوی می‌توانیم نشان دهیم که $kf(x)$ برای $k > 0$ صعودی و برای $k < 0$ نزولی است. مثلاً با توجه به صعودی بودن $\sqrt{x}$ ، مطمئن هستیم $\sqrt{x}$ و $2\sqrt{x}$ نیز صعودی‌اند و $-\sqrt{x}$ و $-3\sqrt{x}$ نزولی‌اند.

۲ اگر f و g هر دو صعودی باشند، $f+g$ نیز صعودی است و در مورد $f \times g$ ، $\frac{f}{g}$ و $f-g$ حکم قطعی نمی‌توان داد.

مثلاً چون $\sqrt[3]{x}$ و $2\sqrt[3]{x}$ صعودی‌اند، تابع $\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x}$ نیز صعودی است. به عنوان مثال مهم‌تر، $[x]$ صعودی و x نیز صعودی اکید است، پس $x + [x]$ صعودی اکید است.

۳ اگر در دو تابع صعودی که با هم جمع می‌شوند، حداقل یکی صعودی اکید باشد، مجموع آن‌ها هم صعودی اکید است.

اشاره: این حرف‌ها در حالتی که توابع نزولی باشند هم درست است. مثلاً $(\frac{1}{p})^x$ و $-x$ هر دو نزولی هستند. پس $-x + (\frac{1}{p})^x$ نیز نزولی است.

۴ اگر f صعودی و g نزولی باشد، $f-g$ صعودی و $g-f$ نزولی است.

تست: کدام تابع نزولی است؟

(۱) $-2x + \frac{1}{x}$ (۲) $(\frac{1}{2})^x + 2^x$ (۳) $\log_{5/4} x + x^2$ (۴) $-\sqrt{x} + \frac{1}{x}$

پاسخ: ۱ $-2x$ نزولی و $\frac{1}{x}$ غیریکنوا است. پس برای $-2x + \frac{1}{x}$ نظری نداریم.

۲ $(\frac{1}{2})^x$ نزولی و 2^x صعودی است و از مجموع آن‌ها خبر نداریم.

۳ $\log_{5/4} x$ نزولی است و ما را مجبور می‌کند فقط $x > 0$ باشد، برای این x ‌های مثبت x^2 اکیداً صعودی است. پس در مورد مجموع آن‌ها حرفی نمی‌شود زد.

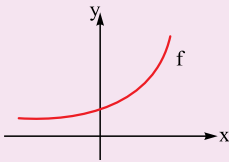
اما در ۴ $-\sqrt{x}$ نزولی است و x ‌های مثبت را قبول می‌کند، $\frac{1}{x}$ هم برای $x > 0$ نزولی است. پس جمع دو تابع نزولی را داریم که نزولی است.

یکنوایی ترکیب توابع

در مورد یکنوایی تابع‌های مرکب برای صعودی‌ها $\oplus$ و برای نزولی‌ها $\ominus$ بگذارید و علامت‌ها را در هم ضرب کنید. در مورد تابع مرکب $f \circ g$ و $g \circ f$ مثل هم (هر دو صعودی $\oplus$ یا هر دو نزولی $\ominus$) باشند تابع مرکب صعودی می‌شود ($\ominus \ominus = \oplus$, $\oplus \oplus = \oplus$) و اگر f و g متفاوت باشند (یکی صعودی و یکی نزولی) تابع مرکب نزولی است ($\ominus \oplus = \ominus$).

مثلاً چون $f(x) = x^3 + 1$ صعودی و $g(x) = -2x + 5$ نزولی هستند، توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ صعودی‌اند (از ترکیب دو تابع مثل هم ساخته شده‌اند) و تابع‌های $f \circ g$ و $g \circ f$ نزولی‌اند. از این‌ها جالب‌تر در مثال بالا، $f(3x-1)$ صعودی است (چون f و $3x-1$ صعودی‌اند) و $g(1+2^x)$ نزولی است (چون g نزولی و $1+2^x$ صعودی است).

