

مقدمه ناشر

قطعاً بیشترین علامتهایی که در درس‌های ریاضی (به‌خصوص حسابان) دیده می‌شه ایناست: $=$ ، $\neq$ ، $>$ و $<$. یه جورایی می‌شه گفت ریاضی بیشتر دنبال اینه که بگه چی با چی مساویه، چی با چی مساوی نیست. تساوی‌های مطلق ریاضی، دقیق و براساس منطق جبریه و مو لای درزش نمی‌ره. به نظرم یکی از چیزایی که ریاضی رو جذاب کرده، همینیه که برابریش واقعاً برابریه! اما تساوی بازی‌ها، تساوی حقوق آدم‌ها، تساوی همگان در برابر قانون و ...!

برابری‌هایی که خیلی وقتاً برابر نیستند! مثلاً می‌بینید که دو تیم با هم مساوی می‌کنن، ولی یکیشون حذف می‌شه. اون یکی می‌ره مرحله بعد. می‌گن بازی با تساوی به پایان رسید، ولی به دلیل گل زده بیشتر در خانه حریف، فلان تیم می‌ره مرحله بعد! خب پس در واقع منظورشون اینه که این بازی مساوی، مساوی نشده! داوری و ناداوری و سلیقه شخصی و ... رو هم اضافه کنید به این داستان. از این مثال تو بازی‌ها و مسابقات فراوانه. اوضاع توی تساوی آدم‌ها و حق و حقوقشون خیلی پیچیده‌تر و عجیب‌تره؛ به قول جورج اورول در کتاب قلعه حیوانات (که کتابی بس جذاب است):

all animals are equal but some animals are more equal than others!

بی‌خیال تا گیج‌تر نشدم بریم سر همون ریاضی خودمون که لااقل راست و حسینی مساویش مساویه، نامساویش هم نامساوی! ممنونم از اساتید بزرگواری که با نوشتن این کتاب فرصتی برای موفقیت بیشتر علاقه‌مندان به ریاضی را فراهم کردند و همین‌طور ممنونم از کیوان صارمی که در تألیف این کتاب نقش مؤثری داشت.

ممنونم از خانم ندا انصاری و یگانه فلاحی به خاطر زحماتی که برای این کتاب کشیدند.

ممنونم از ویراستاران خوبمون که می‌دونم تمام تلاششون رو کردن تا کتاب بی‌غلط بشه.

ممنونم از تیم منسجم و منظم تولیدمون که در خاورمیانه هم‌تا ندارن!

ما دوستتون داریم < آن‌چه شما فکر می‌کنید

مقدمه مؤلفان

سلام به کتاب حسابان دوازدهم خیلی سبز خوش آمدید. این کتاب از سری کتب دوازدهم خیلی سبز هست و در اون ابتدا درس نامه، بعد تست ها و بعد پاسخ های تشریحی رو خواهید دید. در درس نامه سعی کردیم با رعایت خلاصه بودن همه مطالب مورد نیاز رو با ذکر مثال های کافی بیاریم؛ درس نامه به روز رسانی شده و در اون مثال های جدیدتری وجود دارد. در صورت تست ها تجربه مؤلفان کتاب - از تدریس در مدارس برتر تهران- مجموعه غنی و بسیار پرتنوعی از سؤالات رو کنار هم آورده؛ به خوبی سؤالات کنار هم چیده شدن تا از آسون به سخت، قدم به قدم، مطلب رو یاد بگیرید. پاسخ های تشریحی به عنوان نقطه قوت اصلی این کتاب علاوه بر نگارش گام به گام دارای روش های متنوع و تیزبازی هایی هستند که به شما در کنکور فرصت بیشتری برای هندسه و گسسته میدن... درست شنیدید! هر چه قدر که در حسابان راه های قشنگ و تیزبازی و راه درو بلد باشید، در گسسته و هندسه فرصت خواهید داشت که حل کنید و درصد ریاضی تون را بالا ببرید. حسابان مهم ترین درس شما در دوره دبیرستانه که بعداً تو درس های بعدی دانشگاهتون هم کاربرد داره. در ترم اول و دوم دانشگاه درس های ریاضی یک و ریاضی دو رو می خونید که در ادامه حسابان هستن. توی بقیه درس های تخصصی مهندسی هم توانایی مشتق گرفتن و مسیر برعکس اون یعنی انتگرال گرفتن خیلی جدی به کارتون خواهد اومد... مهمه که حسابان رو از همین الان خوب و دقیق یاد بگیرید. به علاوه مدل تست های کنکور حسابان جوریه که با تسلط به این کتاب تست، می تونید خیلی راحت سؤالات کنکور رو حل کنید. اما متأسفانه شاید در درس های هندسه و تا حدی گسسته این طور نباشه 😊 یعنی هسته اصلی درصد شما رو در کنکور، حسابان و ریاضیات پایه مربوط به اون تشکیل می دهند. با بررسی کنکور در چند سال اخیر خیلی واضحه که تیم طرح سؤالات درس ریاضی در گروه ریاضی و تجربی یکسان هستند و بارها سؤالی که در رشته ریاضی آمده چند سال بعد برای تجربی مطرح شده یا سؤالی که به تجربی ها دادن چند سال بعد در رشته ریاضی مطرح شده. از این رو، ما همه تست های کنکور تجربی و انسانی رو هم بررسی کردیم و سؤالات خوب اون ها رو براتون گذاشتیم تا بیشتر از قبل با ذهنیت تیم طراحی کنکور آشنا بشید. بخواهیم یا نخواهیم، شما و خانواده و معلم و مشاور و همه اون هایی که در سال کنکور نظرتون مهمه، وضعیت دانش آموز رو با نتیجه در کنکورهای آزمایشی بررسی می کنند. پس مهمه که کتاب تست شما برای کنکورهای آزمایشی هم پاسخ گو باشه. ما با بررسی خط فکری و سؤالات چند دوره اخیر در کنکورهای آزمایشی مهم و پرطرفدار، یعنی آزمون های آزمایشی خیلی سبز و البته سایر آزمون ها، سؤالاتی رو انتخاب کردیم که در طول سال برای موفقیت در آزمون های آزمایشی هم بهتون کمک کنه. با این کتاب خیالتون از کنکورهای آزمایشی طول سال هم راحت خواهد بود.

حتمأً می دونید که خیلی سبز به عنوان بزرگترین ناشر کتب کمک آموزشی کنکور، سال هاست که خدمات خودش رو به آزمون آزمایشی و کلاس آنلاین هم گسترش داده. در آزمون آزمایشی، مثل کتاب های خیلی سبز، تلاش زیادی میشه تا یک درس نامه به اسم درس باکس در هر سؤال به شما مسیر رو نشون بده؛ بعد از اون راه حل با توضیحات کافی، راه های دوم و تیزبازی در اختیارتون قرار می گیره. هر آزمونی قبل از خودش یک مرورنامه هم داره. آزمون خدمات بسیار گسترده ای داره؛ مثل تحلیل ویدیویی، سؤالات پیش آزمون و پس آزمون که همگی در مسیر کنکور به کمک شما میان. حتمأً پیشنهاد می کنیم آزمون های آزمایشی خیلی سبز رو ببینید. در کلاس های آنلاین هم خیلی سبز با بهره گرفتن از معلمان مطرح، پرتجربه و زبده کنکور، بسته بسیار خوبی از خدمات رو به نام خیلی سبز ۳۶۰ کنار هم آورده تا در مسیر کنکور یآوری مطمئن داشته باشین. تیم بزرگی از خیلی سبز زحمت کشیدند تا این کتاب آماده بشه... در درجه اول از دکتر نصری متشکریم که یک بار دیگه به ما اعتماد کردن؛ از زحمات آقای مهندس رضا سبز میدانی و آقای مهندس بقایی در سرپرستی کار بسیار ممنونیم. از تایپ تا رسم شکل ها، صفحه آرایی و صفحه بندی، دوستان تولید زحمت کشیدن

توضیحاتی در مورد آیکن های استفاده شده در کتاب:

۱ در تست های هر درس، کنار تست های عادی یک آیکن ☹️ گذاشته ایم. قرار است شما بعد از حل تست ها و بررسی پاسخ نامه این آیکن ها را به 😊 یا ☺️ یا 😊 تبدیل کنید:

😊 یعنی تست آسان. 😊 یعنی تست متوسط. ☹️ یعنی تست دشوار. این نمادگذاری باعث می شود تا بعداً که خواستید فصل را دوره کنید، بتوانید تصمیم بگیرید که از کدام تست ها برای این کار استفاده کنید و روی سؤالات با نماد مورد نظر تمرکز کنید تا خوب یادشان بگیرید. (البته برای این ها از هر نماد دیگری هم که خودتون می خواهید می توانید استفاده کنید، چون هدف اصلی این است که بتوانید بعداً به این سؤالات برگردید.)

۲ نماد کنار بعضی از تست ها به رنگ قرمز ☹️ آمده است. این ها تست های نشان دار برای دوره سریع فصل هستند و دوتا کاربرد دارند: **الف** دوره و جمع بندی فصل **ب** اگر قبل از یک آزمون وقت خیلی کمی دارید، می توانید فقط این تست ها را حل کنید. ما معتقدیم که جمع بندی واقعی با این روش انجام می شود نه با جدول و نمودار و ...!

۳ در درس نامه و پاسخ تست ها، آیکن های زیر را می بینید:

نماد آیکن	توضیح
📌 نکته:	یه مفهوم مطلب، رابطه، فرمول یا ... است که باید بدانید تا بتوانید سؤال را سریع تر و بهتر حل کنید.
📌 اشاره:	مثل یک تلنگر است که به شکل درست و مفهومی به سؤال نگاه کنید. گاهی وقت ها هم در 📌 اشاره: سؤالی پرسیده ایم که باعث می شود بیشتر با مفاهیم سؤال درگیر شوید.
📌 خاطره:	همان طور که از اسمش پیداست یک یادآوری سریع در مورد مفهوم، فرمول، رابطه یا ... آن مبحث درسی است.
📌 روش ۱ روش ۲	اگر سؤالی دو راه حل داشته، سعی کردیم هر دو راه (حتی بیشتر!) را بیاوریم. بعضی وقت ها هم یکی از راه های حل مان، عددگذاری بوده است. البته حواسمان بوده که در استفاده از این روش، افراط نکنیم.
📌 تیزبازی:	روش سریع و خلاقانه حل یک سؤال است.

📷 @soroushmueeni

📷 @Shahraabiali

📷 @mathmohsenimanesh

فهرست

فصل اول: تابع	درس نامه	تست
درس ۱: تبدیل نمودارها	۸	۳۲
درس ۲: توابع چندجمله‌ای	۱۶	۳۹
درس ۳: توابع یکنوا	۱۹	۴۳
درس ۴: تقسیم	۲۵	۴۸
فصل دوم: مثلثات		
درس ۱: اتحادهای مثلثاتی $\alpha \pm \beta$ ، 2α و ...	۵۴	۷۶
درس ۲: توابع متناوب	۵۷	۷۷
درس ۳: نمودار توابع سینوسی و کسینوسی	۶۰	۷۸
درس ۴: تانژانت	۶۳	۸۵
درس ۵: معادله مثلثاتی	۶۷	۸۷
فصل سوم: حد، پیوستگی و مجانب		
درس ۱: حد بی‌نهایت	۹۵	۱۱۳
درس ۲: حد در بی‌نهایت	۱۰۰	۱۱۷
درس ۳: مجانب	۱۰۷	۱۲۴
فصل چهارم: مشتق		
درس ۱: آشنایی با مفهوم مشتق	۱۳۲	۱۶۹
درس ۲: قواعد مشتق‌گیری	۱۳۶	۱۷۱
درس ۳: مشتق‌گیری با چشم‌های باز (عامل صفرشونده - ساده‌کردن)	۱۴۳	۱۷۴
درس ۴: معادله خط مماس بر منحنی	۱۴۷	۱۷۷
درس ۵: مشتق چپ و راست - مشتق‌گیری در حضور بَرَاکَت و قدرمطلق	۱۵۱	۱۸۰
درس ۶: پیوستگی و مشتق‌پذیری (در نقطه و بازه)	۱۵۴	۱۸۲

درس‌نامه	تست
درس ۷: نقاط مشتق‌پذیر - نقاط گوشه‌ای - مماس قائم	۱۵۵ - ۱۸۲
درس ۸: دامنه و نمودار تابع مشتق	۱۶۰ - ۱۸۶
درس ۹: مشتق تابع مرکب	۱۶۳ - ۱۸۷
درس ۱۰: آهنگ تغییر	۱۶۶ - ۱۹۲

فصل پنجم: کاربرد مشتق

درس ۱: بررسی یکنوایی تابع به کمک مشتق	۱۹۶ - ۲۲۹
درس ۲: نقطه بحرانی	۲۰۰ - ۲۳۱
درس ۳: اکسترم‌های نسبی	۲۰۴ - ۲۳۴
درس ۴: اکسترم‌های مطلق	۲۰۹ - ۲۴۰
درس ۵: بهینه‌سازی	۲۱۲ - ۲۴۳
درس ۶: تقعر و نقطه عطف	۲۱۶ - ۲۴۹
درس ۷: رسم نمودار	۲۲۵ - ۲۵۸

پاسخ‌نامه

پاسخ‌نامه تشریحی	۲۶۳
پاسخ‌نامه کلیدی	۴۴۸

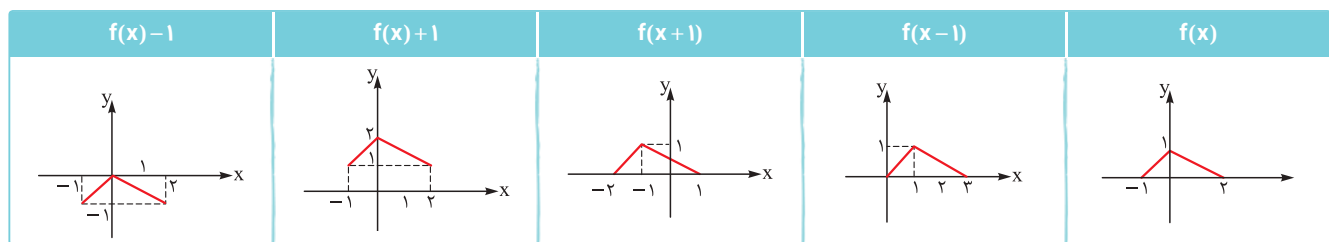
درس ۱: تبدیل نمودارها

انتقال نمودارها

انتقال نمودارها، دو نوع دارد: انتقال افقی و انتقال عمودی. در انتقال افقی، ما تابع اولیه را به سمت راست یا چپ و در انتقال عمودی، تابع اولیه را به بالا یا پایین می‌بریم. با این انتقال‌ها، کلیت شکل نمودار تغییر نمی‌کند، فقط نمودار جابه‌جا می‌شود.

نمودار چه می‌شود؟	نماد ریاضی	اتفاقی که برای ضابطه می‌افتد.	مثال
a واحد راست	$f(x - a)$	جای x ها، $x - a$ می‌گذاریم.	$y = 2x^2 + 3x \xrightarrow{\text{۲ واحد راست}} y = 2(x - 2)^2 + 3(x - 2)$
a واحد چپ	$f(x + a)$	جای x ها، $x + a$ می‌گذاریم.	$y = 2x^2 + 3x \xrightarrow{\text{۲ واحد چپ}} y = 2(x + 2)^2 + 3(x + 2)$
b واحد بالا	$f(x) + b$	b تا به ضابطه اضافه می‌کنیم.	$y = 2x^2 + 3x \xrightarrow{\text{۲ واحد بالا}} y = 2x^2 + 3x + 2$
b واحد پایین	$f(x) - b$	b تا از ضابطه کم می‌کنیم.	$y = 2x^2 + 3x \xrightarrow{\text{۲ واحد پایین}} y = 2x^2 + 3x - 2$

یک بار هم اتفاقات صفحه قبل را به صورت نموداری ببینید. در ستون سمت راست، نمودار تابع $f(x)$ آمده و در ستون‌های دیگر، انتقال‌هایش.

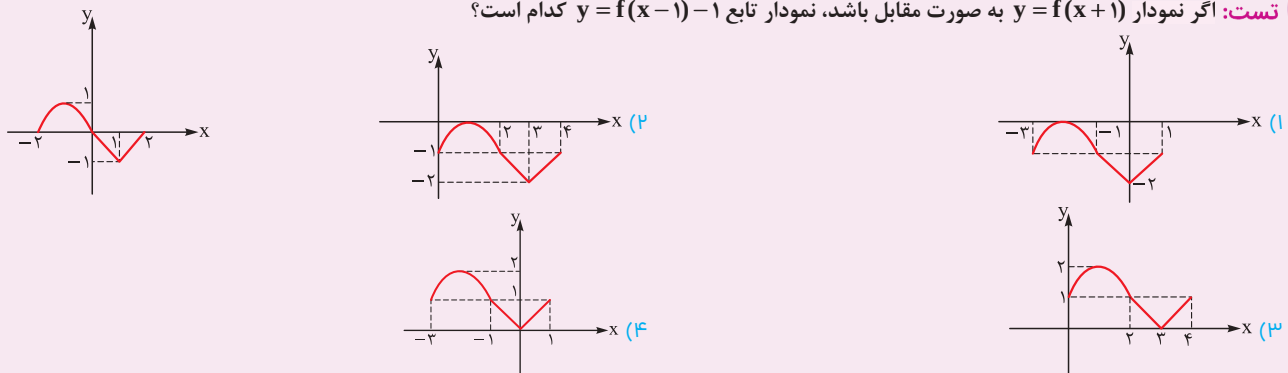


$$f(x \pm a) \pm b$$

اول دوم

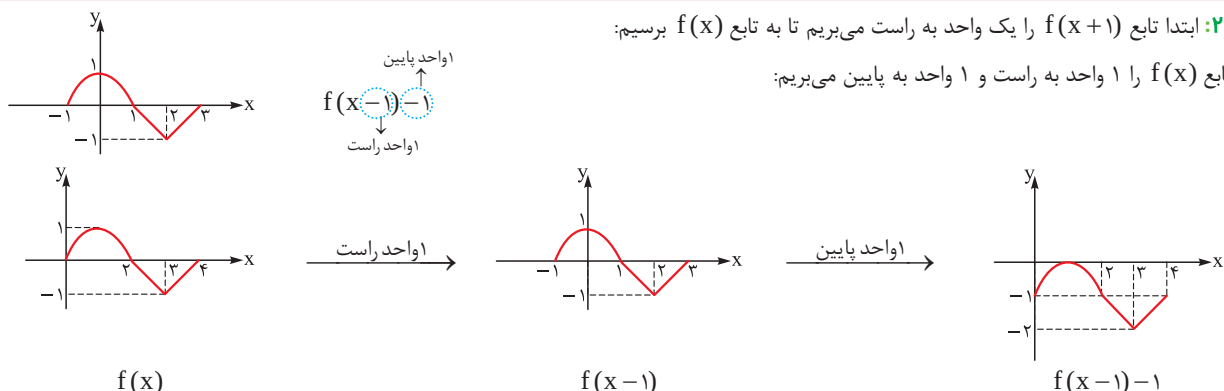
نکته: برای اعمال تغییرات روی ضابطه‌های به فرم $f(x \pm a) \pm b$ ، اول انتقال افقی و بعدش انتقال عمودی را اثر می‌دهیم:

تست: اگر نمودار $y = f(x + 1)$ به صورت مقابل باشد، نمودار تابع $y = f(x - 1) - 1$ کدام است؟



پاسخ ۲: ابتدا تابع $f(x + 1)$ را یک واحد به راست می‌بریم تا به تابع $f(x)$ برسیم:

حالا تابع $f(x)$ را ۱ واحد به راست و ۱ واحد به پایین می‌بریم:



اشاره: می‌توانیم با ۲ واحد به سمت راست بردن $f(x + 1)$ ، به ضرب به $f(x - 1)$ برسیم.

اشاره: یک نمونه از استنباطات رایجی که بچه‌ها در انتقال‌های افقی انجام می‌دهند، را ببینید:

مثلاً از ما خواسته شده که تابع $y = \sqrt{2x}$ را ۱ واحد به سمت راست ببریم. خیلی‌ها زیر رادیکال ۱ را اضافه می‌کنند و به $y = \sqrt{2x-1}$ می‌رسند. این غلط است! اگر دقت می‌کردید ما در ستون سوم جدول نوشته بودیم «برای انتقال a واحد به سمت راست، باید جای x ها، $x-a$ قرار دهیم». پس برای آن‌که تابع $y = \sqrt{2x}$ را ۱ واحد به سمت راست ببریم باید جای x ها، $x-1$ قرار دهیم:

حالا دو تست از اشاره مهم بالا حل کنید:

تست: تابع $f(x) = \frac{2x-1}{3x+1}$ را ۲ واحد به چپ و ۱ واحد به پایین آورده‌ایم. اگر ضابطه تابع جدید به صورت $g(x) = \frac{ax+b}{3x+d}$ باشد، مقدار $a+b+d$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ ۲: مراحل را به ترتیب انجام می‌دهیم:

(۱) برای آن‌که ۲ واحد به چپ برویم، باید جای تمام x ها، $x+2$ قرار دهیم:

(۲) حالا ضابطه را منهای ۱ می‌کنیم تا نمودار ۱ واحد به پایین بیاید:

پس:

تست: اگر تابع $y = 2f(1-2x)$ را ۳ واحد به چپ و ۱ واحد به بالا ببریم، به کدام تابع می‌رسیم؟

۱ (۱) $2f(-2x-5) + 2$ ۲ (۲) $2f(-2x-5) + 1$ ۳ (۳) $2f(4-2x) + 2$ ۴ (۴) $2f(4-2x) + 1$

پاسخ ۲: مراحل را به ترتیب انجام می‌دهیم:

(۱) برای آن‌که ۳ واحد به چپ برویم باید جای x ها، $x+3$ قرار دهیم:

(۲) حالا یک واحد به ضابطه اضافه می‌کنیم تا تابع ۱ واحد بالا بیاید:

قرینه‌یابی

قرینه‌یابی‌ها سه مدل دارند: قرینه نسبت به محور x ها، قرینه نسبت به محور y ها و قرینه نسبت به مبدأ مختصات

مثال	اتفاقی که برای ضابطه می‌افتد.	نماد ریاضی	نمودار چه می‌شود؟	قرینه‌یابی
$y = x^2 - 3x - 2$ قرینه نسبت به x ها $\rightarrow y = -(x^2 - 3x - 2) = -x^2 + 3x + 2$	کل ضابطه را قرینه می‌کنیم.	$-f(x)$	قرینه نسبت به محور x ها	قرینه‌یابی
$y = x^2 - 3x - 2$ قرینه نسبت به y ها $(x \rightarrow -x) \rightarrow y = (-x)^2 - 3(-x) - 2 = x^2 + 3x - 2$	جای x ها، $-x$ می‌گذاریم.	$f(-x)$	قرینه نسبت به محور y ها	
$y = x^2 - 3x - 2$ قرینه نسبت به مبدأ $\rightarrow y = -((-x)^2 - 3(-x) - 2) = -x^2 - 3x + 2$	هر دو کار بالا با هم!	$-f(-x)$	قرینه نسبت به مبدأ	

یک بار هم اتفاقات بالا را به صورت نموداری ببینید. در ستون سمت راست، نمودار تابع $f(x)$ آمده و در ستون‌های دیگر، قرینه‌یابی‌هایش.

$-f(-x)$	$f(-x)$	$-f(x)$	$f(x)$

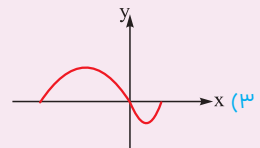
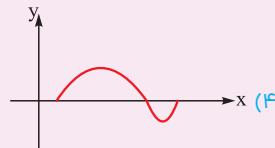
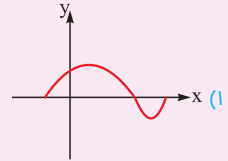
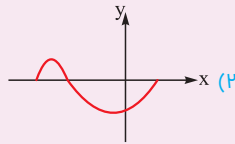
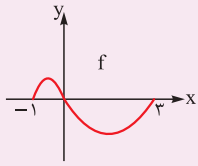
نکته: برای اعمال تغییرات روی ضابطه‌هایی به فرم $y = -f(-x+a)+b$ ، ترتیب اثردهی به صورت روبه‌رو است:

چهارم اول دوم سوم

مثلاً برای رسم $y = -f(-x-2) + 3$ از روی $y = f(x)$ ، این مراحل را می‌رویم:

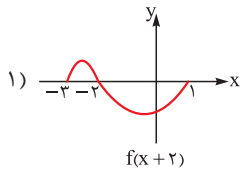
$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x-2} f(x-2) \xrightarrow{x \rightarrow -x} f(-x-2) \xrightarrow{} -f(-x-2) \xrightarrow{} -f(-x-2) + 3$

تست: اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد، نمودار تابع $y = -f(2-x)$ به کدام صورت است؟

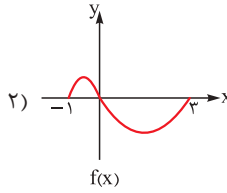


پاسخ ۱: اول ترتیب مراحل رو مشخص می کنیم:
اول: $-x + 2$ (چپ)
دوم: $-f$ (عکس)
سوم: f (اصلی)

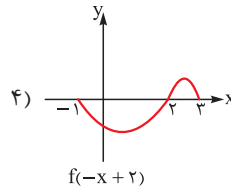
حالا روی نمودار انجام می دهیم:



۲ واحد چپ
 $x \rightarrow x+2$



قرینه نسبت به x ها
 $x \rightarrow -x$



$-f(-x+2)$

اشاره: همان طور که در جدول دیدید، اگر قرار شد ضابطه ای را نسبت به محور y قرینه کنید باید جای تمام x ها ییش $-x$ قرار دهید. مثلاً:

$$y = 2x^2 - \sqrt{x+3} \xrightarrow{x \rightarrow -x} y = 2(-x)^2 - \sqrt{-x+3} = 2x^2 - \sqrt{-x+3}$$

و اگر قرار شد ضابطه ای را نسبت به محور x قرینه کنیم، آن را در منفی ضرب می کنیم. مثلاً:

$$y = 2x^2 - \sqrt{x+3} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به x ها}} y = -(2x^2 - \sqrt{x+3}) = -2x^2 + \sqrt{x+3}$$

تست: تابع با ضابطه $y = \frac{x+1}{2x-1}$ را نسبت به محور y قرینه کرده و آن را ۲ واحد به راست و سپس ۱ واحد به بالا می بریم و در نهایت آن را نسبت به محور x قرینه می کنیم. مقدار تابع جدید در $x = \frac{5}{2}$ کدام است؟

(۴) $-\frac{3}{4}$

(۳) $\frac{3}{4}$

(۲) $-\frac{3}{2}$

(۱) $\frac{3}{2}$

پاسخ ۴: باید تغییرات را به ترتیب گفته شده انجام دهیم: ۲ تا راست $x \rightarrow x-2$ ۱) $\frac{x+1}{2x-1} \xrightarrow{x \rightarrow -x} \frac{-x+1}{2(-x)-1} = \frac{-x+1}{-2x-1}$ به منفی از صورت و مخرج می زنیم ۲) $\frac{x-1}{2x+1} \xrightarrow{x \rightarrow x-2} \frac{x-1}{2x+1}$

۳) $\frac{(x-2)-1}{2(x-2)+1} = \frac{x-3}{2x-3}$ ۴) $\frac{x-3}{2x-3} + 1 = \frac{3x-6}{2x-3}$ ۵) $-\left(\frac{3x-6}{2x-3}\right) = \frac{-3x+6}{2x-3}$

$$y = \frac{-3\left(\frac{5}{2}\right) + 6}{2\left(\frac{5}{2}\right) - 3} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{5}{2} - 3} = \frac{-3}{4}$$

ضابطه نهایی تابع به شکل $y = \frac{-3x+6}{2x-3}$ شد. مقدار آن به ازای $x = \frac{5}{2}$ برابر است با:

نکته: قرینه نسبت به مبدأ مختصات شامل دو مرحله است: ۱) قرینه نسبت به محور y ها ۲) قرینه نسبت به محور x ها.

اشاره: اگر ترتیب دو مرحله را عوض کنید (در قرینه نسبت به مبدأ)، مشکلی پیش نمی آید.

تست: تابع $y = f(x+3) - 1$ را نسبت به مبدأ قرینه کردیم و سپس آن را ۱ واحد به چپ برده ایم، ضابطه تابع جدید کدام است؟

(۴) $y = -f(2-x) + 1$

(۳) $y = -f(2-x) - 1$

(۲) $y = -f(-x+4) - 1$

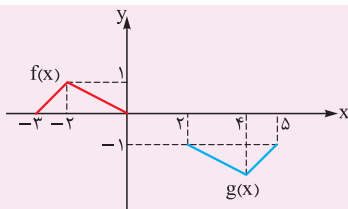
(۱) $y = -f(-x+4) + 1$

پاسخ ۴: مراحل را به ترتیب انجام می دهیم:

$$f(x+3) - 1 \xrightarrow{x \rightarrow -x} f(-x+3) - 1 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به x ها}} -f(-x+3) + 1 \xrightarrow{\text{۱ واحد چپ}} -f(-(x+1)+3) + 1 = -f(-x+2) + 1$$

پس ضابطه نهایی تابع به شکل $y = -f(2-x) + 1$ است.

یک مدل هم از سؤالاتی که نمودار f و انتقال یافته‌اش را می‌دهند و ضابطه جدیدش را می‌خواهند، ببینید.



تست: تابع $y = f(x)$ را فقط با انتقال و قرینه‌یابی به تابع $g(x)$ تبدیل کرده‌ایم، ضابطه $g(x)$ برحسب

f کدام است؟

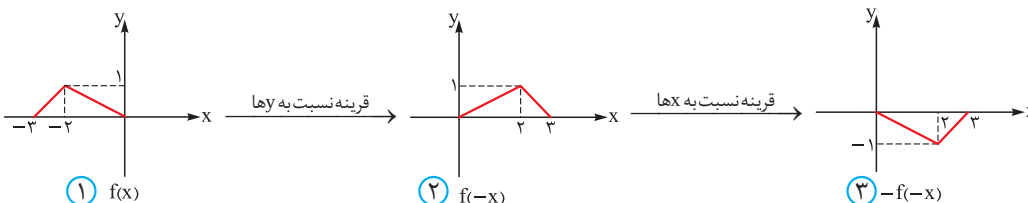
(۱) $-f(2-x) - 1$

(۲) $-f(2-x) + 1$

(۳) $-f(-x-2) - 1$

(۴) $-f(-x-2) + 1$

پاسخ ۱: اول قرینه‌یابی‌ها را انجام دهیم تا ظاهر f و g یکسان شود!



اگر تابع (۳) را ۲ واحد به راست و ۱ واحد به پایین بیاوریم، به تابع g می‌رسیم:

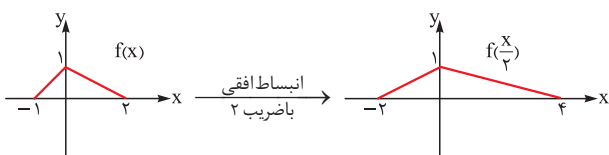
$$-f(-x) \xrightarrow[\text{واحد راست}]{x \rightarrow x-2} -f(-(x-2)) = -f(2-x) \xrightarrow[\text{واحد پایین}]{y \rightarrow y-1} -f(2-x)-1$$

$$g(x) = -f(2-x)-1$$

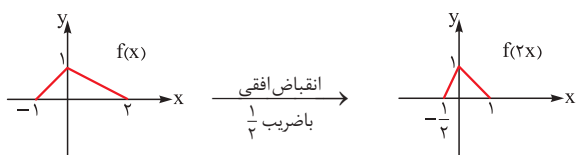
پس ضابطه g به صورت مقابل است:

انبساط و انقباض افقی و عمودی

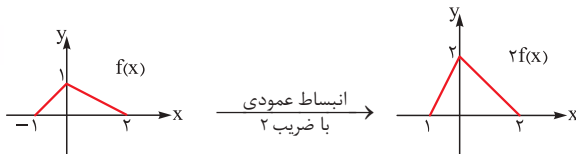
انبساط و انقباض در کل ۴ مدل دارد: (۱) انبساط افقی (۲) انقباض افقی (۳) انبساط عمودی (۴) انقباض عمودی



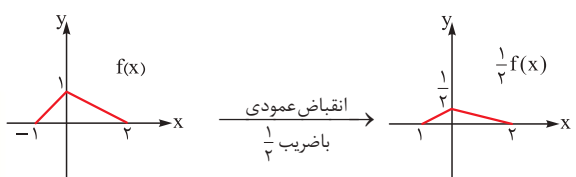
۱ انبساط افقی: اگر $0 < k < 1$ باشد، برای رسم تابع $f(kx)$ ، x های تمام نقاط را $\frac{1}{k}$ برابر می‌کنیم و به y ها دست نمی‌زنیم. در این حالت چون $\frac{1}{k}$ عددی بزرگ‌تر از ۱ است، اصطلاحاً می‌گوییم تابع را با ضریب $\frac{1}{k}$ در راستای افقی منبسط کرده‌ایم. یک مثال نموداری هم ببینید:



۲ انقباض افقی: اگر $k > 1$ باشد، برای رسم تابع $f(kx)$ ، x های تمام نقاط را $\frac{1}{k}$ برابر می‌کنیم و به y ها دست نمی‌زنیم. در این حالت چون $\frac{1}{k}$ عددی بین صفر و ۱ است، اصطلاحاً می‌گوییم تابع را با ضریب $\frac{1}{k}$ در راستای افقی منقبض کرده‌ایم. یک مثال نموداری هم ببینید:



۳ انبساط عمودی: اگر $k > 1$ باشد، برای رسم تابع $kf(x)$ ، y های تمام نقاط را k برابر می‌کنیم و به x ها دست نمی‌زنیم. در این حالت چون $k > 1$ است، اصطلاحاً می‌گوییم تابع را با ضریب k در راستای عمودی منبسط کرده‌ایم. یک مثال نموداری هم ببینید:



۴ انقباض عمودی: اگر $0 < k < 1$ باشد، برای رسم تابع $kf(x)$ ، y های تمام نقاط را k برابر می‌کنیم و به x ها دست نمی‌زنیم. در این حالت چون $0 < k < 1$ است، اصطلاحاً می‌گوییم تابع را با ضریب k در راستای عمودی منقبض کرده‌ایم. یک مثال نموداری هم ببینید:

یک بار هم اتفاقاتی که برای ضابطه می‌افتد را با مثال در جدول زیر ببینید:

مثال	نماد ریاضی	
$y = x^2 + \sqrt{2x+1} \xrightarrow[\text{انبساط افقی با ضریب } 2]{x \rightarrow \frac{x}{2}} y = (\frac{x}{2})^2 + \sqrt{2(\frac{x}{2})+1}$	$f(\frac{x}{2})$	انبساط با ضریب ۲
$y = x^2 + \sqrt{2x+1} \xrightarrow[\text{انقباض افقی با ضریب } \frac{1}{2}]{x \rightarrow 2x} y = (2x)^2 + \sqrt{2(2x)+1}$	$f(2x)$	انبساط با ضریب ۲
$y = x^2 + \sqrt{2x+1} \xrightarrow[\text{انبساط عمودی با ضریب } 2]{y \rightarrow 2y} y = 2(x^2 + \sqrt{2x+1})$	$2f(x)$	انبساط با ضریب ۲
$y = x^2 + \sqrt{2x+1} \xrightarrow[\text{انقباض عمودی با ضریب } \frac{1}{2}]{y \rightarrow \frac{1}{2}y} y = \frac{1}{2}(x^2 + \sqrt{2x+1})$	$\frac{1}{2}f(x)$	انبساط با ضریب ۲

تست: کدام ضابطه انبساط افقی تابع $y = f(x)$ است؟

$y = \frac{3}{4}f(x)$ (۴)

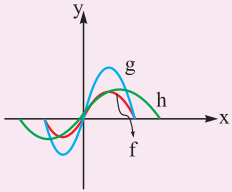
$y = \frac{4}{3}f(x)$ (۳)

$y = f(\frac{3}{4}x)$ (۲)

$y = f(\frac{4}{3}x)$ (۱)

پاسخ ۲: تابع $y = f(kx)$ با شرط $0 < k < 1$ ، انبساط افقی تابع $f(x)$ با ضریب $\frac{1}{k}$ است. در ضابطه $y = f(kx)$ با جای گذاری $k = \frac{3}{4}$ به ۲ می‌رسیم.

تست: با توجه به نمودار مقابل، ضابطه توابع g و h به ترتیب کدام می‌تواند باشد؟



$f(\frac{x}{2}), 2f(x)$ (۲)

$f(2x), 2f(x)$ (۱)

$f(\frac{x}{2}), \frac{1}{2}f(x)$ (۴)

$f(2x), \frac{1}{2}f(x)$ (۳)

$g(x) = 2f(x)$

پاسخ ۲: در تابع g ، فقط y ‌های تابع f ، ۲ برابر شدند و x ‌ها ثابت ماندند، پس:

$h(x) = f(\frac{x}{2})$

در تابع h ، فقط x ‌های تابع f ، ۲ برابر شدند و y ‌ها ثابت ماندند، پس جای x ‌های $f(x)$ باید $\frac{x}{2}$ قرار دهیم:

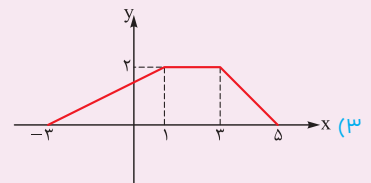
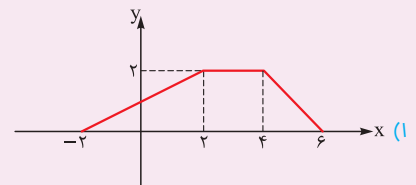
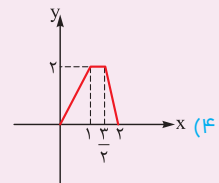
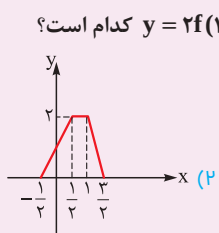
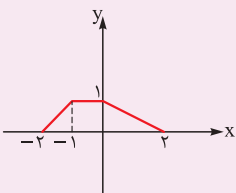
اشاره: از روی نمودار مشخص نیست ضریب انقباض یا انبساط چه عددی است. تنها می‌توانیم تشخیص دهیم $k > 1$ یا $0 < k < 1$. از روی گزینه‌ها می‌دانیم که ضریب‌ها یا ۲ یا $\frac{1}{2}$ هستند.

$a \downarrow f(b \downarrow x + c) + d \downarrow$
چهارم اول دوم سوم

نکته: برای اعمال تغییرات روی ضابطه‌هایی به فرم $y = af(bx + c) + d$ ، ترتیب اثردهی به صورت مقابل است:

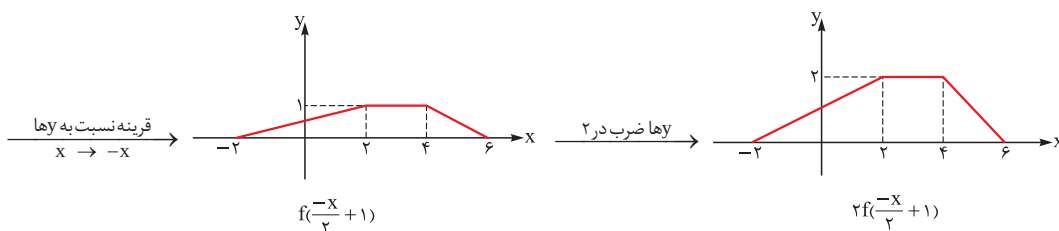
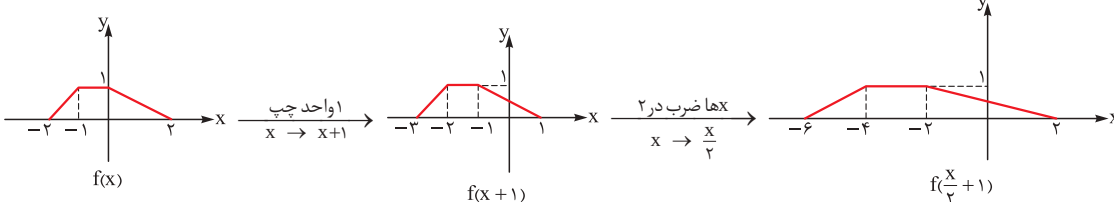
مثلاً برای رسم $y = 2f(2x - 1) + 1$ از روی $y = f(x)$ ، این مراحل را می‌رویم:

$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x-1 \text{ واحد راست}} f(x-1) \xrightarrow{x \rightarrow 2x \text{ ها ضرب در } \frac{1}{2}} f(2x-1) \xrightarrow{y \text{ ها ضرب در } 2} 2f(2x-1) \xrightarrow{\text{واحد بالا}} 2f(2x-1) + 1$



پاسخ ۱: اول ترتیب مراحل را مشخص می‌کنیم:

البته جای مرحله دوم و سوم را می‌توانیم عوض کنیم. حالا روی نمودار انجام می‌دهیم:





اشاره: مراحل خنثی‌سازی یا تبدیل $af(bx+c)+d$ به $f(x)$ دقیقاً برعکس است. یعنی:

$$af(bx+c)+d$$

اول چهارم سوم دوم

تبدیل ضابطه $af(bx+c)+d$ به $a'f(b'x+c')+d'$: فرض کنید می‌خواهیم از تابع $y = 2f(2x+1)$ به تابع $y = \frac{1}{4}f(x+1) - 1$ برسیم. برای

این کار، ۲ روش داریم:

راه اول: ابتدا از $2f(2x+1)$ به $f(x)$ و سپس به $\frac{1}{4}f(x+1) - 1$ برسیم:

$$2f(2x+1) \xrightarrow{\text{y ضرب در } \frac{1}{2}} f(2x+1) \xrightarrow{\text{x ضرب در 2} \rightarrow \frac{x}{2}} f(x+1) \xrightarrow{\text{واحد راست} \rightarrow x-1} f(x)$$

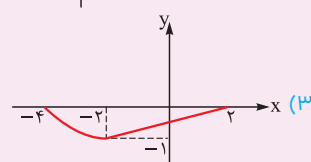
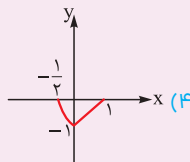
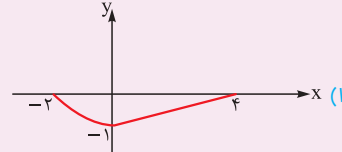
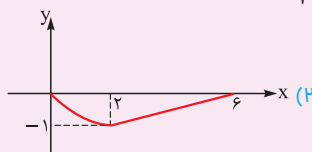
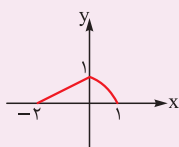
$$\text{مرحله دوم: } f(x) \xrightarrow{\text{واحد چپ}} f(x+1) \xrightarrow{\text{y ضرب در } \frac{1}{4}} \frac{1}{4}f(x+1) \xrightarrow{\text{واحد پایین}} \frac{1}{4}f(x+1) - 1$$

راه دوم: مستقیم از $2f(2x+1)$ به $\frac{1}{4}f(x+1) - 1$ برسیم:

$$2f(2x+1) \xrightarrow{\text{y ضرب در } \frac{1}{4}} \frac{1}{2}f(2x+1) \xrightarrow{\text{x ضرب در 2} \rightarrow \frac{x}{2}} \frac{1}{2}f(x+1) \xrightarrow{\text{واحد پایین}} \frac{1}{2}f(x+1) - 1$$

بعضی وقت‌ها روش اول خیلی وقت‌گیر می‌شود.