تست: شکل روبه‌رو نمودار f است. کدام تابع از نظر یکنوایی با بقیه فرق دارد؟



(۱) $f(x^3 + x)$ (۲) $-f(-x)$

(۳) $f(3x+1)$ (۴) $\frac{1}{f(x)}$

پاسخ: ۱ f اکیداً صعودی است و $x^3 + x$ هم که از جمع دو تابع اکیداً صعودی تشکیل شده است، اکیداً صعودی است، پس ترکیب آن‌ها هم اکیداً صعودی است. ۲ $-f(-x)$ هم‌چنین $f(-x)$ نزولی است و $-f(-x)$ صعودی است. ۳ $f(3x+1)$ اکیداً صعودی هستند پس ترکیب آن‌ها هم اکیداً صعودی است. حالا برای ۴ دقت می‌کنیم که f صعودی است و مقادیر مثبت دارد. پس در $\frac{1}{f(x)}$ ، مخرج در حال زیاد شدن است و کل تابع کاهش می‌یابد؛ یعنی $\frac{1}{f}$ نزولی است (قرینه تابع صعودی، نزولی است).

درس ۹: تابع یک‌به‌یک

تابع f وقتی یک‌به‌یک است که برای هر x از دامنه، یک y منحصره‌فرد داشته باشد. پس باید خروجی‌ها تکراری نباشند. مثلاً تابعی که به هر کس کد ملی او را نسبت می‌دهد یک‌به‌یک است؛ چون کد ملی هیچ دو نفری مثل هم نیست. اما تابعی که به هر کس نام کوچک پدر او را نسبت می‌دهد یک‌به‌یک نیست؛ چون نام پدر خیلی‌ها یکسان است. در جدول زیر نمایش زوج مرتبی، پیکانی و نموداری توابع یک‌به‌یک را می‌بینیم:

انواع نمایش تابع	توضیحات	مثال
نمایش زوج مرتبی	در تمام زوج‌های مرتب، مؤلفه‌های دوم متمایز باشند. اگر دوتا زوج مرتب با y یکسان دیدیم، باید x ‌های آن‌ها هم یکی باشند. یعنی: $x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2$	یک‌به‌یک است. $\{(1,3), (2,5), (3,8)\}$ یک‌به‌یک نیست. $\{(1,2), (2,4), (3,2), (4,6)\}$
نمایش پیکانی	باید به هر عضو از مجموعه دوم، حداکثر یک فلش وارد شود. تعداد اعضای برد = تعداد اعضای دامنه.	یک‌به‌یک نیست. (دو فلش به عدد ۲ وارد شده است.) یک‌به‌یک است.
نمایش نموداری	هیچ خط افقی نمودار را در ۲ نقطه یا بیشتر قطع نکند.	یک‌به‌یک نیست. یک‌به‌یک است.

۴۴۰- اگر $f(x) = [3x+1] - 3[x]$ و $g(x) = x^2 - 2bx + c$ ، آن گاه برد تابع gof دوعضوی خواهد بود. مجموع کمترین و بیشترین مقدار b کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶ (آزمون ریاضی پلاس خیلی سبز)

(ریاضی خارج ۱۴۰۰)

۴۴۱- فرض کنید $f(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ x & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$ و $g(x) = 1 - x^2$. ماکزیمم مقدار تابع $\text{gof} - \text{fog}$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

۴۴۲- اگر $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ و $g(x) = \frac{1+x^2}{x^2}$ ، آن گاه برد تابع gof کدام است؟

- (۱) $(-\infty, 2]$ (۲) $(1, 2]$ (۳) $[1, 2)$ (۴) $(-\infty, 2)$

۴۴۳- اگر $f(x) = \sqrt{2x-x^2}$ و $g(x) = x + \frac{1}{x}$ باشند، تابع fog به ازای چند مقدار صحیح قابل تعریف است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

(مثل کنگور)

۴۴۴- اگر $f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$ و $g(x) = 2 + \sqrt{2x}$ ، برد تابع gof کدام است؟