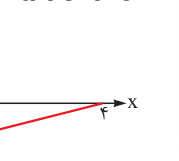
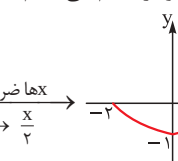
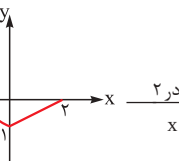
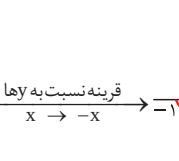
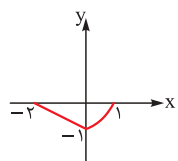
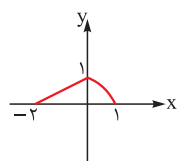
تست: نمودار تابع $y = -f(2-x)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y = f(\frac{x}{2} + 2)$ به کدام صورت است؟



پاسخ ۱: سعی می‌کنیم به طور مستقیم از $-f(-x+2)$ به $f(\frac{x}{2} + 2)$ برسیم:

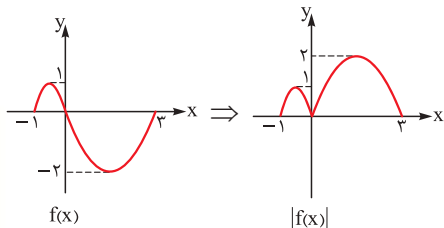
$$-f(-x+2) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به xها}} f(-x+2) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به yها} \rightarrow x \rightarrow -x} f(x+2) \xrightarrow{\text{x ضرب در 2} \rightarrow \frac{x}{2}} f(\frac{x}{2} + 2)$$

همین مراحل را روی نمودار انجام می‌دهیم:

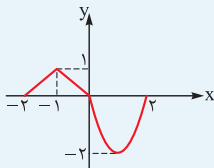


رسم نمودار $|f(x)|$: برای رسم تابع $|f(x)|$ ، به قسمت‌های بالا و روی محور xها دست

نمی‌زنیم و قسمت‌های زیر آن را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم و به بالا می‌آوریم. مثلاً:



مثال: با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ ، نمودار تابع $y = |2f(x)| - f(x)$ را رسم کنید.

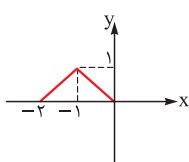


پاسخ: الان باید به علامت $f(x)$ دقت کنیم:

(۱) هر جا $f(x) \geq 0$ است، داریم:

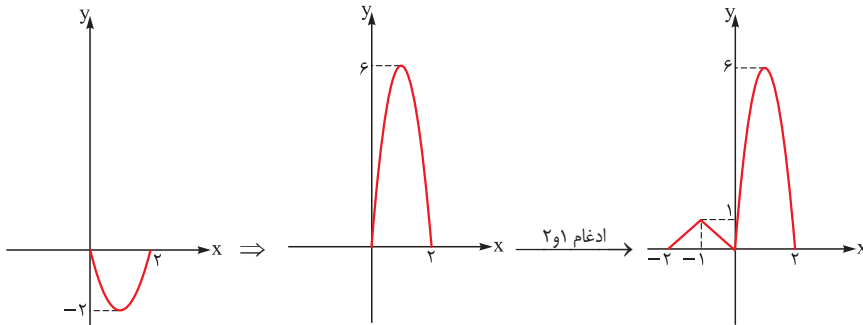
این قسمت نمودار شرط $f(x) \geq 0$ را دارد:

پس این قسمت بدون تغییر می‌ماند.



۲) هر جا $f(x) < 0$ است، داریم: $y = -2f(x) - f(x) = -3f(x)$ ، پس برای این قسمت نمودار، انبساط عمودی با ضریب ۳ داریم و نسبت به محور x نمودار را قرینه می‌کنیم.

این قسمت هم شرط $f(x) < 0$ را دارد، باید y هایش را در -3 ضرب کنیم تا $-3f(x)$ به دست آید:

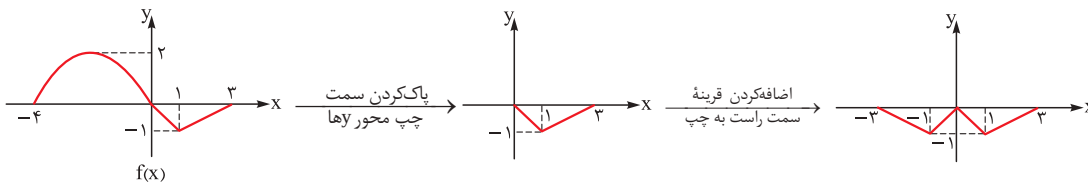


رسم نمودار $f(|x|)$ برای رسم نمودار تابع $y = f(|x|)$ دو مرحله زیر را انجام می‌دهیم:

۱) قسمت‌های سمت چپ محور y ها را پاک می‌کنیم.

۲) هر چیزی که سمت راست محور y ها مانده را نگه می‌داریم و قرینه‌اش نسبت به محور y ها را در سمت چپش می‌کشیم.

مثلاً:

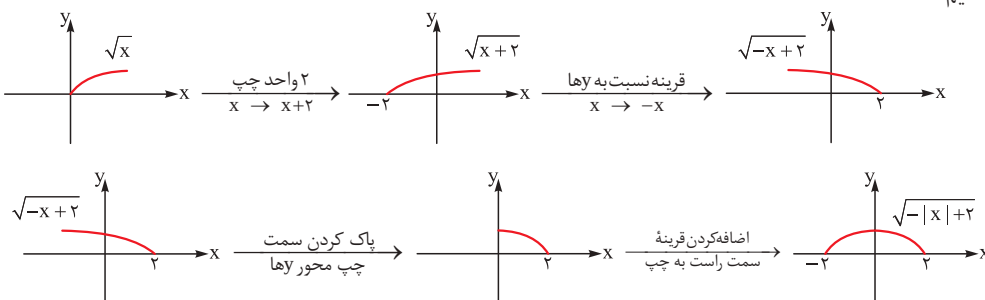


تست: نمودار تابع $y = \sqrt{2-|x|}$ به کدام صورت است؟

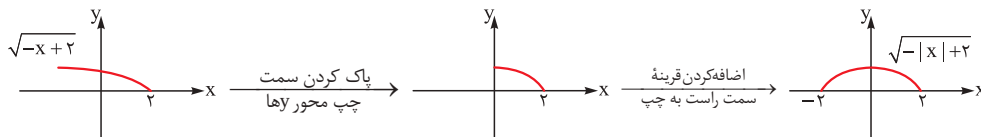


پاسخ: اگر در تابع $y = \sqrt{2-x}$ ، جای x ، $|x|$ قرار دهیم به تابع $y = \sqrt{2-|x|}$ می‌رسیم.

پس اول باید تابع $y = \sqrt{-x+2}$ را بکشیم:



حالا جای x ها، $|x|$ قرار می‌دهیم:



تبدیل‌هایی که به حل معادله یا نامعادله ختم می‌شوند.

یکی از سؤالات مورد علاقه طراحان کنکور در این قسمت این‌جوری است که تابع f را بعد از یک سری تبدیلات به تابع g تبدیل می‌کنند، بعد یکی از این سؤالات را می‌پرسند:

۱) نقطه برخورد f و $g \Leftarrow$ جواب معادله $f(x) = g(x)$

۲) نقطه برخورد g با نیمساز ناحیه اول و سوم $\Leftarrow$ جواب معادله $g(x) = x$

۳) کجا f بالای g است؟ $\Leftarrow f(x) > g(x)$

۴) کجا g بالای نیمساز ناحیه اول و سوم است؟ $\Leftarrow g(x) > x$

یا ...

یک نمونه ببینید:

تست: نمودار تابع $y = \sqrt{1-2x}$ را در امتداد محور x ها، ۱ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور y ها، ۱ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. اگر

نقطه برخورد نمودار جدید و نمودار اولیه را A بنامیم، مجموع طول و عرض نقطه A کدام است؟

۱۱/۸ (۴)

۹/۸ (۳)

۷/۸ (۲)

۵/۸ (۱)

$$y = \sqrt{1-2x} \xrightarrow{\text{واحد راست}}_{(x \rightarrow x-1)} y = \sqrt{1-2(x-1)} = \sqrt{-2x+3} \xrightarrow{\text{واحد پایین}} y = \sqrt{-2x+3}-1$$

پاسخ ۲: اول ضابطه تابع جدید را به دست می آوریم:

ضابطه تابع جدید و تابع اولیه را برابر قرار می دهیم و معادله گنگ به دست آمده را حل می کنیم:

$$y_{\text{جدید}} = y_{\text{اولیه}} \Rightarrow \sqrt{-2x+3}-1 = \sqrt{-2x+1} \xrightarrow{\text{توان ۲}} -2x+3+1-2\sqrt{-2x+3} = -2x+1$$

$$\Rightarrow \sqrt{-2x+3} = \frac{3}{2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} -2x+3 = \frac{9}{4} \Rightarrow 2x = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{8}$$

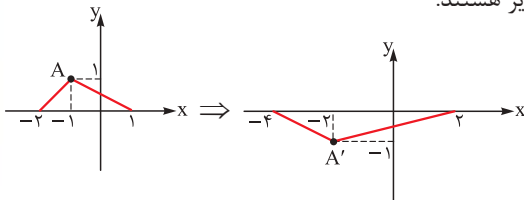
$$y_A = \sqrt{1-2\left(\frac{3}{8}\right)} = \frac{1}{2}$$

با جای گذاری $x = \frac{3}{8}$ ، در ضابطه تابع اولیه (یا جدید)، عرض نقطه برخورد را حساب می کنیم:

$$x_A + y_A = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$$

پس نقطه برخورد دو تابع، $A\left(\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right)$ است و داریم:

پیدا کردن نقطه متناظر فرض کنید نمودارهای $y = f(x)$ و $y = -f\left(\frac{x}{2}\right)$ به صورت زیر هستند:



در نمودارهای مقابل نقطه $A'(-2, -1)$ را نقطه متناظر با $A(3, -4)$ می نامیم. در یک سری از سوالات، نقطه ای را روی یک تابع به ما می دهند و از ما نقطه متناظر با آن را روی یک تابع جدید می خواهند. برای این کار ۲ روش وجود دارد؛ این دو روش را با یک مثال توضیح می دهیم.

فرض کنید نقطه $A(3, -4)$ روی تابع $y = f(x)$ است و نقطه متناظر با A روی تابع $y = 2f(2x-1)+1$ را می خواهیم:

راه اول: مراحل تبدیل تابع $f(x)$ به $2f(2x-1)+1$ را می نویسیم:

$$f(x) \xrightarrow{\text{واحد راست}}_{x \rightarrow x-1} f(x-1) \xrightarrow{\text{۱/۲ ضرب در x}}_{x \rightarrow 2x} f(2x-1) \xrightarrow{\text{۲ ضرب در y}} 2f(2x-1) \xrightarrow{\text{واحد بالا}} 2f(2x-1)+1$$

همین مراحل را روی نقطه $A(3, -4)$ اعمال می کنیم:

$$(3, -4) \xrightarrow{\text{واحد راست}}_{x \rightarrow x-1} (4, -4) \xrightarrow{\text{۱/۲ ضرب در x}} (2, -4) \xrightarrow{\text{۲ ضرب در y}} (2, -8) \xrightarrow{\text{واحد بالا}} (2, -7)$$

نقطه متناظر

راه دوم: نقطه $(3, -4)$ روی $y = f(x)$ است، پس $f(3) = -4$.

الان برای یافتن طول نقطه متناظر روی $2f\left(\frac{2x-1}{2}\right)+1$ باید $2x-1$ برابر ۳ باشد:

$$2x-1=3 \Rightarrow x=2$$

$$y = 2f(2x-1) \xrightarrow{x=2} y = 2f(3)+1$$

$$y = 2f(3)+1 = -7$$

$$A'(2, -7)$$

پس $x=2$ و $y=-7$ است:

دامنه و برد تابع تبدیل یافته اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ را داشته باشیم، برای به دست آوردن دامنه و برد تابع $y = af(bx+c)+d$ دوتا روش داریم:

راه اول: مراحل رسیدن از تابع $f(x)$ به $af(bx+c)+d$ را می نویسیم. همین

مراحل را برای بازه های دامنه و برد انجام می دهیم.

راه دوم: برای محاسبه دامنه، a و d بی اثرند؛ آن ها را حذف می کنیم:

و برای محاسبه برد، b و c بی اثرند و حذفشان می کنیم:

$$\begin{array}{ccc} \uparrow \text{بی اثر} & & \uparrow \text{بی اثر} \\ af(bx+c)+d & \xrightarrow{\text{حذف بی اثرها}} & f(bx+c) \\ \downarrow \text{بی اثر} & & \downarrow \text{بی اثر} \\ af\left(\frac{bx+c}{a}\right)+d & \xrightarrow{\text{حذف بی اثرها}} & af(x)+d \end{array}$$

تست: اگر دامنه تابع $y = f(x)$ بازه $[-2, 5]$ باشد، دامنه تابع $y = -2f(1-2x)+1$ کدام است؟

(۴) $[-3/5, 0]$

(۳) $[-9, 5]$

(۲) $[-2, 1/5]$

(۱) $[-3, 0/5]$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow \text{بی اثر} & & \downarrow \text{بی اثر} \\ -2f(1-2x)+1 & \xrightarrow{\text{حذف بی اثرها}} & f(-2x+1) \end{array}$$

پاسخ ۲: از روش دوم استفاده می کنیم. برای محاسبه دامنه، بی اثرها را حذف می کنیم:

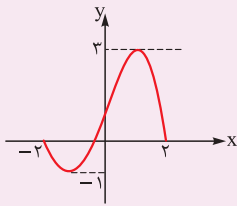
$$f(x) \xrightarrow{\text{واحد چپ}} f(x+1) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور y}}_{x \rightarrow -x} f(-x+1) \xrightarrow{\text{۱/۲ ضرب در x}}_{x \rightarrow 2x} f(-2x+1)$$

حالا باید از $f(x)$ به $f(-2x+1)$ برسیم:

$$[-2, 5] \xrightarrow{\text{واحد چپ}} [-3, 4] \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور y}} [-4, 3] \xrightarrow{\text{۱/۲ ضرب در x}} \left[-2, 1/5\right]$$

دامنه جدید

همین مراحل را برای بازه $[-2, 5]$ می رویم:



تست: شکل مقابل نمودار تابع $y = f(\frac{x}{4} - 1)$ است. برد تابع $y = -2f(x+4) + 3$ کدام است؟

- (۱) $[-3, 5]$
- (۲) $[-2, 6]$
- (۳) $[-4, 4]$
- (۴) $[-1, 7]$

پاسخ ۱: برد تابع $f(\frac{x}{4} - 1)$ با برد تابع $f(x)$ یکسان است (ولی دامنه‌هایشان متفاوت است).

$$R_f = [-1, 3]$$

با توجه به شکل، برد $f(\frac{x}{4} - 1)$ بازه $[-1, 3]$ است. پس:

حالا باید برد $y = -2f(x+4) + 3$ را پیدا کنیم. بی‌اثرها را حذف می‌کنیم:

$$-2f(x+4) + 3 \xrightarrow{\text{حذف بی‌اثر}} -2f(x) + 3$$

$$-1 \leq f \leq 3 \xrightarrow{\times(-2)} -6 \leq -2f \leq 2 \xrightarrow{+3} -3 \leq -2f + 3 \leq 5 \Rightarrow \text{برد جدید} = [-3, 5]$$

درس ۲: توابع چندجمله‌ای

تابع با ضابطه $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots$ یک چندجمله‌ای است.

برای آن که یک تابع، چندجمله‌ای باشد، باید چند شرط داشته باشد:

(۱) توان متغیرهایش عددی حسابی باشد. مثلاً $f(x) = x^3 + x^{-2}$ چندجمله‌ای نیست.

(۲) متغیر نباید زیر رادیکال یا داخل قدرمطلق برود. مثلاً $f(x) = x^2 + 2\sqrt{x+1}$ و $g(x) = 2x^3 - |x|$ چندجمله‌ای نیستند.

(۳) متغیر نباید در مخرج باشد. مثلاً تابع $f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 1}{x^2 + 1}$ چندجمله‌ای نیست.

در چندجمله‌ای‌ها، بزرگ‌ترین توان x ، درجه آن چندجمله‌ای محسوب می‌شود. مثلاً تابع $f(x) = 2x^3 - x^5 + 8x^2$ یک تابع چندجمله‌ای درجه ۵ است. چندجمله‌ای‌های معروفی که قبل از این خواندید را در جدول زیر ببینید:

بدون درجه	درجه صفر (تابع ثابت)	درجه ۱ (تابع خطی)	درجه ۲ (سه‌می)
ضابطه	$f(x) = c$ ($c \neq 0$)	$f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$)	$f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)
مثال	$y = 0$ فقط	$y = 2$	$y = 2x^2 - 7x + 3$

تست: اگر برای چندجمله‌ای $f(x) = (x+2)^2 + a(x^2 + bx) + c$ ، درجه تعریف نشود، مقدار $ac + b$ کدام است؟

- (۱) صفر
- (۲) ۴
- (۳) ۸
- (۴) -۸

پاسخ ۳: طبق گفته کتاب درسی تنها تابعی که درجه برای آن تعریف نمی‌شود، تابع ثابت $f(x) = 0$ است.

ضابطه f را ساده می‌کنیم:

برای آن که تابع ما به شکل $f(x) = 0$ درآید، ضرایب همه جملات را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$f(x) = (1+a)x^2 + (4+ab)x + (4+c) \Rightarrow \begin{cases} 1+a=0 \Rightarrow a=-1 \\ 4+ab=0 \Rightarrow 4-b=0 \Rightarrow b=4 \\ 4+c=0 \Rightarrow c=-4 \end{cases}$$

$$ac + b = (-1)(-4) + 4 = 8$$

پس:

نکته: توابع چندجمله‌ای از درجه فرد، بردشان $\mathbb{R}$ است ولی برد توابع چندجمله‌ای درجه زوج به صورت $[a, +\infty)$ یا $(-\infty, a]$ است.

تست: اگر برد تابع $f(x) = (a-2)x^5 + (b+1)x^3 + bx^2 + ax + c$ ، بازه $(-\infty, 6]$ باشد، مقدار c کدام است؟

- (۱) ۲
- (۲) ۳
- (۳) ۴
- (۴) ۵

پاسخ ۴: چون برد تابع چندجمله‌ای ما $\mathbb{R}$ نشده، پس باید چندجمله‌ای ما درجه زوج باشد. در نتیجه ضرایب x^5 و x^3 باید صفر باشند:

$$\begin{cases} a-2=0 \Rightarrow a=2 \\ b+1=0 \Rightarrow b=-1 \end{cases}$$

درس ۱: تبدیل نمودارها

انتقال افقی و عمودی

۱- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ \frac{x}{2} & x < 1 \end{cases}$ را ۲ واحد به سمت راست و ۱ واحد بالا ببریم، ضابطه تابع جدید کدام می‌شود؟

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x-1 & x \geq 3 \\ \frac{x}{2}-1 & x < 3 \end{cases} \quad (1) & \begin{cases} 2x-1 & x \geq 3 \\ \frac{x}{2}-1 & x < 3 \end{cases} \quad (2) & \begin{cases} 2x-3 & x \geq 1 \\ \frac{x}{2} & x < 1 \end{cases} \quad (3) & \begin{cases} 2x-3 & x \geq 3 \\ \frac{x}{2} & x < 3 \end{cases} \quad (4) \end{aligned}$$

۲- نمودار $y = x^2 + 6x + 5$ را حداقل چند واحد به سمت راست حرکت دهیم تا طول دو نقطه مشترک آن با نمودار $y = |x|$ نامنفی باشد؟ (انسانی ۱۴۰۱)

$$(1) \quad 2 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 4 \quad (4) \quad 5$$

۳- اگر نمودار تابع $y = |x-1| + 2$ را ۲ واحد به چپ و k واحد به بالا ببریم، نمودار جدید، نمودار اولیه را در بی‌شمار نقطه قطع می‌کند. k کدام است؟

$$(1) \quad 2 \text{ و } -4 \quad (2) \quad -2 \text{ و } 4 \quad (3) \quad -2 \text{ و } 2 \quad (4) \quad -4 \text{ و } 4$$

۴- تابع $f(x) = 3 + \sqrt{x-2}$ مفروض است. نمودار کدام تابع فقط یکی از محورهای مختصات را قطع می‌کند؟

$$(1) \quad -4 + f(x+3) \quad (2) \quad -1 + f(x+1) \quad (3) \quad -2 + f(x+3) \quad (4) \quad 2 + f(x+1)$$

۵- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 4x - x^2$ را در امتداد محور x ها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۱)

$$(1) \quad 1 \quad (2) \quad 2 \quad (3) \quad 2\sqrt{5} \quad (4) \quad \sqrt{10}$$

۶- اگر نمودار $f(x) = x^2 - 2x + 2$ را k واحد به راست و $2k$ واحد به بالا انتقال دهیم، رأس سهمی حاصل بر رأس سهمی $y = x^2 - 4x + a$ منطبق خواهد شد. مقدار $k+a$ کدام است؟

$$(1) \quad 9 \quad (2) \quad 6 \quad (3) \quad 7 \quad (4) \quad 8$$

۷- تابع $y = 2^{x+|x|}$ را ۳ واحد در امتداد محور x ها در جهت منفی و سپس در امتداد محور y ها ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. منحنی حاصل، محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟ (تجربی خارج ۱۴۰۰)

$$(1) \quad -\frac{5}{2} \quad (2) \quad -\frac{3}{2} \quad (3) \quad \frac{5}{2} \quad (4) \quad \frac{7}{2}$$

۸- در تابع $f(x) = |x-k|$ ، اگر مساحت ناحیه محدود به نمودار توابع $y = f(x-\alpha)$ و $y = f(x-2\alpha)$ و محور x ها ۱۸ باشد، مقدار مثبت α کدام است؟

$$(1) \quad 4\sqrt{2} \quad (2) \quad 6\sqrt{2} \quad (3) \quad 4 \quad (4) \quad 8$$

۹- اگر معادله $|4x-2| = x^2 - x + a$ دارای سه ریشه حقیقی باشد، ریشه بزرگ‌تر معادله کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۴)

$$(1) \quad 4 \quad (2) \quad 4/5 \quad (3) \quad 5 \quad (4) \quad 5/4$$

قرینه‌یابی

۱۰- برای رسم نمودار تابع $y = -\frac{1}{4}|2x+1|$ به کمک نمودار $y = |x|$ کدام مورد برای کامل کردن جمله زیر، مناسب است؟ (انسانی ۱۴۰۲)

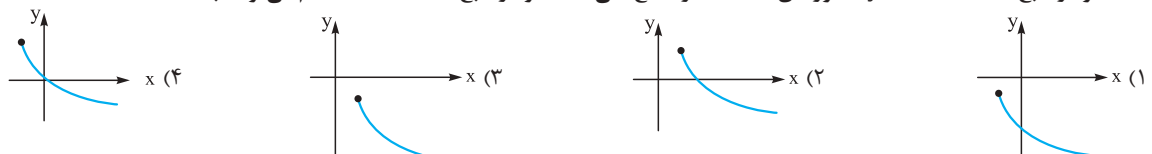
«ابتدا نمودار تابع قدرمطلق را $\frac{1}{4}$ واحد به سمت جابه‌جا کرده و سپس قرینه آن را نسبت به محور رسم می‌کنیم.»

$$(1) \quad \text{چپ} - x \text{ ها} \quad (2) \quad \text{راست} - x \text{ ها} \quad (3) \quad \text{بالا} - y \text{ ها} \quad (4) \quad \text{پایین} - y \text{ ها}$$

۱۱- اگر نمودار $f(x) = a - \sqrt{x+b}$ به صورت روبه‌رو باشد، $f(1)$ کدام است؟

$$(1) \quad 1 \quad (2) \quad \frac{1}{2} \quad (3) \quad \text{صفر} \quad (4) \quad 2 - \sqrt{3}$$

۱۲- نمودار تابع $y = a + \sqrt{x-b}$ محورهای مختصات را قطع نمی‌کند. نمودار تابع $a - \sqrt{x+b}$ کدام می‌تواند باشد؟



۱۳- نمودار توابع f و g در شکل مقابل فقط با دو تبدیل انتقال و قرینه‌یابی به یکدیگر تبدیل شده‌اند، به طوری که

$$g(x) + f(a-x) = b \quad \text{مقدار } b-a \text{ کدام است؟}$$

$$(1) \quad -3 \quad (2) \quad -2 \quad (3) \quad 3 \quad (4) \quad 4$$

۱۴- اگر $g(x) = f(3-x) + 4$ و $g = \{(2, 3), (5, 1), (6, -3)\}$ باشد، حاصل $\frac{f(-2) + 3f(-3)}{f(1)}$ کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) -۲۴ (۳) ۱۲ (۴) -۱۲

۱۵- مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $f(x) = x + |x|$ و $g(x) = 2 - f(-x)$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۲

۱۶- نمودار تابع $y = |x - 1| + 1$ را ۴ واحد به چپ و ۲ واحد به بالا می‌بریم، سپس آن را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. نمودار حاصل و نمودار اولیه، نسبت به چه نقطه‌ای قرینه هم هستند؟

- (۱) $(-2, -1)$ (۲) $(-1, -1)$ (۳) $(-1, -2)$ (۴) $(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$

۱۷- قرینه نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم. منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط، متقارن هستند؟

- (۱) $x = 1$ (۲) $x = 1/5$ (۳) $x = 2$ (۴) $x = 2/5$

۱۸- نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در امتداد محور x ها، ۱ واحد در جهت مثبت و سپس قرینه آن نسبت به محور x ها را در امتداد محور y ها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۳) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

۱۹- نمودار تابع $y = 3 - \sqrt{2x}$ را ابتدا یک واحد در امتداد محور x ها در جهت منفی و سپس قرینه آن نسبت به محور x ها را ۵ واحد در امتداد محور y ها در جهت مثبت انتقال می‌دهیم. طول نقطه برخورد نمودار تابع جدید با تابع ثابت $f(x) = \frac{y}{2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{16}$

۲۰- نمودار $y = f(3 - \frac{x}{b})$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم و a واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم و به تابع $y = f(\frac{x}{a})$ می‌رسیم، ab کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۴

وقتی خط بر منحنی درجه ۲ مماس است، دلتای معادله تلاقی خط و منحنی، صفر است.

۲۱- سهمی $f(x) = x^2 + 4x$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کرده، سپس ۳ واحد به سمت بالا و نهایتاً ۳ واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم. شکل حاصل بر خط $y = mx - 1$ مماس می‌شود، مقدار m کدام است؟

- (۱) -۳ و ۴ (۲) ۴ و صفر (۳) -۲ و صفر (۴) ۴ و ۶

۲۲- سهمی $f(x) = x^2 + ax + b$ را دو واحد به بالا انتقال می‌دهیم و نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم؛ نمودار حاصل بر نیمساز ناحیه اول مماس می‌شود. اگر یک واحد به پایین انتقال دهیم و سپس نسبت به محور x ها قرینه کنیم بر نیمساز ناحیه دوم مماس می‌شود؛ مقدار ab کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۲۳- اگر $f(x) = x^2 + 4x + 1$ باشد، نمودار کدام تابع به موازات محور طول‌هاست؟

- (۱) $f(x - 4) + f(x + 4)$ (۲) $f(x) - f(4 - x)$ (۳) $f(x + 4) - f(x - 4)$ (۴) $f(x) - f(-4 - x)$

۲۴- تابع $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کرده و آن را ۲ واحد به راست و ۳ واحد به پایین انتقال می‌دهیم. اگر تابع حاصل g باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{1+2g(x-1)}$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶

برای این‌که نمودارهای ابرویی ($\sqrt{x}$) از ناحیه‌ای عبور نکنند، نقطه شروع باید در جایگاه درست باشد.

۲۵- اگر $f(x) = 2 - \sqrt{1-x}$ نمودار کدام تابع، محورهای مختصات را قطع نمی‌کند؟

- (۱) $y = f(x - 2) + 3$ (۲) $y = f(x + 2) - 3$ (۳) $y = f(x - 2) - 3$ (۴) $y = f(x + 2) + 3$

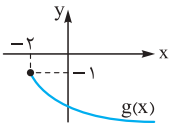
۲۶- $f(x) = 2 + \sqrt{2x - 6}$ داده شده است. a در کدام بازه باشد تا نمودار تابع $y = -a - f(3 + a - x)$ محورهای مختصات را قطع نکند؟

- (۱) $(-2, 1)$ (۲) $(-2, 0)$ (۳) $(-3, -1)$ (۴) $(-3, -\frac{1}{2})$

۲۷- نمودار تابع $f(x) = \log_3(x + 1)$ را ابتدا دو واحد به راست منتقل کرده، سپس قرینه نمودار حاصل را نسبت به محور x ها رسم کرده و یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع g به دست آید. عرض نقطه تقاطع نمودارهای f و g کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $1/5$ (۴) $2/5$

۲۸- اگر فقط دو تبدیل انتقال و قرینه‌یابی را به کار بگیریم و از نمودار $f(x) = \sqrt{3-x}$ به نمودار مقابل برسیم، مقدار $f(g(23))$ کدام است؟



- (۱) ۶
(۲) ۴
(۳) ۳
(۴) ۹

۲۹- نمودار تابع $f(x) = x + \sqrt{x-2}$ را سه واحد به راست و دو واحد به پایین انتقال می‌دهیم. اگر نمودار حاصل را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم و نمودار نهایی خط $y - 2x = k$ را در نقطه‌ای به طول ۹ قطع کند، مقدار k کدام است؟

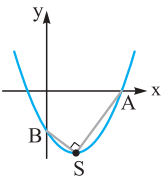
- (۱) ۲۱
(۲) ۱۸
(۳) ۲۴
(۴) ۲۰

۳۰- $f(x) = 2 + \sqrt{6-x}$ را ۳ واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم و سپس نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع g به دست آید. اگر تابع $g(\frac{x}{2}) + kx$ نمودار f را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند، $g(k+2)$ کدام است؟

- (۱) صفر
(۲) ۲
(۳) ۱
(۴) $2 + \sqrt{5}$

شرط عمودبودن دو خط این است که حاصل ضرب شیب‌هایشان -۱ باشد.

۳۱- نمودار تابع $f(x) = ax(x+6)$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کرده و یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم. نمودار نهایی به شکل مقابل است. مقدار مثبت a کدام است؟



- (۱) $\sqrt{6}$
(۲) $\sqrt{3}$
(۳) $\frac{\sqrt{6}}{6}$
(۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۳۲- اگر $f(x) = \frac{1}{2x-3}$ را k واحد به چپ انتقال دهیم و آن را g در نظر بگیریم و بار دیگر نمودار f را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم و آن را h بنامیم، به طوری که $(g+h)(x)$ تابع ثابت باشد، مقدار $f(k)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{9}$
(۲) $-\frac{1}{9}$
(۳) $\frac{1}{3}$
(۴) $-\frac{1}{3}$

۳۳- سهمی $f(x) = x^2 - 6x + 6$ را نسبت به محور y ها قرینه کرده و سپس k واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم و مجدد نمودار f را نسبت به محور x ها قرینه کرده و k واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم. اگر رأس دو سهمی به‌دست آمده ۱۰ واحد فاصله داشته باشند، مقدار مثبت k کدام است؟

- (۱) ۸
(۲) ۴
(۳) ۶
(۴) $\sqrt{14}$

۳۴- تابع $f(x) = \frac{1}{\Delta x + 4}$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کنیم، با کدام انتقال تابع حاصل بر نمودار f منطبق خواهد شد؟

- (۱) $\frac{4}{\Delta}$ واحد به راست
(۲) $\frac{4}{\Delta}$ واحد به چپ
(۳) $\frac{4}{\Delta}$ واحد به راست
(۴) $\frac{4}{\Delta}$ واحد به چپ

۳۵- قرینه نمودار تابع $f(x) = (x+2)^2 - 4$ نسبت به مبدأ مختصات را k واحد به سمت چپ انتقال داده‌ایم. به طوری که جمع طول نقاط تلاقی تابع حاصل با تابع $f(x)$ برابر ۳ باشد. مقدار k کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۳
(۳) -۳
(۴) ۴

۳۶- اگر تابع $f(x) = \frac{1}{2x+3}$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه کنیم و سپس k واحد در راستای افقی انتقال دهیم، تابع حاصل منطبق بر نمودار $f(x)$ می‌شود. k کدام است؟

- (۱) -۳
(۲) -۴
(۳) -۵
(۴) -۶

برای قرینه‌کردن یک نمودار نسبت به نقطه $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ کافیست x را به $x - \alpha$ و y را به $y - \beta$ تبدیل کنیم.

۳۷- نمودار $y = x^2 - 4x + 3$ را نسبت به نقطه $(3, -2)$ قرینه می‌کنیم و آن را g می‌نامیم، $g(-1)$ کدام است؟

- (۱) -۲۸
(۲) -۸
(۳) -۲۴
(۴) -۳۲

برای قرینه‌کردن یک تابع نسبت به خط $x = \alpha$ کافیست به جای x ، $x - \alpha$ قرار دهیم و به دست نزنیم.

۳۸- اگر نمودار $f(x) = \sqrt{2x(2x+1)}$ را ۳ واحد به چپ انتقال دهیم سپس نسبت به خط $x = 2$ قرینه کنیم، نمودار به‌دست آمده خط $y = ax - 7\sqrt{2}$ در نقطه‌ای به طول ۸ قطع می‌کند. a کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{2}$
(۲) $2\sqrt{2}$
(۳) $3\sqrt{2}$
(۴) $\sqrt{2}$

۳۹- نمودار تابع $f(x) = 2x^2 - 12x + 3$ را نسبت به خط $x = -1$ قرینه کرده و سپس ۲ واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم و تابع $g(x)$ به دست می‌آید. توابع f و g نسبت به کدام خط زیر تقارن دارند؟

- (۱) $x = 3$
(۲) $x = -3$
(۳) $x = 2$
(۴) $x = -2$

۴۰- سهمی $y = f(x)$ را یک بار ۴ واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم و یک بار آن را نسبت به خط $x = 3$ قرینه می‌کنیم، دو سهمی به‌دست آمده بر هم منطبق هستند. طول رأس سهمی $y = f(x)$ کدام است؟

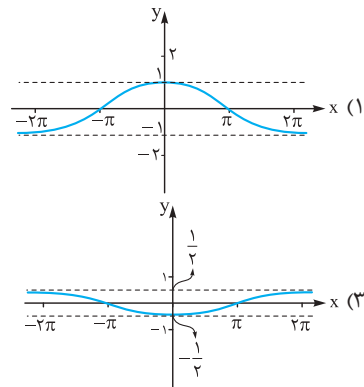
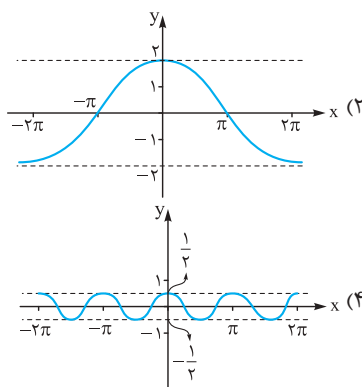
- (۱) ۱
(۲) -۱
(۳) ۲
(۴) -۲

۴۱- با کدام تبدیل می‌توانیم از تابع $y = f(3 - \frac{x}{4})$ به تابع $y = f(\frac{x+1}{4})$ برسیم؟

- (۱) ابتدا ۳ واحد به راست انتقال دهیم؛ سپس نسبت به خط $x = 2$ قرینه کنیم.
 (۲) ابتدا یک واحد به چپ انتقال دهیم و سپس نسبت به خط $x = -2$ قرینه کنیم.
 (۳) ابتدا نسبت به خط $x = 2$ قرینه کرده و یک واحد به راست انتقال دهیم.
 (۴) ابتدا نسبت به خط $x = -2$ قرینه کرده و ۳ واحد به چپ انتقال دهیم.

انبساط و انقباض

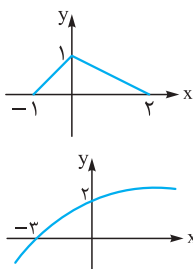
۴۲- تابع $f(x) = -\frac{1}{4} \cos(\frac{x}{4})$ به کدام صورت است؟



۴۳- با کدام تبدیلات از نمودار $y = 3f(\frac{x}{4})$ می‌توان به نمودار $g(x) = 4f(\frac{x}{3})$ رسید؟

- (۱) انبساط افقی - انبساط عمودی
 (۲) انقباض افقی - انقباض عمودی
 (۳) انقباض افقی - انبساط عمودی
 (۴) انقباض افقی - انقباض عمودی

۴۴- شکل مقابل مربوط به نمودار تابع $y = f(x)$ است. مساحت محدود به نمودار تابع $y = 2f(\frac{x}{3})$ و محور x ها کدام است؟



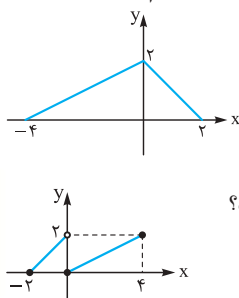
- (۱) ۱
 (۲) ۳
 (۳) ۶
 (۴) ۹

۴۵- اگر نمودار f شکل مقابل باشد، نقاط برخورد تابع $y = 3f(-\frac{x}{4})$ با محورهای مختصات چه قدر از هم فاصله دارند؟

- (۱) $6\sqrt{3}$
 (۲) ۶
 (۳) $4\sqrt{2}$
 (۴) $6\sqrt{2}$

قدرمطلق را حذف کنید و در دو حالت نمودار $g(x)$ را رسم کنید.

۴۶- اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، مساحت سطح زیر منحنی تابع $g(x) = f(|x| - x)$ و محور x ها در بازه $[-1, 6]$ کدام است؟



- (۱) ۱۱
 (۲) ۱۲
 (۳) ۱۳
 (۴) ۱۴

۴۷- شکل مقابل نمودار تابع $y = f(x)$ است. اگر معادله $f(x) = g(x)$ بی‌شمار جواب داشته باشد، کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $f(\frac{x}{4} + 2)$
 (۲) $f(2x + 4)$
 (۳) $f(\frac{x}{4} - 4)$
 (۴) $f(2x + 2)$

ترکیب انتقال، قرینه‌یابی، انبساط و انقباض

۴۸- پس از اعمال تغییراتی روی نمودار تابع f ، نمودار تابع g به دست می‌آید. به طوری که نقطه $(\alpha, \beta) \in f$ به نقطه $(1 - \alpha, \frac{1}{4}\beta) \in g$ تبدیل می‌شود. این

تغییرات، به ترتیب در کدام گزینه آمده است؟

- (۱) بازتاب نسبت به محور y ها، یک واحد انتقال به راست، انبساط عمودی با ضریب ۲
 (۲) یک واحد انتقال به چپ، بازتاب نسبت به محور y ها، انبساط عمودی با ضریب ۲
 (۳) بازتاب نسبت به محور y ها، یک واحد انتقال به چپ، انقباض عمودی با ضریب $\frac{1}{4}$
 (۴) یک واحد انتقال به چپ، بازتاب نسبت به محور y ها، انقباض عمودی با ضریب $\frac{1}{4}$

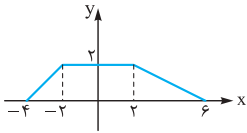
۴۹- اگر $g = \{(6, 3), (-1, 4), (0, 2)\}$ و $g(x) = 2f(3-2x) + 5$ باشد، مقدار $\frac{f(-9)+f(5)}{f(3)}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۵۰- دانش آموزی برای رسم نمودار تابع $y = f(2x+6)$ ، به اشتباه طول تمام نقاط روی نمودار را نصف کرد و سپس آن را ۶ واحد به سمت راست برد. او با کدام انتقال می تواند اشتباهش را جبران کند؟

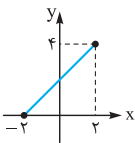
- (۱) ۳ واحد چپ (۲) ۳ واحد راست
(۳) ۹ واحد چپ (۴) ۹ واحد راست

۵۱- نمودار f به صورت مقابل است. مساحت محدود به نمودار تابع $y = 3f(1-\frac{x}{3})$ و خط $y = 3$ کدام است؟



- (۱) $52/5$ (۲) $45/5$
(۳) $36/3$ (۴) $49/5$

۵۲- نمودار f به شکل مقابل است. تابع $g(x) = 4 + 3f(2x+1)$ بیانگر یک پاره خطی است. طول پاره خطی که تابع g تولید می کند، کدام است؟



- (۱) $4\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{72}$
(۳) $\sqrt{68}$ (۴) $\sqrt{148}$

وقتی صحبت از تعداد جواب هاست، حتماً باید نمودار را رسم کنید.

۵۳- قرینه نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} |2x-3| & x \geq 1 \\ x^2-1 & x < 1 \end{cases}$ نسبت به محور x ها را با ضریب ۲ انبساط عمودی می دهیم و سپس نمودار حاصل را یک واحد به بالا منتقل می کنیم تا نمودار تابع g به دست آید. به ازای کدام مقدار a ، معادله $g(x) = a$ سه جواب دارد؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) ۲

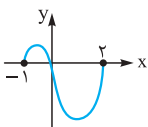
۵۴- $f(x) = (x-2)^2 - 1$ داده شده است. هرگاه نمودار تابع $g(x) = a + 4f(b - \frac{x}{4})$ بر نمودار f منطبق باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) -۱ (۳) ۴ (۴) صفر

۵۵- طول نقاط تابع $f(x) = (x-6)^2 - 31$ را نصف کرده و آن را a واحد در راستای افقی به سمت چپ انتقال می دهیم. تابع به دست آمده را $g(x)$ می نامیم.

اگر $y = \frac{b+g(x)}{4x}$ همانی باشد، حاصل ab کدام است؟

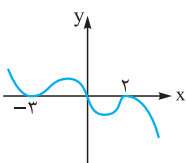
- (۱) ۹۶ (۲) ۹۳ (۳) ۷۲ (۴) ۱۲۰



(مثل کتکور)

۵۶- اگر نمودار $y = f(1+x)$ به شکل روبه رو باشد، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{-x \cdot f(\frac{1+x}{4})}$ کدام است؟

- (۱) $[-2, 4]$ (۲) $[-1, 0] \cup [1, 5]$
(۳) $[-3, -1] \cup [0, 3]$ (۴) $[-1, 0]$



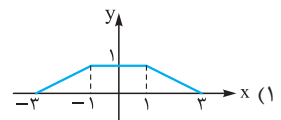
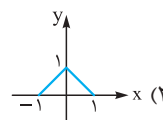
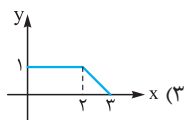
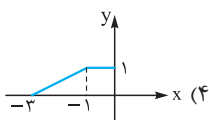
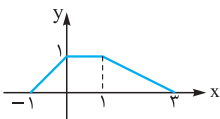
۵۷- نمودار f به شکل مقابل است. اگر نمودار f را دو واحد به چپ انتقال دهیم و تابع به دست آمده را نسبت به محور عرض ها

قرینه کنیم، تابع g به دست می آید. دامنه تعریف $y = \sqrt{f(x)g(x)}$ شامل چند عدد صحیح است؟

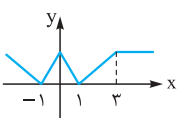
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۶

رسم نمودار $f(|x|)$ ، $f(-|x|)$ و $|f(x)|$

۵۸- نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است، نمودار تابع $y = f(|x|)$ کدام است؟

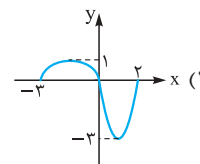
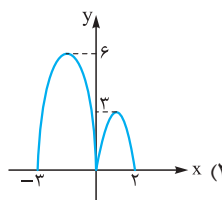
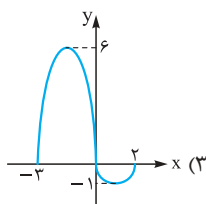
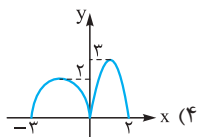
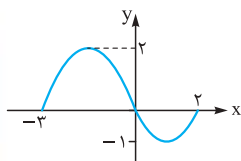


۵۹- نمودار f به شکل مقابل است. اگر $y = f(|x|-k)$ تابعی ثابت باشد، حداکثر مقدار k کدام است؟

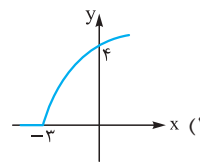
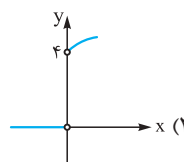
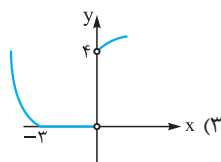
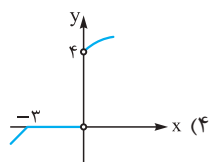
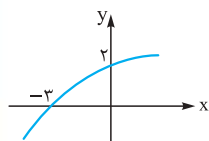


- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۲ (۴) -۲

۶۰- نمودار تابع $y = f(x)$ داده شده است. تابع $g(x) = 2f(x) + |f(x)|$ کدام است؟

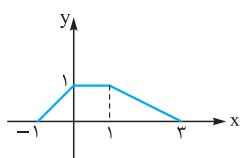


۶۱- اگر f به شکل روبه‌رو باشد، نمودار $|f(x)| + \frac{|x|}{x}f(x)$ چگونه است؟



برای رسم نمودار $f(-|x|)$ از روی نمودار $f(x)$ کافیست سمت راست نمودار را حذف کنید و قرینه سمت چپ را در سمت راست هم رسم کنید.