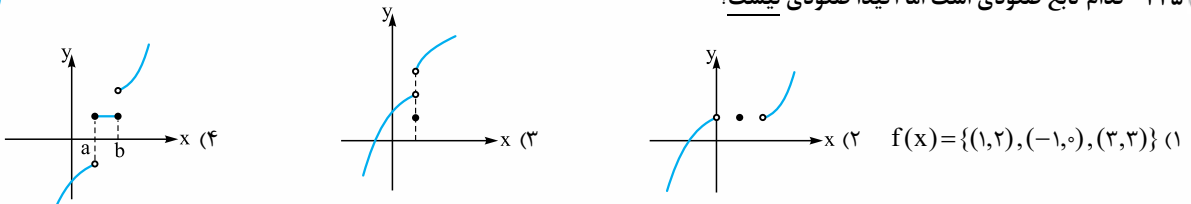
- (۱) $(0, 2]$ (۲) $[0, 2]$ (۳) $[2, 3]$ (۴) $(2, 3]$

درس ۸: یکنوایی (توابع صعودی و نزولی)

بررسی یکنوایی تابع

(کتاب درسی)

۴۴۵- کدام تابع صعودی است اما اکیداً صعودی نیست؟



(تجربی ۱۴۰۲)

۴۴۶- تابع $f(x) = mx^2 - nx - k$ در هر بازه، هم صعودی و هم نزولی است. اگر مجموعه زیر، تابع باشد، مقدار $f(\sqrt{5})$ کدام است؟

$\{(m, n-1), (0, k), (n-1, m^2 + 2m-1), (3k+2, 2k+1)\}$

- (۱) -۱ (۲) $-\sqrt{5}$ (۳) ۱ (۴) $\sqrt{5}$

۴۴۷- اگر $f = \{(1, 3a+1), (-1, a+1), (2, 4a+3)\}$ تابعی صعودی باشد، مقادیر a در کدام بازه است؟

- (۱) $(-\infty, 0]$ (۲) $(-\infty, 0)$ (۳) $(0, +\infty)$ (۴) $[0, +\infty)$

(تجربی ۱۴۰۱)

۴۴۸- تابع $f(x) = (-9+k^2)x^2 + 5$ اکیداً نزولی است. مجموع مقادیر صحیح k ، چه قدر است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۶

۴۴۹- تابع اکیداً نزولی با ضابطه $f(x) = ax^2 + bx^2 + cx + d$ از مبدأ مختصات گذشته و در نقطه $(2, -1)$ واقع بر آن، بر خطی موازی با محور طولها

مماس است. ریشه معادله $f(x) = 7$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۶ (۳) ۲ (۴) -۶

(کتاب درسی)

۴۵۰- کدام یک از توابع زیر در دامنه خود اکیداً صعودی نیست؟

(۱) $f(x) = \frac{|x|}{x} + x$ (۲) $f(x) = 2 - |x-1|$ (۳) $f(x) = 2x - |x-1|$ (۴) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \leq 0 \\ x^2 - 1 & x > 0 \end{cases}$

۴۵۱- تابع $f(x) = \begin{cases} -2 & x > 1 \\ k & x = 1 \\ +1 & x < 1 \end{cases}$ به ازای چند مقدار صحیح k ، در دامنه اش نزولی است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

(مثل کنگور)

۴۵۲- تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ 3x + a & x < 0 \end{cases}$ بر دامنه اش اکیداً صعودی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) -۲

۴۵۳- اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq -1 \\ g(x) & x > -1 \end{cases}$ تابعی نزولی باشد، ضابطه g کدام می‌تواند باشد؟

(۱) $y = |x|$ (۲) $y = -x^2$ (۳) $y = -|x| - x$ (۴) $y = x + |x|$

(مثل نکتور)

۴۵۴- یکنوایی تابع $f(x) = x|x| + \frac{x}{|x|}$ در دامنه $\{-1, 1\}$ چگونه است؟

(۱) صعودی (۲) نزولی (۳) ابتدا صعودی سپس نزولی (۴) ابتدا نزولی سپس صعودی

(تجربی ۱۴۰۳)

۴۵۵- تابع $y = (x-1)|x|$ در بازه (a, b) اکیداً نزولی است. مقدار $a+b$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{3}{4}$