۶۲- شکل مقابل نمودار تابع $y = f(x-1)$ است. مساحت بین نمودار تابع $y = f(-|\frac{x}{2}|)$ و محور x ها چند واحد مربع است؟



(۲) ۶

(۱) ۴

(۴) $\frac{3}{2}$

(۳) ۱

پیدا کردن نقطه متناظر

درگیر تبدیلات نشوید. x و y داده شده را در تابع مربوط جای‌گذاری کنید و معادله حل کنید.

۶۳- اگر نقطه $A = (-2, 5)$ روی تابع $y = 2f(\frac{x}{2}) - 1$ با نقطه $B(a, 9)$ روی تابع $y = kf(x+2) + a$ متناظر باشد، مقدار k کدام است؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

۶۴- نقطه $A(2, a)$ واقع بر نمودار $y = 2f(\frac{x-1}{2})$ و نقطه $A'(b, 2)$ نقطه متناظر با A روی نمودار تابع $y = 1 - 2f(\frac{x}{2})$ است. شیب خط گذرنده از نقاط

A و A' کدام است؟

(۴) -۴

(۳) ۴

(۲) -۲

(۱) ۲

۶۵- اگر صفرهای تابع $y = f(\frac{x}{2})$ اعداد ۱ و -۲ باشند، حاصل ضرب صفرهای تابع $y = -f(2-x)$ کدام است؟

(۴) $1/5$

(۳) $-2/5$

(۲) $2/5$

(۱) $4/5$

دامنه و برد تابع تبدیل یافته

برد محدوده y است نه x !

۶۶- اگر دامنه تابع $y = f(x)$ بازه $[-1, 4]$ باشد، دامنه تابع $y = 2f(2x-1) - 1$ کدام است؟

(۴) $[-4, 6]$

(۳) $[0, 10]$

(۲) $[-1, 1/5]$

(۱) $[0, 2/5]$

۶۷- اگر برد تابع $y = f(x)$ بازه $[-2, 6]$ باشد، برد تابع $y = \frac{-1}{2}f(1-3x) + 4$ کدام است؟

(۴) $(-5, -1]$

(۳) $[-5, -1)$

(۲) $(1, 5]$

(۱) $[1, 5)$

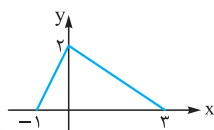
۶۸- نمودار تابع f به شکل روبه‌رو است. اشتراک دامنه و برد تابع $y = 2f(1+2x) - 3$ کدام است؟

(۲) $[-1, 1]$

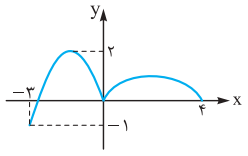
(۱) $\{-1\}$

(۴) $[-1, 0]$

(۳) $[-3, 1]$



۶۹- اگر نمودار تابع $y = 2f(x-1)$ به صورت روبه‌رو باشد، اشتراک دامنه و برد تابع $g(x) = -f(\frac{x}{4}) + 6$ کدام است؟



- (۱) $(\frac{5}{6}, \frac{5}{4})$
(۲) $(\frac{4}{5}, \frac{5}{4})$
(۳) $(\frac{5}{6}, 6]$
(۴) $(\frac{5}{4}, 7]$

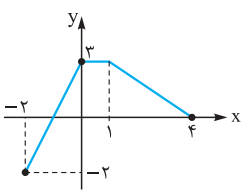
(تجربی ۱۴۰۳)

۷۰- دامنه تابع $y = f(x)$ و $y = f(kx)$ برابر $[b, c]$ است. اگر $k = 2a^2 - a - 5$ باشد، حاصل ضرب مقادیر a کدام است؟

- (۱) -3
(۲) 3
(۳) $-\frac{2}{5}$
(۴) $\frac{2}{5}$

۷۱- نمودار تابع $f(x) = 3 - \sqrt{2x-4}$ را ۳ واحد به چپ و ۴ واحد به بالا انتقال می‌دهیم و تابع به‌دست‌آمده را g می‌نامیم. اشتراک دامنه و برد g شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) 6
(۲) 7
(۳) 9
(۴) 8



۷۲- نمودار f به شکل روبه‌رو و اشتراک دامنه و برد تابع $y = a + f(x-1)$ یک مجموعهٔ تک‌عضوی است. جمع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

- (۱) 11
(۲) 1
(۳) -1
(۴) 3

۷۳- تابع $y = f(x)$ با دامنه $[-3, 1]$ و برد $[-3, 0]$ مفروض است. اگر دامنه و برد تابع $y = a + bf(1-2x)$ برابر هم باشند، با فرض $b < 0$ ، حاصل $a-b$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$
(۲) $\frac{2}{3}$
(۳) $\frac{5}{3}$
(۴) 2

۱۰۰ شو

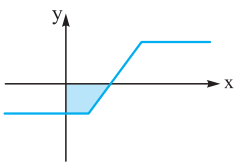
۷۴- نمودار $\frac{1}{f}$ را در امتداد محور x ها، a واحد در جهت مثبت انتقال داده و آن را g می‌نامیم. سپس تابع $|g|$ را در امتداد محور y ها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. طول نقطهٔ برخورد منحنی حاصل با نمودار $\frac{1}{|f|}$ برابر $\frac{\sqrt{2}}{4}$ است. اگر f همانی باشد، اختلاف مقادیر x در تساوی $f(x+a) = 3$ کدام است؟

(تجربی ۱۴۰۲)

- (۱) $2 + \sqrt{2}$
(۲) 2
(۳) $2 - \sqrt{2}$
(۴) $\sqrt{2}$

۷۵- اگر $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x \leq 0 \end{cases}$ و خط $y = 6$ نمودار تابع $y = a + f(x-a)$ را در ناحیهٔ اول قطع نکند، حداقل مقدار a کدام است؟

- (۱) 16
(۲) 8
(۳) 9
(۴) 12



۷۶- نمودار تابع $f(x) = |x+1| - |x-5|$ را ۳ واحد به راست و k واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا به نموداری مطابق شکل مقابل برسیم. به ازای کدام مقدار k ، مساحت ناحیهٔ رنگی برابر ۵ است؟

- (۱) 3
(۲) 4
(۳) 5
(۴) 6

۷۷- نمودار تابع $y = 3^{\sin x}$ را ابتدا به اندازهٔ $\frac{\pi}{4}$ در امتداد محور x ها در جهت مثبت و سپس $\frac{3}{4}$ واحد در امتداد محور y ها در جهت منفی انتقال می‌دهیم. تعداد محل تقاطع نمودار حاصل با محور x ها در فاصلهٔ $[0, \pi]$ کدام است؟

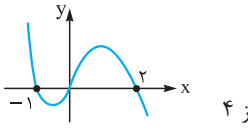
(تجربی ۱۴۰۰)

- (۱) صفر
(۲) 1
(۳) 2
(۴) 4

۷۸- نمودار تابع $f(x) = |2x+1|$ را k واحد به چپ، $\frac{1}{5}$ واحد به طرف پایین انتقال می‌دهیم و شکل حاصل را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم. نمودار نهایی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم را در نقاطی با طول α و $\alpha - 4$ قطع می‌کند، k کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$
(۲) 1
(۳) -4
(۴) -16

۷۹- شکل مقابل، نمودار $y = f(x-2)$ را نشان می‌دهد. دامنهٔ تابع $g(x) = \frac{f(1-x)}{f(x+1)}$ ، شامل چند عدد صحیح است؟

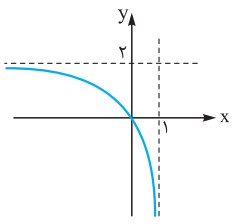


- (۱) 4
(۲) 2
(۳) صفر
(۴) بیش از ۴

۸۰- اگر $f(x) = 3 - \sqrt{2-x}$ و نمودار تابع $g(x) = a - f(b+x)$ محورهای مختصات را قطع نکند، کدام گزینه صحیح است؟

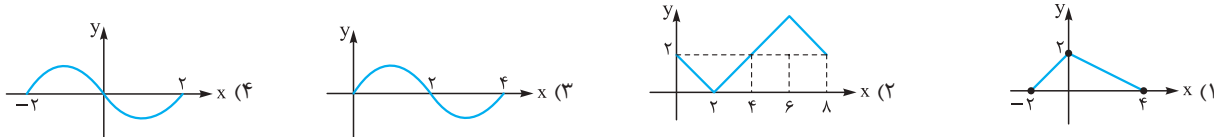
- (۱) $a < -3$ و $b > 2$
(۲) $a > 3$ و $b > 2$
(۳) $a > 3$ و $a < -2$
(۴) $a > 3$ و $b < -2$

۸۱- قسمتی از نمودار تابع هموگرافیک f به صورت مقابل است. نمودار تابع $\frac{1}{f}$ را در راستای افقی ۲ واحد به سمت راست انتقال داده و سپس نمودار حاصل را نسبت به محور x ها قرینه کرده و ۳ واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم. نمودار نهایی، محور x ها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟



- (۱) $-\frac{15}{7}$
(۲) $\frac{13}{7}$
(۳) $-\frac{13}{7}$
(۴) $\frac{15}{7}$

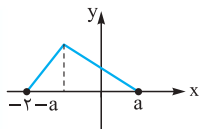
۸۲- نمودار توابع $f(x)$ و $f(-x)$ بر هم منطبق شده است. نمودار تابع $f(2-x)$ کدام می تواند باشد؟



۸۳- اگر $g(x) = 3x^2 - 2x$ و نمودار $f(x) = \sqrt{g(x)}$ را دو واحد به سمت راست انتقال دهیم و سپس نمودار حاصل را نسبت به خط $x=1$ قرینه کنیم، نمودار حاصل خط $y+3=mx$ را در نقطه‌ای به طول $x=-9$ قطع می کند. مقدار $f(m)$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۸۴- نمودار تابع f به شکل زیر است. نمودار f را دو واحد به سمت راست انتقال می دهیم و نسبت به خط $2x-5=0$ بازتاب می کنیم. نمودار حاصل از ناحیه دوم عبور نکرده است. حداکثر مقدار a کدام است؟

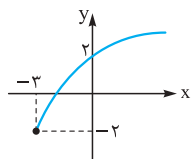


- (۱) ۶ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۵- نمودار تابع $f(x) = 2 - |x-3|$ را ابتدا نسبت به خط $y=3$ قرینه می کنیم. سپس منحنی حاصل را ۲ واحد به بالا منتقل می کنیم و در نهایت نسبت به محور طول ها قرینه می کنیم. اگر ضابطه نهایی به صورت $g(x) = a|x+b|+c$ باشد، $a+b-c$ کدام است؟

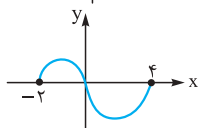
- (۱) ۲ (۲) -۸ (۳) -۴ (۴) ۸

۸۶- نمودار f به شکل زیر است. تابع $g(x) = a - 2f(\frac{x+b}{3})$ محورهای مختصات را قطع نمی کند. کدام گزینه صحیح است؟



- (۱) $a < -4$ و $b < -9$
(۲) $a < 4$ و $b > 9$
(۳) $a > 4$ و $b < -9$
(۴) $a < -4$ و $b > 9$

۸۷- شکل مقابل نمودار $y = -3f(\frac{-x}{3} + 1)$ است. اگر دامنه تابع $g(x) = \sqrt{(x+1)f(x)}$ بازه $[a, b] \cup \{c\}$ باشد، مقدار



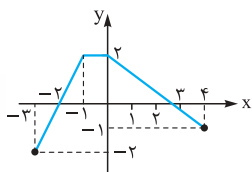
$c-b-2a$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) -۳ (۴) -۲

۸۸- خط $y=k$ ، نمودار تابع $f(x) = |x^2 - 4|x| + 3|$ را در ۶ نقطه قطع می کند و خط $y=k'$ نمودار تابع را در ۳ نقطه قطع می کند. $k'-k$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) ۱/۵

۸۹- نمودار تابع f به شکل مقابل است. نمودار تابع $|f(-|x|)|$ خط $3y+x=3$ را در n نقطه قطع می کند. $f(\frac{n+1}{3})$ کدام است؟



- (۱) ۰/۲۵
(۲) ۰/۵
(۳) صفر
(۴) ۰/۱۲۵

۹۰- نقطه $A(-2, 4)$ روی نمودار تابع $y=f(x)$ واقع شده است. اگر خط $y=2x+3$ از نقطه متناظر A روی نمودار $y=a-2f(2a-x)$ عبور کند، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) -۶ (۴) -۴

۹۱- معادله $f(x)=1$ دارای تعدادی ریشه است، به طوری که جمع ریشه ها ۱۲ است. اگر جمع ریشه های $f(2x)=1$ برابر ۶ باشد، تعداد ریشه های $f(x)=1$ کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۸ (۴) ۹

۹۲- هر نقطه مانند $A(a, b)$ روی تابع $f(x) = 3 - \sqrt{x}$ با نقطه $A'(\frac{1+a}{3}, 2b+1)$ روی $y=g(x)$ متناظر است و برعکس. اشتراک دامنه و برد تابع g شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۷ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۳

درس ۲: توابع چندجمله ای

۹۳- توابع چندجمله ای f و g به ترتیب از درجه ۳ و ۴ هستند. درجه توابع $f+g$ ، f^2 و fg به ترتیب کدام است؟

- (۱) ۱۲-۹-۷ (۲) ۱۲-۶-۴ (۳) ۷-۹-۴ (۴) ۷-۶-۴

۹۴- درجه چندجمله ای $f(x) = (x^2 + 2x + 3)^2 - (x^2 - 2x - 3)^2 - 8x^4$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲

۱. ۴ گام باید x ها را به $x-2$ تبدیل کنیم:

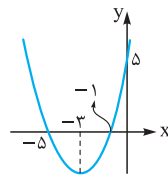
$$\begin{cases} 2(x-2) & x-2 \geq 1 \\ \frac{x-2}{2} & x-2 < 1 \end{cases} = \begin{cases} 2x-4 & x \geq 3 \\ \frac{x}{2}-1 & x < 3 \end{cases}$$

گام حالا یک واحد به y ها اضافه کنیم:

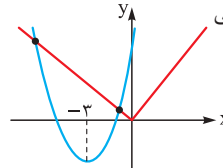
$$\begin{cases} 2x-3 & x \geq 3 \\ \frac{x}{2} & x < 3 \end{cases}$$

۲. ۴ روش گام $y = x^2 + 6x + 5$

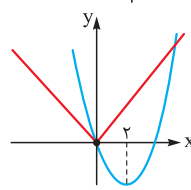
سهمی رو به بالاست، رأس در $x = -3$ و صفرهای آن -1 و -5 هستند:



گام نمودار این سهمی در دو نقطه با طول منفی $y = |x|$ را قطع می‌کند.



گام برای این که طول نقاط تلاقی منفی نباشند، باید سهمی را آنقدر به راست ببریم که تلاقی دوم (سمت چپی) در مبدأ رخ دهد:



گام پس باید محل برخورد در $x = 0$ باشد و طول رأس از -3 به 2 برسد؛ پس حداقل 5 واحد به راست لازم است.

روش معادله تلاقی $|x| = (x-k)^2 + 6(x-k) + 5$ است و باید ریشه‌اش $x = 0$ باشد:

$$k^2 - 6k + 5 = 0 \Rightarrow k = 1 \text{ یا } 5$$

و چون ریشه دیگر مثبت باید باشد، $k = 5$ مناسب است.

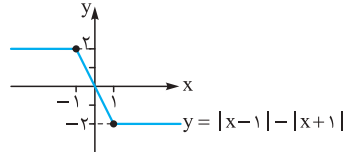
۳. گام واحد به چپ یعنی x را به $x+2$ تبدیل کنیم و k واحد به بالا یعنی y را با k جمع کنیم؛ پس ضابطه جدید برابر است با:

$$y = |x+2-1| + 2 + k \Rightarrow y = |x+1| + 2 + k$$

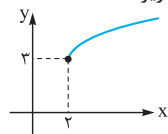
گام معادله برخورد نمودار جدید و نمودار اولیه را می‌نویسیم:

$$|x+1| + 2 + k = |x-1| + 2 \Rightarrow |x-1| - |x+1| = k$$

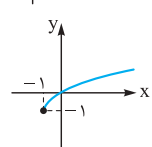
گام برای این که معادله تلاقی اخیر بی‌شمار برخورد داشته باشد، باید $k = 2$ یا $k = -2$ باشد چون اگر طبق شکل زیر، خط $y = 2$ یا $y = -2$ را رسم کنیم، با نمودار سرسره‌ای بی‌شمار نقطه برخورد دارد.



۴. ۳ گام نمودار $f(x) = 3 + \sqrt{x-2}$ به شکل زیر است:



گام نمودار گزینه‌ها را رسم کنید.

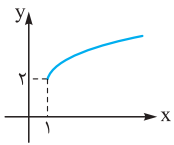


۱ تا به چپ و چهارتا پایین

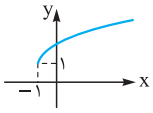
اشاره: در نمودار $y = -4 + f(x+3)$ به ازای $x = 0$ مقدار y برابر است با:

$$y = -4 + f(3) \xrightarrow{f(3)=4} y = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

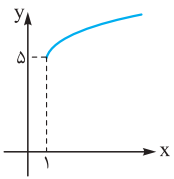
۲ یکی به چپ و یکی پایین



۳ تا به چپ و دوتا پایین



۴ یکی به چپ و دوتا بالا



گام می‌بینید که ۳ فقط یکی از محورها را قطع می‌کند.

۵. گام ضابطه انتقال یافته f به صورت $y = 4(x+2) - (x+2)^2$ ضرب و اتحاد باز است.

$$y = -x^2 + 4$$

گام از تلاقی این ضابطه و $f(x)$ داریم:

$$\xrightarrow{y_1=y_2} 4x - x^2 = -x^2 + 4 \Rightarrow x = 1$$

پس محل برخورد در $A(1, 3)$ است که فاصله آن تا مبدأ می‌شود:

$$\sqrt{x_A^2 + y_A^2} = \sqrt{10}$$

۶. ۴ گام رأس سهمی f در $\frac{y}{A} = \frac{B}{A} = \frac{2}{1} = 2$ و $x_S = f(1) = 1$ است؛ پس: $S(1, 1)$

گام با انتقال k واحد به راست و $2k$ واحد به بالا داریم: $S'(1+k, 1+2k)$

گام رأس سهمی جدید در $\frac{x_{S'}}{2(1)} = 2$ و $x_{S'} = \frac{-(-4)}{2(1)} = 2$

$$1+k=2 \Rightarrow k=1$$

$$1+2k=3$$

بنابراین $k=1$ و مقدار $a+k$ می‌شود 3 .

۷. گام با 3 واحد انتقال افقی در جهت منفی و دو واحد انتقال عمودی در جهت منفی داریم:

$$y = 2^{x+3+|x+2|} - 2$$

گام دنبال تلاقی این منحنی با محور x هستیم:

$$\xrightarrow{y=0} 2^{x+3+|x+2|} = 2$$

$$x+3+|x+2|=1$$

پس:

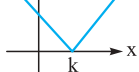
گام در دو حالت معادله اخیر را حل می‌کنیم.

$$1) x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \Rightarrow x+3+x+2=1 \Rightarrow 2x=-5 \Rightarrow x=-\frac{5}{2}$$

قابل قبول است. $\checkmark$

$$2) x+3 < 0 \Rightarrow x < -3 \Rightarrow x+3-x-2=1 \Rightarrow 0=1$$

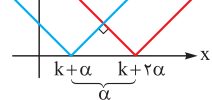
غرض $0=1$ غلط است. $\times$



۸. گام نمودار $y = |x-k|$ به شکل

مقابل است:

گام با انتقال α و 2α واحد به راست داریم:



یادآوری: مساحت مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین با وتر ℓ برابر $\frac{\ell^2}{4}$ است.

گام ناحیه محدود یک مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است، چون

شیب نیم‌خط‌ها ± 1 هستند که طول وترش α است ($\alpha > 0$).

گام ۱ با توجه به رابطه $g(x) = -f(a-x) + b$ و جای گذاری داریم:

$$\sqrt{-x-2} = -(-\sqrt{a-x-1}+3) + b$$

$$\sqrt{-x-2} = \sqrt{a-x-1} - 3 + b$$

گام ۲ تساوی فوق وقتی همواره برقرار است که داشته باشیم:

$$-x-2 = a-x-1 \Rightarrow a = -1$$

$$-3+b=0 \Rightarrow b=3 \Rightarrow b-a=4$$

روشن ۲ **گام ۱** $g(x)$ به صورت $-f(a-x) + b$ بیان شده؛ پس $f(x)$ را

a واحد به چپ می‌بریم $(1, 3)$ می‌شود $(1-a, 3)$ ؛ سپس نسبت به دو محور قرینه می‌کنیم.

(می‌شود $(a-1, -3)$) و b واحد به بالا می‌بریم (می‌شود $(a-1, b-3)$)

گام ۲ روی شکل نقطه $(-2, 0)$ و با توجه به گام اول نقطه $(a-1, b-3)$

است. پس $a = -1$ و $b = 3$ و $b-a = 4$.

تیزبازی: نقطه شروع نمودار f نشان می‌دهد $f(1) = 3$ و نقطه پایانی g

نشان می‌دهد $g(-2) = 0$ پس با قرار دادن $x = -2$ داریم:

$$g(-2) = -f(a+2) + b = 0$$

$$\underbrace{a+2}_3$$

پس: $a+2=1$ و $b=3$ ؛ یعنی $b-a=4$.

۱۴. روشن ۱ **گام ۱** برای رسیدن از $f(3-x) + 4$ به $f(x)$ باید

طول‌ها را ۳ واحد به چپ ببریم و سپس قرینه کنیم و از عرض‌ها ۴ تا کم کنیم:

$$(2, 3) \Rightarrow (1, -1)$$

$$(5, 1) \Rightarrow (-2, -3)$$

$$(6, -3) \Rightarrow (-3, -7)$$

$$\frac{f(-2) + 3f(-3)}{f(1)} = \frac{-3 - 21}{-1} = 24$$

گام ۲ پس داریم:

روشن ۲ با توجه به این که $g(2) = 3$ است، پس در رابطه $g(x) = f(3-x) + 4$

به جای $x = 2$ قرار می‌دهیم:

$$g(2) = f(1) + 4 \Rightarrow 3 = f(1) + 4 \Rightarrow f(1) = -1$$

هم‌چنین با توجه به این که $g(5) = 1$ است، پس در رابطه $g(x) = f(3-x) + 4$

به جای $x = 5$ قرار می‌دهیم:

$$g(5) = f(-2) + 4 \Rightarrow 1 = f(-2) + 4 \Rightarrow f(-2) = -3$$

هم‌چنین با توجه به این که $g(6) = -3$ است، پس در رابطه $g(x) = f(3-x) + 4$

به جای $x = 6$ قرار می‌دهیم:

$$g(6) = f(-3) + 4 \Rightarrow -3 = f(-3) + 4 \Rightarrow f(-3) = -7$$

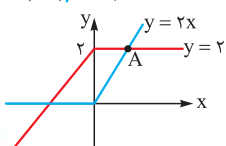
$$\frac{f(-2) + 3f(-3)}{f(1)} = \frac{-3 + 3(-7)}{-1} = \frac{-3 - 21}{-1} = \frac{-24}{-1} = 24$$

۱۵. ۴ **گام ۱** نمودار $x + |x|$ به شکل روبه‌رو

$$\text{است: } \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

گام ۲ باید قرینه f نسبت به هر دو محور را

۲ واحد بالا ببریم:

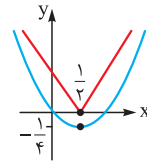


$$2x = 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow A(1, 2)$$

$$\frac{1}{4}\alpha^2$$

پس مساحتش می‌شود:

گام ۲ از شرط $\frac{\alpha^2}{4} = 18$ داریم $\alpha^2 = 72$ و مقدار α می‌شود $\sqrt{72}$ یا $6\sqrt{2}$.



۹. ۲ **روشن ۱** **گام ۱** دو نمودار $y_1 = |4x-2|$ و $y_2 = x^2 - x$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم.

گام ۲ مشاهده می‌کنیم فقط ۲ برخورد داریم؛ پس اگر می‌خواهیم ۳ برخورد

داشته باشیم، باید سهمی $y_2 = x^2 - x$ را $\frac{1}{4}$ واحد به بالا ببریم پس: $a = \frac{1}{4}$

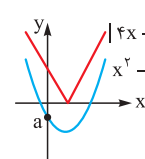
گام ۳ حالا می‌خواهیم معادله $|4x-2| = x^2 - x + \frac{1}{4}$ را حل کنیم.

گام ۴ می‌دانیم ریشه بزرگ‌تر معادله در سمت راست $x = \frac{1}{4}$ است، پس

معادله با حذف قدرمطلق به صورت زیر درمی‌آید:

$$4x-2 = x^2 - x + \frac{1}{4} \Rightarrow 4(x - \frac{1}{4}) = (x - \frac{1}{4})^2$$

$$\div (x - \frac{1}{4}) \rightarrow 4 = x - \frac{1}{4} \Rightarrow x = 4 \frac{1}{4} \checkmark$$



۱۰. ۲ **روشن ۲** **گام ۱** دو نمودار را در یک دستگاه

می‌کشیم و دقت می‌کنیم که محور تقارن هر دوی

آن‌ها $x = \frac{1}{4}$ است:

گام ۲ از تقارن شکل واضح است که تعداد ریشه‌ها همیشه زوج می‌شود مگر

این‌که یک ریشه $x = \frac{1}{4}$ باشد: $a = \frac{1}{4} \Rightarrow |4(\frac{1}{4}) - 2| = (\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{4} + a$

گام ۳ حالا از تساوی $|4x-2| = x^2 - x + \frac{1}{4}$ داریم:

$$\xrightarrow{\text{ریشه بزرگتر}} 4x-2 = x^2 - x + \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 - 5x + \frac{9}{4} = 0$$

$$\Rightarrow (x - \frac{1}{4})(x - \frac{9}{4}) = 0$$

پس ریشه بزرگ‌تر $x = \frac{9}{4}$ است.

۱۰. ۱ **گام ۱** ضرب $\frac{1}{4}$ را به داخل قدرمطلق ببریم:

$$y = -|\frac{1}{4}(2x+1)| = -|x + \frac{1}{4}|$$

گام ۲ پس در مقایسه با $|x|$ باید $\frac{1}{4}$ واحد به چپ برویم و سپس نسبت به

محور x آینه کنیم.

اشاره: دقت کنید که (انبساط و انقباض) در کار نیست؛ پس ضرایب $\frac{1}{4}$ و ۲ باید از بین ببرند!

۱۱. ۱ **گام ۱** با توجه به شکل $\sqrt{x}$ انتقال افقی نداشت؛ پس $b = 0$.

گام ۲ اما نسبت به محور x قرینه و سپس ۲ واحد به بالا رفته است؛ پس $a = 2$.

گام ۳ پس داریم: $f(x) = 2 - \sqrt{x}$ و بنابراین: $f(1) = 2 - \sqrt{1} = 1$

۱۲. ۴ **گام ۱** $\sqrt{x}$ را a واحد به بالا و b

واحد به راست برده‌ایم و چون محور y و x را قطع

نکرده، حتماً $a > 0$ و $b > 0$ بوده:

گام ۲ پس در $a - \sqrt{x} + b$ باید $\sqrt{x}$ به طرف چپ برود (۱ یا ۴)

سپس قرینه نسبت به محور x شده و a تا بالا بیاید (فقط ۴).

۱۳. ۴ **روشن ۱** **گام ۱** با توجه به نقطه شروع $f(x) = -\sqrt{x-1} + 3$

و $g(x) = \sqrt{-x-2}$ است.

با توجه به مختصات نقطه A به صورت (۱, ۲) قاعده متوازی الاضلاع ۱ و ارتفاع ۲ است و مساحت می شود ۲.

۱۶. **گام ۲** مراحل تبدیل را ببینید:

$$y = |x - 1| + 1 \xrightarrow[\text{تا به بالا}]{\text{تا به چپ}} y = |x + 4 - 1| + 1 + 2$$

$$\Rightarrow y = |x + 3| + 3 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x} y = -|x + 3| - 3$$

گام ۳ حالا دقت کنید که اگر در $y = |x - 1| + 1$ به جای x ، $-x - 2$ و به جای y ، $-y - 2$ قرار دهیم، به همین ضابطه بالا می رسیم؛ پس نسبت به $(-1, -1)$ قرینه اند.

یادآوری: اگر بخواهیم قرینه یک نمودار را نسبت به نقطه (α, β) بنویسیم

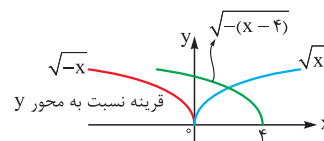
باید x را به $2\alpha - x$ و y را نیز به $2\beta - y$ تبدیل کنیم.

حالا اگر با این دو حرکت نمودار اولیه و نمودار جدید یکسان شدند، یعنی (α, β) مرکز تقارن دو تابع بوده.

تیزبازی: رأس نمودار اولیه در $(1, 1)$ است.

۴ واحد به چپ و ۲ واحد به بالا می شود $(-3, 3)$ و قرینه آن نسبت به محور x می شود $(-3, -3)$. دو نقطه $(1, 1)$ و $(-3, -3)$ نسبت به وسطشان یعنی $(-1, -1)$ قرینه هم هستند. $\Rightarrow (-1, -1)$

۱۷. **گام ۳** شکل را ببینید:



گام ۴ باتوجه به شکل دو نمودار نسبت به $x = 2$ متقارن اند. (محل برخورد دو نمودار)

روش ۲ ضابطه جدید $y = \sqrt{4 - x}$ است که در مقایسه با $y = \sqrt{x}$ انگار x را به $2(2) - x$ تبدیل کردیم؛ پس دو منحنی نسبت به $x = 2$ متقارن اند.

یادآوری: برای قرینه کردن یک منحنی نسبت به خط $x = \alpha$ کافی است

فقط x را به $2\alpha - x$ تبدیل کنیم؛ حالا اگر دو منحنی یکسان شدند، $x = \alpha$ محور تقارن دو منحنی است.

۱۸. **گام ۴** مراحل تبدیل را انجام می دهیم:

$$\frac{1}{x} \xrightarrow{\text{یک واحد به راست}} \frac{1}{x-1} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x} -\frac{1}{x-1}$$

$$\xrightarrow{\text{۲ واحد به پایین}} -2 - \frac{1}{x-1}$$

گام ۵ این منحنی را با f تلاقی می دهیم:

$$-2 - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{مرتب}} \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = -2$$

برای حل معادله در ک.م.م. مخرج ها ضرب می کنیم:

$$\xrightarrow{\times x(x-1)} x-1+x = -2x(x-1)$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب}} 2x-1 = -2x^2+2x \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}$$

گام ۶ پس نقاط برخورد در $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ هستند و عرضشان هم $y = \pm \sqrt{2}$ می شود و فاصله از مبدأ:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

۱۹. **گام ۳** ضابطه تابع جدید را پیدا کنیم:

$$y = 3 - \sqrt{2x} \xrightarrow{\text{یک واحد به چپ}} y = 3 - \sqrt{2(x+1)}$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه به محور } x} y = -3 + \sqrt{2x+2}$$

$$\xrightarrow{\text{۵ واحد به بالا}} y = 2 + \sqrt{2x+2}$$

گام ۴ برای برخورد با $f(x) = \frac{y}{x}$ داریم:

$$2 + \sqrt{2x+2} = \frac{y}{x} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \sqrt{2x+2} = \frac{y}{x} - 2 \Rightarrow 2x+2 = \left(\frac{y}{x} - 2\right)^2$$

$$\xrightarrow{-2} 2x = \frac{y^2}{x^2} - 4 + 4 \Rightarrow x = \frac{1}{8}$$

پس طول نقطه برخوردشان $\frac{1}{8}$ است.

۲۰. **روش ۱** **گام ۱** تبدیل ها از نوع قرینه و انتقال اند؛ پس عدد ضریب

تغییر نمی کند و $\frac{x}{b}$ همان $\frac{x}{y}$ است؛ یعنی $b = 2$.

گام ۲ انتقال افقی a واحدی باید عدد ۳ را از بین ببرد؛ پس $3 - \frac{a}{b} = 0$ و این

$$\xrightarrow{b=2} a = 2 \times 3 = 6$$

یعنی:

$$ab = 12$$

پس داریم:

روش ۲ **گام ۲** تبدیل ها را انجام دهیم:

$$f\left(3 - \frac{x}{b}\right) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y} f\left(3 + \frac{x}{b}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{تا به راست}} f\left(3 + \frac{x-a}{b}\right) = f\left(\frac{x}{b}\right)$$

گام ۳ پس داریم: $b = 2$ و $3 - \frac{a}{b} = 0$ که نتیجه می شود $a = 6$ و $ab = 12$.

۲۱. **گام ۲** تبدیل یافته f را پیدا کنیم:

$$y = x^2 + 4x \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور عرض ها}} y = (-x)^2 + 4(-x)$$

$$\xrightarrow{\text{۳ واحد به بالا}} y = x^2 - 4x + 3$$

$$\xrightarrow{\text{۲ واحد به چپ}} y = (x+3)^2 - 4(x+3) + 3$$

گام ۳ حالا باید معادله $y = mx - 1$ ریشه مضاعف بدهد:

$$x^2 + 6x + 9 - 4x - 12 + 3 = mx - 1 \Rightarrow x^2 + 2x = mx - 1$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب}} x^2 + (2-m)x + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\frac{a=1=c}{b=2-m}} \Delta = (2-m)^2 - 4(1)(1) = 0 \Rightarrow 2-m = \pm 2$$

$$\Rightarrow m = 0 \text{ یا } 4$$

۲۲. **گام ۳** تبدیل ها را انجام دهیم:

$$\text{الف) } y = x^2 + ax + b \xrightarrow{\text{۲ واحد به بالا}} y = x^2 + ax + b + 2$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور عرض ها}} y_1 = (-x)^2 + a(-x) + b + 2$$

$$= x^2 - ax + b + 2$$

$$\text{ب) } y = x^2 + ax + b \xrightarrow{\text{یک واحد به پایین}} y = x^2 + ax + b - 1$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x} y_2 = -x^2 - ax - b + 1$$

گام ۴ حالا باید y_1 بر $y = x$ و y_2 بر $y = -x$ مماس شود:

$$\text{الف) } x^2 - ax + b + 2 = x \xrightarrow{\text{مرتب}} x^2 - (a+1)x + (b+2) = 0$$

$$\text{ب) } -x^2 - ax - b + 1 = -x \xrightarrow{\text{مرتب}} x^2 + (a-1)x + (b-1) = 0$$

$$(a+1)^2 - 4(b+2) = 0 \quad \text{دلتای این معادله ها صفر است؛ پس:}$$

$$(a-1)^2 - 4(b-1) = 0$$

$$4a - 12 = 0 \Rightarrow a = 3 \quad \text{اگر معادله بالا را منهای پایین کنیم:}$$

$$4 - 4(b-1) = 0 \Rightarrow b = 2 \quad \text{و با جای گذاری در دومی:}$$

$$ab = 6 \quad \text{و بنابراین:}$$

۲۳. **گام ۴** باید گزینه ای انتخاب شود که x ها حذف شوند. به خاطر

تقارن نمودار $f(x)$ نسبت به خط $x = -2$ داریم: $f(x) = f(-4-x)$

گام ۵ پس $f(x) - f(-4-x) = 0$ که تابعی ثابت است.

۲۸. **گام ۳** نمودار رسم شده $g(x) = -\sqrt{x+2} - 1$ است. (چون دامنه اش $[-2, +\infty)$ و بردش $(-\infty, -1]$ است و باید نزولی باشد).

گام ۲ پس داریم: $g(23) = -\sqrt{23+2} - 1 = -5 - 1 = -6$

$$f(-6) = \sqrt{3 - (-6)} = 3$$

۲۹. **گام ۳** ضابطه تبدیل یافته f را پیدا کنیم:

$$x + \sqrt{x-2} \xrightarrow{\substack{\text{۳ تا به راست} \\ \text{۲ تا به پایین}}} (x-3) + \sqrt{(x-3)-2-2} = x-5 + \sqrt{x-5}$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور عرضها}} y_1 = -x-5 + \sqrt{-x-5}$$

گام ۲ حالا با $y_2 = 2x+k$ تلاقی می دهیم و $x = -9$ است:

$$\xrightarrow{\substack{y_1=y_2 \\ x=-9}} 9-5 + \sqrt{9-5} = 2(-9) + k \Rightarrow k = 6+18 = 24$$

۳۰. **گام ۴** تبدیل ها را انجام دهیم:

$$y = 2 + \sqrt{6-x} \xrightarrow{\text{۳ واحد به چپ}} y = 2 + \sqrt{6-(x+3)} = 2 + \sqrt{3-x}$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور عرضها}} y = 2 + \sqrt{3-(-x)} = 2 + \sqrt{x+3} = g(x)$$

$$y = 2 + \sqrt{\frac{x}{2} + 3} + kx \quad \text{حالا } g\left(\frac{x}{2}\right) + kx \text{ را می سازیم:}$$

و با f مساوی قرار می دهیم:

$$2 + \sqrt{\frac{x}{2} + 3} + kx = 2 + \sqrt{6-x} \Rightarrow \sqrt{\frac{x}{2} + 3} + kx = \sqrt{6-x}$$

گام ۲ ریشه معادله باید $x = 2$ باشد:

$$x = 2 \Rightarrow \sqrt{1+3} + k(2) = \sqrt{6-2} \Rightarrow k = 0$$

گام ۲ حالا مقدار $g(2)$ یعنی $g(k+2)$ برابر است با:

$$2 + \sqrt{2+3} = 2 + \sqrt{5}$$

۳۱. **گام ۳** تبدیل ها را انجام دهیم:

$$f(x) = ax(x+6) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور yها}} y = a(-x)(-x+6) = ax(x-6)$$

$$\xrightarrow{\text{یک واحد به چپ}} y = a(x+1)(x+1-6) = a(x+1)(x-5)$$

گام ۲ ریشه سمت راست $x = 5$ و نقطه برخورد با محور y در مختصات

$$x_S = \frac{-1+5}{2} = 2 \text{ ریشه ها } 2 \text{ و } 4 \text{ دارد. طول رأس سهمی در وسط ریشه ها } 2 \text{ و } 4 \text{ است.}$$

و عرض آن $A(5, 0)$ است: پس مثلث با رأس $A(5, 0)$ ،

$B(0, -5a)$ و $S(2, -9a)$ داریم که در رأس S قائمه است.

گام ۲ حالا ضرب شیب های SA و SB باید -1 باشد:

$$m_{SA} m_{SB} = \frac{-9a-0}{2-5} \times \frac{-9a+5a}{2-0} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{-9a \times -4a}{-3 \times 2} = -6a^2 = -1 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{6} \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{6}}{6}$$

پس مقدار مثبت a می شود $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

۳۲. **گام ۳** تبدیل ها را انجام دهیم:

$$\frac{1}{2x-3} \xrightarrow{k \text{ واحد به چپ}} \frac{1}{2(x+k)-3} = g(x)$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور عرضها}} \frac{1}{2(-x)-3} = h(x)$$

گام ۲ حالا $g+h$ را تشکیل دهیم:

$$\frac{1}{2x+2k-3} + \frac{1}{-2x-3} = \frac{1}{2x+2k-3} - \frac{1}{2x+3}$$

x ها باید با هم حذف شوند

برای ثابت بودن این تابع باید $2k-3$ برابر 3 باشد: پس $2k = 6$ و بنابراین $k = 3$.

$$f(3) = \frac{1}{2 \times 3 - 3} = \frac{1}{3}$$

گام ۲ مقدار $f(k)$ برابر است با:

۲۴. **گام ۲** تبدیلات را انجام دهیم:

$$y = \frac{2x-1}{x+3} \xrightarrow{\substack{\text{قرینه نسبت به محور yها} \\ x \rightarrow -x}} y = \frac{-2x-1}{-x+3}$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{۲ واحد به راست} \\ \text{۳ واحد به پایین}}} y = \frac{-2(x-2)-1}{-(x-2)+3} - 3 = \frac{-2x+3}{-x+5} - 3 = g(x)$$

گام ۲ حالا باید $1+2g(x-1)$ را بسازیم:

$$y = 1 + 2\left(\frac{-2(x-1)+3}{-(x-1)+5} - 3\right) = 1 + \frac{-4(x-1)+6}{-(x-1)+5} - 6$$

$$= \frac{-4x+10}{-x+6} - 5 = \frac{x-20}{6-x}$$

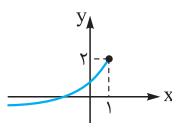
گام ۲ حالا باید $1+2g(x-1) \geq 0$ باشد:

$$\frac{x-20}{6-x} \geq 0 \xrightarrow{\text{بین دو ریشه}} 6 < x \leq 20$$

پس $14 = 20 - 6$ عدد صحیح داریم (۷ تا ۲۰).

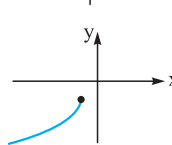
۲۵. **گام ۲** نمودار $f(x) = 2 - \sqrt{1-x}$

را رسم کنیم:



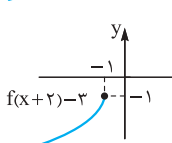
گام ۲ برای این که محورها را قطع نکند تمام شکل

باید در یک ناحیه باشد؛ پس چون صعودی است باید حتماً تمام شکل در ناحیه سوم باشد مثلاً:



گام ۲ پس انتقال افقی ۲ واحد به چپ مناسب

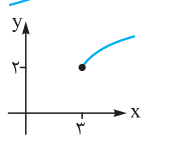
است و انتقال عمودی حداقل ۲ واحد به پایین لازم است و بین گزینه ها ۲ خوب است.



۲۶. **گام ۲** در ضابطه $f(x)$ نقطه شروع

نمودار $(3, 2)$ است؛ به عبارتی $f(3) = 2$ و نمودارش

به صورت روبه رو است:



گام ۲ برای این که نقطه متناظر $(3, 2)$ را در نمودار

پیدا کنیم، کاری می کنیم $3+a-x = 3$ شود؛ پس $x = a$ می شود. برای به

$$\text{دست آوردن } y \text{ داریم: } y = -a - f(3) \xrightarrow{f(3)=2} y = -a - 2$$

پس نقطه شروع نمودار تبدیل یافته $(a, -a-2)$ است.

گام ۲ با توجه به این که در نمودار جدید به جای x ، $-x$ داریم و به جای f ،

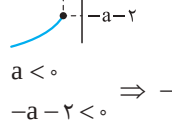
$-f$ داریم، پس هم قرینه نسبت محور x داریم و هم قرینه نسبت به محور y به

عبارتی قیافه نمودار به صورت $A(a, -a-2)$ می شود.