(تجربی ۹۸)

۴۵۶- تابع با ضابطه $f(x) = |x+2| + |x-1|$ در کدام بازه اکیداً نزولی است؟

(۱) $(-\infty, -2)$ (۲) $(-\infty, 1)$ (۳) $(-2, 1)$ (۴) $(1, +\infty)$

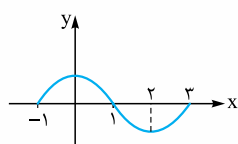
(تجربی خارج ۹۸)

۴۵۷- تابع با ضابطه $f(x) = |x+1| - |x-2|$ در کدام بازه، اکیداً صعودی است؟

(۱) $(-\infty, 2)$ (۲) $(-1, +\infty)$ (۳) $(-1, 2)$ (۴) $(2, +\infty)$

۴۵۸- شکل مقابل نمودار تابع $y = f(x)$ است. نمودار تابع $y = f(1-x)$ در کدام فاصله اکیداً نزولی است؟

(۱) $(-3, -1)$ (۲) $[-4, -3]$ (۳) $(-1, 1)$ (۴) $[1, 2]$



۴۵۹- اگر f تابعی همانی و $g(x) = \begin{cases} x.f(2x-4) & x \geq 0 \\ (1-2x).f(2x) & x < 0 \end{cases}$ باشد، آن گاه مجموعه مقادیر تابع g در بزرگ‌ترین بازه‌ای که این تابع در آن نزولی می‌باشد، کدام است؟

(مثل نکتور)

(۱) $[-1, 0]$ (۲) $[1, 2]$ (۳) $[-2, 0]$ (۴) $[0, 2]$

(مثل نکتور)

۴۶۰- بزرگ‌ترین بازه $[a, 1]$ است که تابع $f(x) = x|x-b|$ در آن نزولی است. حاصل $a+b$ کدام است؟

(۱) $1/5$ (۲) 2 (۳) 3 (۴) صفر

۴۶۱- اگر تابع با ضابطه $f(x) = mx + \sqrt{4x^2 - 20x + 25}$ بر مجموعه اعداد حقیقی اکیداً یکنوا باشد، آن گاه چند مقدار صحیح برای m قابل قبول نیست؟

(۱) 4 (۲) 5 (۳) 6 (۴) 7 (آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز)

۴۶۲- تابع با ضابطه $f(x) = x^2|x| + 3x^2 + 3|x| + 1$ روی بازه $(-k^2, 2k-1)$ یکنوا نیست. مقدار حقیقی k متعلق به کدام مجموعه است؟

(۱) $(2, +\infty)$ (۲) $(-2, 2)$ (۳) $(\frac{1}{2}, 2)$ (۴) $(-\infty, -2)$ (آزمون ریاضی پلاس خیلی سبز)

بررسی یکنوایی توابع خاص

(کتاب درسی)

۴۶۳- چندتا از توابع $y = \sqrt{1-x}$ و $y = \log_{1/5} \sqrt[3]{x}$ ، $y = 2^{-x}$ اکیداً صعودی هستند؟

(۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) صفر

۴۶۴- به ازای چند مقدار صحیح m ، تابع $f(x) = (\frac{3m+1}{4})^x$ نزولی است؟

(۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) هیچ مقدار m

۴۶۵- اگر تابع $f(x) = (a^2 - 3)^x$ در $\mathbb{R}$ هم صعودی و هم نزولی باشد، تابع $g(x) = a^x$ چگونه است؟

(۱) ابتدا صعودی سپس نزولی (۲) ابتدا نزولی سپس صعودی (۳) اکیداً صعودی (۴) اکیداً نزولی

۴۶۶- تابع $f(x) = \log_{1/5} x^2$ از نظر یکنوایی چگونه است؟

(۱) صعودی (۲) نزولی (۳) نه صعودی، نه نزولی (۴) هم صعودی، هم نزولی

۴۶۷- تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2x - 3$ با دامنه $\{x : |x-1| < 2\}$ همواره چگونه است؟

(۱) نزولی (۲) مثبت (۳) صعودی (۴) منفی

(کتاب درسی)

۴۶۸- اگر تابع $f(x) = (\frac{1}{m})x^2 - x + 3$ در بازه $[1, +\infty)$ اکیداً صعودی باشد، محدوده m کدام است؟

(۱) $-2 \leq m < 0$ (۲) $0 < m \leq 2$ (۳) $m \leq -2$ (۴) $m \geq 2$

۴۶۹- تابع $f(x) = x^2 - (2m+1)x + 1$ در بازه $[-1, 2]$ غیر یکنوا است. بازه m کدام است؟

(۱) $-1 \leq m \leq \frac{1}{2}$ (۲) $-1 < m < \frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{3}{2} < m < \frac{3}{2}$



(مثل کنکور)

۴۷۰- اگر $f(x) = \begin{cases} x+3 & x < 0 \\ g(x) + (x-1)^2 & x \geq 0 \end{cases}$ یک تابع اکیداً یکنوا باشد، ضابطه تابع خطی g کدام می تواند باشد؟

(۱) $g(x) = 3x + 1$ (۲) $g(x) = 2x + 3$ (۳) $g(x) = 4x + 1$ (۴) $g(x) = x + 2$

۴۷۱- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + mx + m & x \geq -1 \\ 2x + m & x < -1 \end{cases}$ روی دامنه اش اکیداً صعودی باشد و به ازای بیشترین مقدار m داشته باشیم $f(\alpha) = 7$ ، مقدار α کدام است؟

(مثل کنکور)

(۱) -4 (۲) 1 (۳) 2 (۴) -1

۴۷۲- تابع $f(x) = \frac{1}{|x|}$ مفروض است. در کدام یک از بازه های زیر برای هر x_1 و x_2 عضو این بازه رابطه $f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2$ برقرار است؟

(۱) $(-3, -1)$ (۲) $(-2, 0)$ (۳) $(-1, 1)$ (۴) $(0, 1)$

۴۷۳- اگر در بازه $(1, +\infty)$ تابع $f(x) = \frac{x+1}{2x-a}$ اکیداً یکنوا باشد، حدود a کدام است؟

(۱) $(-\infty, 2)$ (۲) $(-\infty, 2]$ (۳) $(-\infty, 2) - \{-2\}$ (۴) $(-\infty, 2] - \{-2\}$

۴۷۴- روی مجموعه $\mathbb{R}$ تابع $f(x) = (a^2 - 4)x^2 + ax + 1$ اکیداً نزولی و تابع $g(x) = \frac{2x-5}{bx+1}$ اکیداً صعودی است. تابع $f + g$ چگونه تابعی است؟

(آزمون های آزمایشی خیلی سبز)

(۱) همانی (۲) ثابت (۳) اکیداً صعودی (۴) اکیداً نزولی

۴۷۵- تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است. اگر $f(3) = 0$ باشد، دامنه $g(x) = \sqrt{x^2 f(x)}$ شامل چند عدد صحیح نامنفی است؟

(تجربی خارج ۱۴۰۱)

(۱) صفر (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

۴۷۶- اگر f تابعی اکیداً صعودی و $f(2) = 0$ باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{(x^2 - x)f(x)}$ شامل چند عدد طبیعی نیست؟

(مثل کنکور)

(۱) صفر (۲) 1 (۳) 2 (۴) 3

۴۷۷- اگر f یک تابع اکیداً صعودی و g تابعی اکیداً نزولی باشند، به طوری که $f(0) = 0$ و $g(3) = 1$ ، آن گاه چند عدد صحیح در دامنه تابع $y = \log_x \frac{g(x)-1}{f(x)}$

(مثل کنکور)

قرار دارند؟

(۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

۴۷۸- اگر تابع f اکیداً صعودی و $f(1+a) > f(3-2a)$ باشد، بزرگ ترین مقدار صحیح a کدام است؟

(۱) 1 (۲) صفر (۳) -1 (۴) -2

۴۷۹- اگر $g(x) = \sqrt{f(2x+1)} - f(x-2)$ و f اکیداً نزولی باشد، دامنه تابع $g(x)$ کدام است؟