گام ۲ حال برای این که محورهای مختصات را

قطع نکند، این نقطه A باید در ربع سوم مختصاتی

باشد؛ یعنی به صورت روبه رو:



پس باید هم زمان داشته باشیم:

$$a < 0 \Rightarrow -2 < a < 0$$

۲۷. **گام ۱** تبدیل ها را روی f انجام دهیم:

$$\log_3(x+1) \xrightarrow{\text{۲ واحد به راست}} \log_3(x-2+1)$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه به محور x}} -\log_3(x-1)$$

$$\xrightarrow{\text{یک واحد بالا}} 1 - \log_3(x-1) = g(x)$$

گام ۲ حالا از تلاقی نمودار f و g داریم: $\log_3(x+1) = 1 - \log_3(x-1)$

$$\xrightarrow{\text{مرتب}} \log_3(x+1) + \log_3(x-1) = 1$$

$$\xrightarrow{\text{تبدیل جمع لگاریتمها به log ضرب}} \log_3(x^2-1) = 1$$

$$\xrightarrow{\text{تعریف log}} x^2-1 = 3^1 = 3 \Rightarrow x^2 = 4 \xrightarrow{x>1} x = 2$$

گام ۲ پس عرض نقطه تلاقی برابر است با: $f(2) = g(2) = \log_3 3 = 1$

۳۳. ۴. گام ۱: رأس $f(x) = x^2 - 6x + 6$ در نقطه $S(3, -3)$ قرار دارد:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{+6}{2} = 3 \text{ و } y_S = f(3) = 9 - 18 + 6 = -3$$

گام ۲: با قرینه نسبت به محور y و k واحد به بالا، رأس جدید در $S_1(-3, k-3)$ است.

گام ۳: با قرینه نسبت به محور x و سپس k واحد به راست، رأس جدید نقطه $S_2(k+3, 3)$ است.

فاصله این رأس‌ها از هم 10 است: $S_1S_2 = \sqrt{(k+3+3)^2 + (k-3-3)^2} = 10$
 $(k+6)^2 + (k-6)^2 = 10^2 \Rightarrow 2(k^2 + 36) = 100$
 $\Rightarrow k^2 = 14 \xrightarrow{k>0} k = \sqrt{14}$

۳۴. ۴. روش ۱: گام ۱: با قرینه نسبت به مبدأ $y = \frac{1}{5x+4}$ به

$y = -\frac{1}{-5x+4}$ یا $y = \frac{1}{5x-4}$ تبدیل می‌شود.

گام ۲: حالا برای انطباق نمودار جدید بر f باید $5x-4$ به $5x+4$ برسد؛

پس باید به x ، $\frac{8}{5}$ اضافه شود: $5(x + \frac{8}{5}) - 4 = 5x + 8 - 4 = 5x + 4$
 و این یعنی $\frac{8}{5}$ انتقال به چپ لازم است.

روش ۲: فرض می‌کنیم تغییر $x \rightarrow x+k$ لازم است تا $5x-4$ به $5x+4$ برسد پس داریم:

$5(x+k) - 4 = 5x + 4 \Rightarrow 5k = 8 \Rightarrow k = \frac{8}{5}$
 یعنی تغییر $x \rightarrow x + \frac{8}{5}$ لازم بوده است و این یعنی $\frac{8}{5}$ انتقال به چپ.

یادآوری: برای قرینه‌کردن نسبت به مبدأ مختصات باید x را به $-x$ و y را به $-y$ تبدیل کنیم.

۳۵. ۳. گام ۱: قرینه نمودار $y = (x+2)^2 - 4$ نسبت به مبدأ $y = -((-x+2)^2 - 4)$ است. ضابطه را کمی ساده‌تر هم بنویسیم:

$g = 4 - (2-x)^2 = 4 - (4 - 4x + x^2) = 4x - x^2$

گام ۲: این منحنی را k واحد به چپ می‌بریم: $y = 4(x+k) - (x+k)^2$

گام ۳: نمودار جدید را با $f(x)$ تلاقی می‌دهیم:

$4(x+k) - (x+k)^2 = (x+2)^2 - 4$
 $\xrightarrow{\text{اتحاد باز}} 4x + 4k - x^2 - 2kx - k^2 = x^2 + 4x + 4 - 4$
 $\xrightarrow{\text{مرتب}} 0 = 2x^2 + 2kx + k^2 - 4k$

جمع ریشه‌های این معادله $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -\frac{2k}{2} = -k$ است که باید 3 باشد؛ پس $k = -3$.

۳۶. ۱. گام ۱: قرینه $y = \frac{1}{2x+3}$ نسبت به مبدأ $y = -\frac{1}{2(-x)+3}$ است که به صورت $y = \frac{1}{2x-3}$ ساده می‌شود.

گام ۲: با k واحد انتقال افقی داریم:

گام ۳: حالا دو نمودار منطبق‌اند پس:

$\frac{1}{2x-2k-3} = \frac{1}{2x+3} \Rightarrow -2k-3=3 \Rightarrow 2k=-6$
 $\Rightarrow k=-3$

۳۷. ۱. گام ۱: برای قرینه‌کردن نسبت به نقطه (α, β) باید x را به $2\alpha - x$ و y را به $2\beta - y$ تبدیل کرد. پس الان با مرکز تقارن $(3, -2)$ باید x را به $6 - x$ و هم‌چنین y را به $-4 - y$ تبدیل کرد:

$-4 - y = (6 - x)^2 - 4(6 - x) + 3$

گام ۱: در ضابطه جدید به ازای $x = -1$ داریم:

$-4 - y = \frac{y^2 - 4(y) + 3}{49 - 28 + 3 = 24} \xrightarrow{\text{مرتب}} -4 - 24 = y = -28$

۳۸. ۴. گام ۱: برای 3 واحد انتقال به چپ، به جای x می‌نویسیم $x+3$ ، سپس برای قرینه نسبت به $x=2$ به جای x می‌نویسیم $4-x$ ؛ پس می‌توانیم بگوییم x به $7-x$ تبدیل می‌شود. پس:

$y = \sqrt{2(7-x)(2(7-x)+1)} = \sqrt{(14-2x)(15-2x)}$

گام ۲: محل برخورد خط $y = ax - 7\sqrt{2}$ و $y = \sqrt{(14-2x)(15-2x)}$ به صورت $\sqrt{(14-2x)(15-2x)} = ax - 7\sqrt{2}$ است و از این معادله تلاقی $x=8$ را سؤال به ما داده است؛ پس داریم:

$\sqrt{(14-2(8))(15-2(8))} = 8a - 7\sqrt{2}$

$\sqrt{(-2)(-1)} = 8a - 7\sqrt{2} \Rightarrow 8a = 7\sqrt{2} \Rightarrow a = \sqrt{2}$

۳۹. ۴. گام ۱: برای قرینه نسبت به $x=-1$ باید به جای x ها $x-2$ قرار دهیم؛ سپس برای 2 واحد انتقال به چپ باید به جای x ها $x+2$ قرار دهیم پس نهایتاً $(2+x)-2 = x$ یعنی $-4-x$ به جای x قرار می‌گیرد.

گام ۲: طبق قانون $2\alpha - x$ ، چون به جای x ها $-4-x$ قرار دادیم؛ یعنی نسبت به $x=-2$ قرینه کرده‌ایم.

تیزبازی: فقط رأس سهمی را در نظر بگیریم:

$y = 2x^2 - 12x + 3 \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{+12}{4} = 3$

$\Rightarrow y_S = y(3) = 2(3)^2 - 12(3) + 3 = -15$

پس رأس در $S(3, -15)$ است.
 با قرینه نسبت به $x=-1$ می‌شود $(-5, -15)$ و با 2 واحد انتقال به چپ می‌شود $(-7, -15)$. حالا در مقایسه با $S(3, -15)$ واضح است که نسبت به $x = \frac{-7+3}{2} = -2$ متقارن‌اند.

۴۰. ۱. گام ۱: اگر طول رأس سهمی α باشد 4 واحد انتقال به راست می‌شود $\alpha + 4 = x_1$ و با قرینه نسبت به $x=3$ می‌شود $x_2 = 6 - \alpha$.

گام ۲: چون دو سهمی منطبق‌اند:

$\alpha + 4 = 6 - \alpha \Rightarrow 2\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 1$ پس داریم:

۴۱. ۳. گام ۱: با قرینه نسبت به $x=\alpha$ داریم:

$y = f(3 - \frac{2\alpha - x}{2}) = f(3 - \alpha + \frac{x}{2})$

گام ۲: سپس با انتقال k واحد به راست داریم:

گام ۳: در مقایسه با $f(\frac{x+1}{2})$ باید داشته باشیم:

$3 - \alpha - \frac{k}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{k}{2} + \alpha$

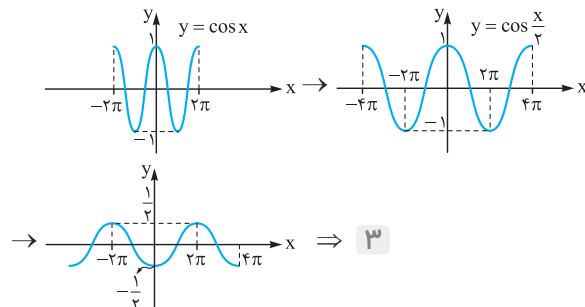
که فقط به 3 می‌خورد. $k=+1, \alpha=2$

تیزبازی: یک نقطه دلخواه روی نمودار $y = f(3 - \frac{x}{2})$ در نظر می‌گیریم

مثلاً $(2, 5)$ که این یعنی $f(2)$ (به جای $x=2$ و به جای $y=5$ قرار دادیم). حالا برای این که در تابع $y = f(\frac{x+1}{2})$ هم $f(2)$ داشته باشیم، باید $x=3$ باشد و $y=5$ یعنی نقطه $(3, 5)$ را در ضابطه جدید داریم. حالا 3 را ببینید.

$(2, 5) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به خط } x=2} (2, 5) \xrightarrow{\text{یک واحد به راست}} (3, 5) \checkmark$

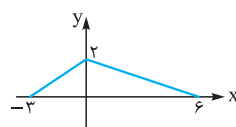
۴۲. ۳ در ضابطه X به $\frac{X}{2}$ تبدیل شده است؛ پس در نمودار، طول‌ها دو برابر می‌شوند. از طرفی ضریب $\frac{1}{2}$ پشت عبارت $\cos \frac{X}{2}$ یعنی انقباض عمودی به عبارتی Y ‌ها نصف و قرینه می‌شوند.



۴۳. ۳ گام ۴ ضرب شده‌اند که انقباض افقی است.

۴ گام ۴ Y ‌ها در $\frac{4}{3}$ ضرب شده‌اند که انبساط عمودی است.

۴۴. ۴ گام ۴ طول‌ها ۳ برابر و عرض‌ها ۲ برابر می‌شوند؛ پس به شکل روبه‌رو می‌رسیم:



۴ گام ۴ مساحت مثلث با قاعده ۹ و ارتفاع ۲ برابر است با: $\frac{9 \times 2}{2} = 9$

۴۵. ۴ گام ۴ طول‌ها ۲- برابر و عرض ۳ برابر می‌شود. پس نقاط برخورد از $(-3, 0)$ و $(0, 2)$ به $(6, 0)$ و $(0, 6)$ می‌رسند.

۴ گام ۴ فاصله دو نقطه از هم $\sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{2(6^2)} = 6\sqrt{2}$ است.

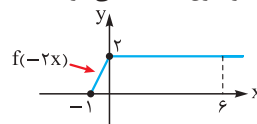
۴۶. ۳ گام ۴ $f(|x| - x)$ را در دو حالت مشخص می‌کنیم:

$$x \geq 0 \rightarrow |x| = x \rightarrow g(x) = f(0) = 2$$

$$x < 0 \rightarrow |x| = -x \rightarrow g(x) = f(-2x)$$

نمودار f نسبت به محور Y قرینه و طول‌ها نصف می‌شوند.

۴ گام ۴ نمودار را ببینید:



۴ گام ۴ مساحت محصور در فاصله ۱- تا ۶ دوزنقه‌ای با قاعده‌های ۶ و ۷ و ارتفاع ۲ است و مساحت برابر است با: $\frac{(6+7)(2)}{2} = 13$

۴۷. ۲ گام ۴ ضابطه f را ببینید:

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & -2 \leq x < 0 \\ \frac{x}{2} & 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

۴ گام ۴ با تبدیل x به $\frac{x}{2} + 2$ یا $\frac{x}{2} - 4$ ، ضابطه بالایی با $\frac{x}{2}$ یکی نمی‌شود، تبدیل یافته f روی خودش نمی‌افتد. پس ۱ و ۳ نیستند.

۴ گام ۴ اگر x را به $2x$ تبدیل کنیم، برای انطباق بر $x+2$ باید $+4$ هم

$$y = \frac{x}{2} \xrightarrow{\text{تبدیل کنیم}} y = \frac{2x+4}{2} = x+2$$

دیدید تبدیل یافته خط پایینی همان خط بالایی شد.

۴۸. ۴ گام ۴ برای رسیدن از α به $1-\alpha$ باید واحد انتقال به چپ و

سپس بازتاب به محور Y بدهیم. (۲ یا ۴)

۴ گام ۴ برای تبدیل β به $\frac{1}{2}\beta$ باید عرض‌ها نصف شوند (انقباض عمودی)

(۳ یا ۴) پس ۴ صحیح است.

۴۹. ۱ گام ۴ وقتی $(6, 3) \in g$ است، پس $g(6) = 3$ است و با

جای‌گذاری $x=6$ در رابطه $g(x) = 2f(3-2x) + 5$ داریم:

$$g(6) = 2f(3-12) + 5 \xrightarrow{g(6)=3} 3 = 2f(-9) + 5 \Rightarrow f(-9) = -1$$

$$g(-1) = 2f(3+2) + 5 \xrightarrow{g(-1)=4} 4 = 2f(5) + 5 \Rightarrow f(5) = -\frac{1}{2}$$

و بالاخره برای $(0, 2) \in g$ داریم $g(0) = 2$ و با جای‌گذاری $x=0$ داریم:

$$g(0) = 2f(3-0) + 5 \xrightarrow{g(0)=2} 2 = 2f(3) + 5 \Rightarrow f(3) = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{-1 + \frac{-1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{3}{2}} = 1$$

۵۰. ۳ گام ۴ اشتباه دانش‌آموز را روی نمودار $y = f(x)$ اعمال می‌کنیم.

(۱) طول تمام نقاط روی نمودار را نصف کرده پس x را باید به $2x$ تبدیل کنیم:

$$y = f(2x)$$

(۲) واحد به راست یعنی x را به $x-6$ تبدیل کنیم؛ پس داریم:

$$y = f(2(x-6)) = f(2x-12)$$

۴ گام ۴ با یک انتقال افقی می‌خواهیم اشتباه دانش‌آموز را جبران کنیم. فرض

کنیم انتقال مورد نظر $X \rightarrow X+k$ باشد؛ پس داریم:

$$y = f(2(x+k)-12) = f(2x+2k-12)$$

۴ گام ۴ $f(2x+2k-12)$ می‌خواهیم همان $f(2x+6)$ شود پس:

$$2k-12=6 \Rightarrow k=9 \Rightarrow x \rightarrow x+9$$

۵۱. ۴ گام ۴ اول ببینیم چه اتفاقاتی افتاده که $f(x)$ شده $3f(1-\frac{x}{3})$

۴ گام ۴ x به $x+1$ تبدیل شده (۱ واحد به چپ)

۴ گام ۴ x به $\frac{x}{3}$ تبدیل شده (طول‌ها ۳ برابر)

۴ گام ۴ x به $-x$ تبدیل شده (قرینه نسبت به محور Y ‌ها)

پس در نمودار f ، ۱ واحد از x ‌ها کم می‌کنیم و ضربدر ۳ می‌کنیم؛ Y ‌ها را هم

۳ برابر می‌کنیم تا به نمودار $3f(1-\frac{x}{3})$ برسیم.

۴ گام ۴ نمودار را با تبدیلات بالا رسم می‌کنیم.

$$A(-4, 0) \Rightarrow A'(15, 0)$$

$$B(-2, 2) \Rightarrow B'(9, 6)$$

$$C(2, 2) \Rightarrow C'(-3, 6)$$

$$D(6, 0) \Rightarrow D'(-15, 0)$$



۴ گام ۴ مطابق شکل زیر، خط $y=3$ را هم اگر رسم کنیم، طول نقاط A و B

با استفاده از معادله تلاقی به دست می‌آید:

$$BD \text{ خط } y = -x + 15 \xrightarrow{y=3} x_H = 12$$

$$AC \text{ خط } y = \frac{1}{2}x + \frac{15}{2} \xrightarrow{y=3} x_E = -9$$



$$S = \frac{1}{2}(EH + FG) \times h = \frac{1}{2}(12 + 21) \times 3 = \frac{1}{2}(33) \times 3 = \frac{99}{2} = 49.5$$



$$S = \frac{1}{2}(EH + FG) \times h = \frac{1}{2}(12 + 21) \times 3 = \frac{1}{2}(33) \times 3 = \frac{99}{2} = 49.5$$

$$S = \frac{1}{2}(EH + FG) \times h = \frac{1}{2}(12 + 21) \times 3 = \frac{1}{2}(33) \times 3 = \frac{99}{2} = 49.5$$

$$S = \frac{1}{2}(EH + FG) \times h = \frac{1}{2}(12 + 21) \times 3 = \frac{1}{2}(33) \times 3 = \frac{99}{2} = 49.5$$

۵۲. **روش ۴** **گام ۱** طول بازه دامنه f برابر $\Delta x = 4$ و طول بازه برد هم $\Delta y = 4$ است.

گام ۲ در g باید طول‌های f را نصف کنیم ($2x$) دارد و عرض‌ها ۳ برابر می‌شوند. پس $\Delta x = 2$ و $\Delta y = 12$.

گام ۳ طول پاره‌خط g برابر است با:

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{2^2 + 12^2} = \sqrt{148}$$

روش ۲ **گام ۱** نقطه $(-2, 0)$ متعلق به f است؛ پس $f(-2) = 0$ ، در رابطه

$$g(x) = 4 + 3f(2x+1)$$

باید $x = -\frac{3}{2} \Rightarrow 2x+1 = -2 \Rightarrow f(-2) = 0$ را جای‌گذاری می‌کنیم.

$$g(-\frac{3}{2}) = 4 + 3f(-2) \xrightarrow{f(-2)=0} g(-\frac{3}{2}) = 4 + 3 \times 0 = 4$$

$$\Rightarrow (-\frac{3}{2}, 4) \in g$$

برای نقطه $(2, 4)$ هم همین عملیات را انجام می‌دهیم و داریم:

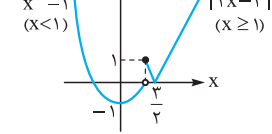
$$2x+1=2 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow g(\frac{1}{2}) = 4 + 3f(2) = 16$$

$$\xrightarrow{f(2)=4} g(\frac{1}{2}) = 4 + 12 = 16 \Rightarrow (\frac{1}{2}, 16) \in g$$

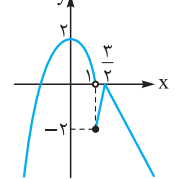
گام ۴ حالا فاصله نقاط را به دست می‌آوریم:

$$d = \sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{3}{2})^2 + (16 - 4)^2} = \sqrt{4 + 144} = \sqrt{148}$$

۵۳. **گام ۱** نمودار f را ببینید:



گام ۲ قرینه نسبت به محور x و عرض‌ها را دو برابر کنیم:



گام ۳ یک واحد به بالا هم نمی‌بریم.

به جای آن تلاقی با $y = a - 1$ را بررسی می‌کنیم که باید سه جواب بدهد:

$$y = a - 1$$

$$a - 1 = -2 \Rightarrow a = -1$$

۵۴. **گام ۱** در تابع $y = f(x)$ رأس سهمی $S = (2, -1)$ است؛

پس $f(2) = -1$.

گام ۲ نقطه متناظر $(2, -1)$ در تابع $y = a + 4f(b - \frac{x}{4})$ به صورت زیر

$$b - \frac{x}{4} = 2 \Rightarrow x = 2b - 4 \Rightarrow y = a + 4f(2)$$

$$\xrightarrow{f(2)=-1} y = a + 4(-1) \Rightarrow y = a - 4$$

$$\Rightarrow S'(2b - 4, a - 4)$$

رأس‌ها باید بر هم منطبق شوند؛ پس:

$$2b - 4 = 2, a - 4 = -1$$

$$\Rightarrow b = 3, a = +3$$

و بنابراین:

$$a + b = 6$$

۵۵. **گام ۲** تبدیلات روی f را انجام دهیم:

$$y = (x - 6)^2 - 31 \xrightarrow{x \rightarrow 2x} y = (2x - 6)^2 - 31$$

$$\xrightarrow{a \text{ واحد به چپ}} y = (2(x + a) - 6)^2 - 31$$

گام ۳ حالا $\frac{b + g(x)}{4x}$ باید مساوی x باشد، به عبارتی:

$$b + g(x) = 4x^2 \Rightarrow b + (2x + 2a - 6)^2 - 31 = 4x^2$$

پس باید $2a - 6 = 0$ و $b = 31$ باشد؛ بنابراین: $a = 3, ab = 3 \times 31 = 93$

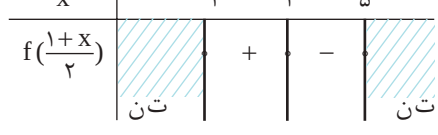
۵۶. **گام ۲** با توجه به نمودار $f(1+x)$ ریشه‌ها ۲، ۰ و -۱ هستند؛

پس ریشه‌های خود $f(x)$ اعداد ۰، ۱ و ۳ هستند.