(۱) $[-3, +\infty)$ (۲) $(-3, +\infty)$ (۳) $(-\infty, -3]$ (۴) $(-\infty, -3)$

۴۸۰- تابع f اکیداً نزولی و دامنه آن مجموعه ای از مقادیر منفی است. اگر $f(m^2 - m - 5) < f(-3 + 2m - m^2)$ باشد، m دارای چند مقدار صحیح است؟

(ریاضی ۱۴۰۲)

(۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) صفر

۴۸۱- تابع f اکیداً صعودی و دامنه آن، مجموعه ای از مقادیر مثبت است. اگر $f(m^2 - 4m + 4) < f(2m^2 - 9m - 2)$ باشد، m دارای چند مقدار صحیح است؟

(ریاضی خارج ۱۴۰۲)

(۱) 1 (۲) 2 (۳) 5 (۴) 6

۴۸۲- اگر $f(x) = \frac{1-x}{x}$ ، آن گاه در کدام یک از بازه های زیر نمودار تابع $y = f(1+x^2)$ بالای نمودار تابع $y = f(3+x^2)$ قرار دارد؟

(۱) $(0, \sqrt{2})$ (۲) $(0, 2)$ (۳) $(-2, 0)$ (۴) $(-2, -\sqrt{2})$

(مثل کنکور)

۴۸۳- اگر $f(x) = (x^2 + 3)(x + 3)$ ، آن گاه مجموعه جواب نامعادله $f(2x^2 - x) \leq 16$ کدام است؟

(۱) $[-\frac{1}{4}, 1]$ (۲) $[-1, \frac{1}{4}]$ (۳) $[\frac{1}{4}, 1]$ (۴) $[0, 1]$

(تجربی ۱۴۰۲)

۴۸۴- اگر $f(x) = (x + \log x)^5$ باشد، مجموعه جواب نامعادله $(f \circ f)(x) < f(x^5)$ کدام است؟

(۱) $(0, 5)$ (۲) $(0, 1)$ (۳) $(5, +\infty)$ (۴) $(1, +\infty)$

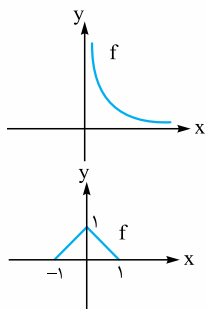
(مثل کنکور)

۴۸۵- اگر $f(x) = 3 + \sqrt{5-x}$ ، چند عدد صحیح در نامعادله $f \circ f(x) > f(x)$ صدق می کند؟

(۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

۴۸۶- اگر f تابعی اکیداً صعودی و g اکیداً نزولی باشد، کدام یک از توابع زیر نزولی است؟

(۱) $y = f(x) + \sqrt{x}$ (۲) $y = g \circ g(x)$ (۳) $y = g(x^2)$ (۴) $y = f \circ g(x)$



۴۸۷- با توجه به نمودار تابع f ، توابع $g(x) = 2x - f(x)$ و $h(x) = \frac{1}{f(-x)}$ به ترتیب چگونه‌اند؟

- (۱) نزولی - نزولی
(۲) صعودی - نزولی
(۳) نزولی - صعودی
(۴) صعودی - صعودی

۴۸۸- نمودار تابع $f(x)$ به شکل روبه‌رو است. یکنوایی تابع $y = f \circ f(x)$ چگونه است؟

- (۱) صعودی
(۲) نزولی
(۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی
(۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی

۴۸۹- اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ ، $g(x) = x^2 - x$ و تابع $(f \circ g)(x+1)$ در بازه $(a, +\infty)$ صعودی باشد، کم‌ترین مقدار a کدام است؟

- (۱) صفر
(۲) -۱
(۳) ۱
(۴) ۲

۴۹۰- تابع $f(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{x}+\sqrt{3-x}}$ از نظر یکنوایی شبیه کدام‌یک از توابع زیر است؟

- (۱) $y = \sqrt{1-2x}$
(۲) $y = |2^x - 1|$
(۳) $y = x^2 + \sqrt{x}$
(۴) $y = -x - [x]$

۴۹۱- اگر به ازای a متعلق به بازه $[m, n]$ ، تابع $f(x) = \begin{cases} \log_2(x^2 - 2x + 513) & x \geq 1 \\ 3^{(4-a)x} & x < 1 \end{cases}$ تابعی اکیداً یکنوا باشد، بیشترین مقدار $n - m$ چند برابر بزرگ‌ترین عدد صحیح قابل قبول برای a است؟

(آزمون ریاضی پلاس خیلی سبز)

- (۱) $\frac{1}{3}$
(۲) $\frac{2}{3}$
(۳) ۱
(۴) $\frac{4}{3}$

۴۹۲- تابع $f(x) = |a + x^2|$ در بازه $(-\infty, a-2)$ نزولی است. چند عدد طبیعی در مجموعه مقادیر a وجود دارد؟

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) بی‌شمار

درس ۹: تابع یک‌به‌یک

۴۹۳- اگر رابطه $f = \{(3, 2), (a, 5), (3, a^2 - a), (b, 2), (-1, 4)\}$ تابع یک‌به‌یک باشد، دوتایی (a, b) کدام است؟

- (۱) $(-1, 1)$
(۲) $(-1, 3)$
(۳) $(2, 1)$
(۴) $(2, 3)$

۴۹۴- توابع $f = \{(1, 2), (2, 1), (3, -2), (-1, 3)\}$ و $g = \{(-1, 2), (2, a), (1, b)\}$ مفروض‌اند. با کدام شرط، تابع $(f + g) \circ f$ یک‌به‌یک نیست؟

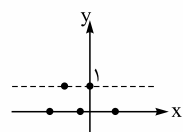
(آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز)

- (۱) $a - b = 1$
(۲) $a - b = -1$
(۳) $a + b = 1$
(۴) $a + b = -1$

۴۹۵- شکل روبه‌رو نمودار تابع f است. با حذف حداقل نقطه از این نمودار می‌توان به تعداد تابع یک‌به‌یک ساخت.

(مثل کنگور)

- (۱) ۳، ۲
(۲) ۶، ۲
(۳) ۶، ۳
(۴) ۳، ۳



(تجربی خارج ۹۵)

۴۹۶- تابع با ضابطه $f(x) = |x^2|$ با دامنه $\mathbb{R}$ چگونه است؟

- (۱) نزولی
(۲) صعودی
(۳) وارون‌ناپذیر
(۴) یک‌به‌یک

۴۹۷- کدام تابع وارون‌پذیر است؟

- (۱) $y = x - 2|x|$
(۲) $y = x[x]$
(۳) $y = x|x|$
(۴) $y = x - [x]$

۴۹۸- کدام‌یک از توابع زیر، یک‌به‌یک است؟

- (۱) $y = x^2 + 2\sqrt{x}$
(۲) $y = 2x + \frac{1}{x}$
(۳) $y = |\sqrt{x} - 2|$
(۴) $y = x - \sqrt{x}$

(تجربی خارج ۸۹)

۴۹۹- توابع زیر از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ تعریف شده‌اند. کدام‌یک از آن‌ها معکوس‌پذیر است؟

- (۱) $y = x^4 - 2x^2$
(۲) $y = [x]$
(۳) $y = x^2 - 3x^2$
(۴) $y = x^3 + x + 1$

(مثل کنگور)

۵۰۰- تابع $f(x) = |x+1| - |x-1|$ در بازه $[a, b]$ ، یک‌به‌یک است. حداکثر $b - a$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۵۰۱- تابع $y = 2x - m|x-1|$ در دامنه خود یک‌به‌یک است. m چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) ۱
(۲) ۵
(۳) ۳
(۴) ۴

(مثل کنگور)

۵۰۲- اگر $f(x) = \begin{cases} x+3 & x \geq 1 \\ 2x+b & x < 1 \end{cases}$ یک‌به‌یک باشد، کدام مقدار برای b قابل قبول است؟

- (۱) $\frac{5}{2}$
(۲) $\sqrt{5}$
(۳) ۱
(۴) ۳