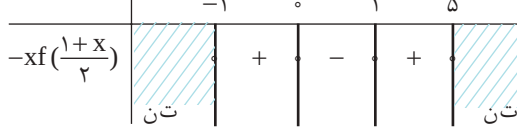
گام ۳ در $f(\frac{1+x}{4})$ این ریشه‌ها به -۱، ۰ و ۵ تبدیل می‌شوند:

$$\frac{1+x}{4} = 0, 1, 3 \Rightarrow x = -1, 1, 5$$

پس علامت $f(\frac{1+x}{4})$ به شکل زیر است:



گام ۴ با ضرب در $-x$ ، هر جا $x > 0$ باشد علامت قرینه می‌شود:

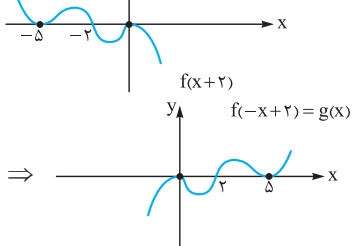


پس دامنه رادیکال به صورت $[-1, 0] \cup [1, 5]$ است.

تیزبازی: به ازای $x = 2$ در تابع $f(1+x)$ داریم $f(3) = 0$ ؛ پس در دامنه g ، $x = 5$ را داریم (چون به $f(3) = 0$ می‌رسد و زیر رادیکال را صفر می‌کند) و تنها گزینه شامل $x = 5$ ، ۲ است.

۵۷. **گام ۳** نمودار f را دو واحد به چپ انتقال می‌دهیم و سپس

نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم.



گام ۴ ریشه‌های $g(x)$ عبارت‌اند از ۰، ۲ و ۵ و ریشه‌های $f(x)$ ، -۳، ۰ و ۲ می‌باشند. جدول تعیین علامت $f(x) \times g(x)$ را رسم می‌کنیم.

	-3	0	2	5	
$f(x)$	+	+	-	-	-
$g(x)$	-	-	-	+	+
$f(x)g(x)$	-	-	+	-	-

گام ۵ به خاطر وجود رادیکال مقادیری از x را می‌خواهیم که $f(x) \times g(x) \geq 0$ ،

پس جواب به صورت $\{0, 2\} \cup \{-3, 5\}$ می‌باشد و در این محدوده ۵ عدد صحیح

داریم.

۵۸. **گام ۱** سمت چپ محور y را پاک و سمت راست را به چپ آینه می‌کنیم.

۵۹. **گام ۲** با توجه به نمودار، f برای ورودی $x \geq 3$ ثابت است؛ پس

الان باید $|x| - k \geq 3$ باشد.

۶۴. گام ۲ مختصات نقاط A' و A را در ضابطه‌ها قرار می‌دهیم و چون متناظرند باید به مقدار یکسانی از f برسیم:

$$y = 2f\left(\frac{x-1}{3}\right) \xrightarrow{A(2,a)} a = 2f\left(\frac{2-1}{3}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب}} f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{a}{2}$$

$$y = 1 - 3f\left(\frac{x}{3}\right) \xrightarrow{A'(b,2)} 2 = 1 - 3f\left(\frac{b}{3}\right)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{b}{3}\right) = \frac{1-2}{3} = \frac{-1}{3}$$

گام ۳ پس داریم: $\frac{1}{3} = \frac{b}{3}$ و $\frac{-1}{3} = \frac{a}{3}$ ؛ بنابراین $a = \frac{-2}{3}$ و $b = \frac{2}{3}$.

گام ۴ شیب خط AA' برابر است با:

$$m_{AA'} = \frac{y_{A'} - y_A}{x_{A'} - x_A} = \frac{2 - a}{b - 2} = \frac{2 - (-\frac{2}{3})}{\frac{2}{3} - 2} = \frac{\frac{8}{3}}{-\frac{4}{3}} = -2$$

۶۵. روش ۱ گام ۱ اگر صف‌های $y = f\left(\frac{x}{3}\right)$ اعداد ۱ و ۲ باشند (چون $\frac{x}{3}$ طول‌ها را دو برابر می‌کند).

ریشه‌های خود $f(x)$ اعداد $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ هستند.

گام ۲ حالا برای $f(2-x)$ باید ۲ واحد به چپ ببریم $x_1 = \frac{1}{3} - 2$ و

$x_2 = -1 - 2$ و سپس نسبت به محور y قرینه می‌کنیم $x_1 = \frac{4}{3}$ و $x_2 = 3$ ؛ پس داریم $\frac{9}{4} = 4/5$.

روش ۲ گام ۱ این اعداد را در تابع قرار می‌دهیم:

$$y = f\left(\frac{x}{3}\right) \xrightarrow{x=1-2} f\left(\frac{-2}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$$

گام ۲ حالا که $f(2-x) = 0$ باید داشته باشیم: $\frac{1}{3}$ یا $2-x = -1$

$$\Rightarrow x = 2 - (-1) = 3 \text{ یا } 2 - \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}$$

گام ۳ پس ضرب ریشه‌های $f(2-x) = 0$ می‌شود $\frac{9}{4}$ یعنی $4/5$.

۶۶. روش ۱ گام ۱ برای رسیدن از $f(x)$ به $f(2x-1)$ باید ابتدا یک واحد به راست برویم (پس $[-1, 4]$ می‌شود $[0, 5]$).

گام ۲ سپس x ها را نصف کنیم (پس $[0, 5]$ می‌شود $[0, 2.5]$).

اشاره: ضرب ۲ و عدد ۱ که روی f اثر می‌کنند تأثیری در دامنه ندارند.

روش ۲ گام ۱ ۱- تا ۴ می‌توانند به عنوان x وارد $f(x)$ شوند. حالا $2x-1$ می‌خواهد وارد f شود.

گام ۲ پس باید $4 \geq 2x-1 \geq -1$ باشد و داریم: $0 \leq 2x \leq 5 \xrightarrow{+1} 1 \leq x \leq 2.5$

پس دامنهٔ تابع جدید بازهٔ $[1, 2.5]$ است.

۶۷. گام ۲ برای ساختن تابع جدید باید مقادیر f در $\frac{1}{3}$ ضرب شوند.

پس از $[-2, 6]$ به $[-3, 1]$ می‌رسیم.

گام ۳ حالا باید ۴ واحد به بالا برویم (انتقال عمودی) پس مقادیر y ها از $[-3, 1]$ به $[1, 5]$ افزایش می‌یابند.

۶۸. گام ۲ برد $y = f(x)$ با توجه به شکل $[0, 2]$ است؛ پس برد $y = 2f(\dots)$ به صورت $[0, 4]$ خواهد بود (دو برابر کردیم) و برد $2f(\dots) - 3$ بازهٔ $[-3, 1]$ است (۳ تا کم کردیم).

گام ۳ برای برقراری نامساوی $|x| \geq k+3$ باید $k+3 \leq 0$ باشد، پس $k \leq -3$ و حداکثر مقدار k می‌شود -3 .

۶۰. گام ۳ $2f + |f|$ وقتی f مثبت باشد، می‌شود $3f$ و وقتی f منفی باشد، خود f است.

گام ۴ پس نمودار در ربع چهارم تغییر نمی‌کند، اما در ربع دوم برابر انبساط عمودی دارد.

۶۱. گام ۳ تکلیف قدرمطلق‌ها را معلوم کنیم:

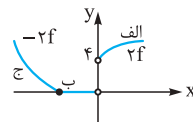
$$y = |f(x)| + \frac{|x|}{x} f(x)$$


الف) $x > 0, f > 0 \Rightarrow y = 2f(x)$

ب) $-3 < x < 0, f > 0 \Rightarrow y = f(x) - f(x) = 0$

ج) $x < -3, f < 0 \Rightarrow y = -f(x) - f(x) = -2f(x)$

گام ۴ نمودار را در نواحی مختلف می‌کشیم:



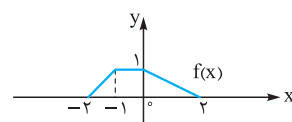
که دقیقاً ۳ است.

تیزبازی: برای ربع سوم، وقتی $x < 0$ و $f < 0$ است، داریم:

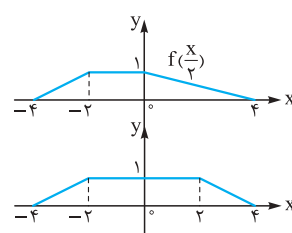
$$y = |f| - f = -2f > 0$$

پس در ربع سوم؛ یعنی برای $x < -3$ باید عرض‌ها مثبت باشند که فقط به ۳ می‌خورد.

۶۲. گام ۲ نمودار خود $f(x)$ را می‌کشیم:



اگر دنبال $f(x)$ هستیم، باید در نمودار $f(x-1)$ را به $x+1$ تبدیل کنیم و این یعنی ۱ واحد به چپ برویم.



گام ۳ نمودار $f\left(\frac{x}{3}\right)$ را می‌کشیم (طول‌ها ۲ برابر):

گام ۴ به خاطر $\left|\frac{x}{3}\right|$ راست را پاک

و چپ را به راست می‌بریم:

گام ۵ مساحت دوزنقه برابر است با:

$$\xrightarrow{\substack{\text{ارتفاع} \\ \text{قاعدهٔ کوچک} = 4 \\ \text{قاعدهٔ بزرگ} = 8}} \frac{(8+4) \cdot 1}{2} = 6$$

۶۳. گام ۴ مختصات هر یک از نقاط A و B باید در ضابطه صدق کند:

$$y = 2f\left(\frac{x}{3}\right) - 1 \xrightarrow{A(-2,5) \text{ صدق کند}} 5 = 2f\left(\frac{-2}{3}\right) - 1$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب}} f(-1) = \frac{5+1}{2} = 3$$

$$y = kf(x+2) + a \xrightarrow{B(a,9) \text{ صدق می‌کند}} 9 = kf(a+2) + a$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب}} f(a+2) = \frac{9-a}{k}$$

گام ۵ حالا چون این نقاط متناظرند، باید نتیجهٔ صدق کردن آن‌ها مقدار یکسانی از تابع باشد؛ یعنی $a+2 = -1$ و $\frac{9-a}{k} = 3$.

پس: $a = -3$ و بنابراین $\frac{9-(-3)}{k} = 3$ که از آن نتیجه می‌شود $k = \frac{12}{3} = 4$.

گام ۱ برای تبدیل دامنه $f(x)$ به $f(1+2x)$ باید x ها را یک واحد کم و سپس نصف کنیم:

$$D_{f(x)} = [-1, 3] \xrightarrow{\text{یک واحد به چپ}} D_{f(1+x)} = [-2, 2] \xrightarrow{\text{طول ها نصف}} D_{f(1+2x)} = [-1, 1]$$

گام ۲ اشتراک بازه های دامنه و برد $[-1, 1] \cap [-3, 1] = [-1, 1]$ است.

۶۹. گام ۳ برای تبدیل دامنه از $f(x-1)$ به $f(\frac{x}{2})$ ابتدا باید یک واحد به چپ ببریم تا به $f(x)$ برسیم و سپس x ها را دو برابر کنیم:

$$f(x-1) \xrightarrow{\text{یک واحد به چپ}} f(x+1-1) = f(x) \\ D = [-3, 4] \quad D = [-4, 3] \\ \xrightarrow{\text{طول ها دو برابر}} f(\frac{x}{2}) \\ D = [-8, 6]$$

اشاره: تا همین جا ۱ و ۴ رد شدند چون اشتراک این D با بازه دیگر، نمی تواند شامل عدد بیشتر از ۶ باشد.

گام ۳ برای تبدیل برد $2f$ به $-f+6$ باید y ها را نصف، سپس قرینه و سپس به علاوه ۶ کرد:

$$2f \xrightarrow{\text{نصف}} f \xrightarrow{\text{قرینه}} -f \xrightarrow{+6} -f+6 \\ -1 \leq y \leq 2 \quad -\frac{1}{2} \leq y \leq 1 \quad \frac{1}{2} \geq y \geq -1 \quad \frac{6}{5} \geq y \geq 5$$

گام ۴ پس اشتراک دامنه و برد به صورت $[-8, 6] \cap [5, 6/5]$ است که می شود $[5, 6]$.

۷۰. گام ۱ تا جایی که یادمان هست اگر دامنه $f(x)$ بازه $[b, c]$ باشد، دامنه $f(kx)$ باید شود $[\frac{b}{k}, \frac{c}{k}]$.

پس چیزی که سؤال گفته فقط در حالت $k=1$ امکان دارد.

گام ۲ اگر $1 = 2a^2 - a - 5 = k$ باشد داریم: $2a^2 - a - 6 = 0$
در این معادله $P < 0$ است؛ پس دو ریشه مختلف علامت دارد که ضربشان هم $P = \frac{C}{A} = \frac{-6}{2} = -3$ است.

۷۱. گام ۳ دامنه $f(x)$ از شرط $2x-4 \geq 0$ به صورت $x \geq 2$ یا $[2, +\infty)$ است که با انتقال ۳ واحد به چپ می شود $D_g = [-1, +\infty)$.

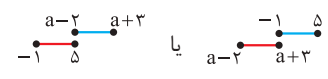
گام ۴ برد $f(x) = 3 - \sqrt{2x-4}$ به صورت $y \leq 3$ یا $(-\infty, 3]$ است و با انتقال ۴ واحد به بالا می شود $R_g = (-\infty, 7]$.

گام ۵ اشتراک دامنه و برد g برابر است با: $D_g \cap R_g = [-1, 7]$ که شامل ۹ عدد صحیح است: $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

۷۲. گام ۴ دامنه f با توجه به شکل $[-2, 4]$ است؛ پس دامنه $f(x-1)$ می شود $[-1, 5]$ (یک واحد به طرف راست برویم).

گام ۵ برد f با توجه به شکل $[-2, 3]$ است؛ پس برد $a+f(x-1)$ می شود $[-2+a, 3+a]$ ، چون a واحد به بالا بردیم.

گام ۶ اشتراک $[-1, 5]$ با $[a-2, a+3]$ تک عضوی است، پس نسبت به هم این شکلی اند:



یعنی $a+3 = -1$ یا $a-2 = 5$ ، بنابراین $a = -4$ یا $a = 7$ ، که جمعشان می شود ۳.

۷۳. گام ۲ برای رسیدن از $D_{f(x)} = [-3, 1]$ به $D_{f(1-2x)}$ می توانیم: $-3 \leq 1-2x \leq 1$ قرار دهیم:

$$-1 \rightarrow -4 \leq -2x \leq 0 \xrightarrow{\div (-2)} 2 \geq x \geq 0$$

پس $D_{f(1-2x)} = [0, 2]$.

گام ۱ اگر برد $f(x)$ بازه $[-3, 0]$ باشد، برد $bf(x)$ می شود $[0, -3b]$ (چون b منفی است) و برد $a+bf(x)$ بازه $[a, a-3b]$ خواهد بود.

گام ۲ از تساوی دامنه و برد داریم: $a = 0$ و $a-3b = 2$

$$\Rightarrow b = -\frac{2}{3}$$

و بنابراین: $a-b = \frac{2}{3}$.

۷۴. گام ۳ یک بار تا آخر صورت سؤال را بخوانید $f(x) = x \dots$ همانی است، پس ما با تابع $\frac{1}{x}$ شروع می کنیم.

$$\frac{1}{x} \xrightarrow{\text{واحد انتقال افقی}} \frac{1}{x-a} \xrightarrow{\text{قدر مطلق}} g(x) = \frac{1}{|x-a|} \\ \xrightarrow{\text{۲ واحد پایین}} \frac{1}{|x-a|} - 2 \xrightarrow{\text{برخورد با } \frac{1}{|f|} = \frac{1}{|x|}} \frac{1}{|x-a|} - 2 = \frac{1}{|x|}$$

گام ۴ ریشه معادله $\frac{\sqrt{2}}{x}$ است:

$$\frac{1}{|\frac{\sqrt{2}}{x} - a|} - 2 = \frac{1}{|\frac{\sqrt{2}}{x}|} = \sqrt{2} \xrightarrow{+2} \frac{1}{|\frac{\sqrt{2}}{x} - a|} = \sqrt{2} + 2 \\ \xrightarrow{\text{معکوس}} |\frac{\sqrt{2}}{x} - a| = \frac{1}{\sqrt{2} + 2} \xrightarrow{\text{گویا کردن مخرج}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

پس داریم:

$$|\frac{\sqrt{2}}{x} - a| = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{x} - a = \pm(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}) \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = \sqrt{2} - 1 \end{cases}$$

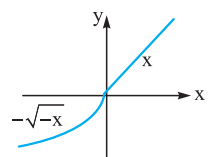
گام ۵ اختلاف مقادیر x در تساوی $f(x+a) = 3$ را می خواهیم. چون f همانی است، داریم:

$$x+a=3 \Rightarrow x=3-a \quad \begin{cases} x_1 = 3-a_1 \\ x_2 = 3-a_2 \end{cases} \\ \Rightarrow |x_1 - x_2| = |a_2 - a_1|$$

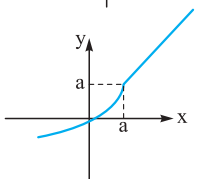
پس اختلاف x ها همان اختلاف a ها است که می شود:

$$|a_2 - a_1| = |\sqrt{2} - 2| = 2 - \sqrt{2}$$

۷۵. گام ۳ نمودار f را ببینید:

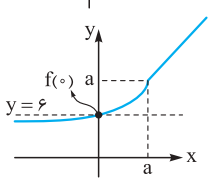


گام ۴ $a+f(x-a)$ یعنی f را a واحد به



راست و a واحد به بالا ببریم:

گام ۵ وقتی $y=6$ این خط را در ناحیه اول



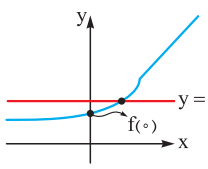
قطع نکرده؛ یعنی نقطه برخورد منحنی با محور y ، بالای $y=6$ است:

$f(0)$ بالای خط $y=6$ (برخورد در ناحیه دوم)

$f(0)$ پایین خط $y=6$ (برخورد در ناحیه اول)

$$y(0) = a + f(-a) = a + (-\sqrt{a}) \geq 6$$

از ضابطه پایین



گام ۶ با کنترل گزینه ها داریم: $a \geq 9$. البته اگر حوصله حل دارید:

$$a - \sqrt{a} - 6 = (\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} - 3) \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a} \geq 3 \Rightarrow a \geq 9$$

۱/۵ واحد به پایین $y = |2x + 2k + 1| - 1/5$

قرینه نسبت به محور عرضها $y = |-2x + 2k + 1| - 1/5$

گام ۱ حالا با نیمساز ربع اول و سوم تلاقی می‌دهیم.

$|-2x + 2k + 1| - 1/5 = x \Rightarrow |-2x + 2k + 1| = x + 1/5$

گام ۲ این معادله باید ۲ ریشه داشته باشد و اختلاف ریشه‌ها ۴ واحد باشد؛ پس:

$-2x + 2k + 1 = x + 1/5 \Rightarrow 3x = 2k + 4/5 \Rightarrow x = \frac{2k + 4/5}{3}$

$2x - 2k - 1 = x + 1/5 \Rightarrow x = 2k + 2/5$

$\begin{cases} \alpha - 4 = \frac{2k + 4/5}{3} \\ \alpha = 2k + 2/5 \end{cases} \Rightarrow (2k + 2/5) - (\frac{2k + 4/5}{3}) = 4$

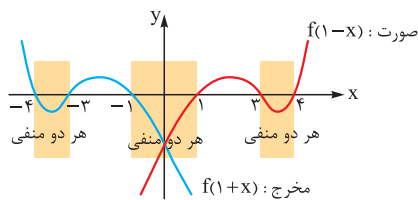
$6k + 2/5 - 2k - 4/15 = 12 \Rightarrow 4k = 4 \Rightarrow k = 1$

گام ۱ نمودار خود $f(x)$ را می‌کشیم.

باید $f(x-2)$ را ۲ واحد به چپ ببریم:
(x را به $x+2$ تبدیل کنیم.)

گام ۲ نمودار $f(1+x)$ با انتقال یک واحد به چپ و سپس از روی آن نمودار

$f(1-x)$ با قرینه نسبت به محور y ، به دست می‌آید:



گام ۳ جدول تعیین علامت $\frac{f(1-x)}{f(1+x)}$ را رسم می‌کنیم.

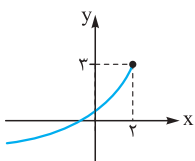
	-4	-3	-1	1	3	4
$f(1-x)$	-	-	-	-	+	-
$f(1+x)$	+	-	+	-	-	-
کسر	-	+	-	+	-	-
	تن	تن	تن			

گام ۴ دامنه بازه $(-4, -3) \cup (-1, 1) \cup [3, 4]$ است؛ یعنی ۴ عضو صحیح

در دامنه قرار دارد.

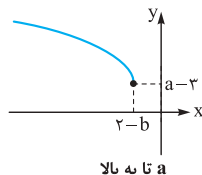
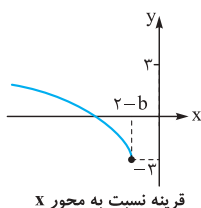
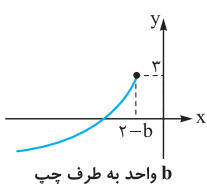
گام ۵ روش ۱ نمونه $f(x)$ را رسم کنیم:

صعودی با دامنه $(-\infty, 2]$ و برد $(-\infty, 3]$



گام ۶ برای $a - f(b+x)$ باید b واحد به چپ

برود و سپس قرینه نسبت به محور x و a واحد به بالا:

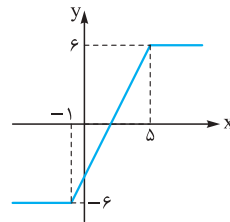


قرینه نسبت به محور x

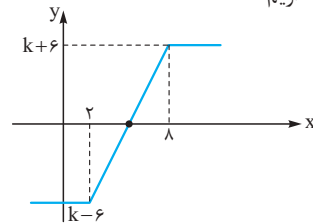
a تا به بالا

گام ۲ نمودار $y = |x+1| - |x-5|$ از نوع سرسره‌ای به

صورت روبه‌رو است:

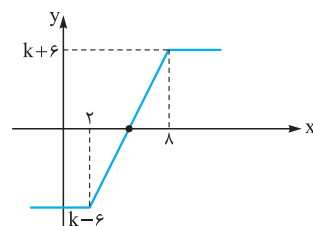


گام ۳ با ۳ واحد انتقال به طرف راست داریم:



$y = (x-3) + 1 - (x-3) - 5 = |x-2| - |x-8|$

گام ۴ k واحد به بالا هم می‌بریم:



$y = |x-2| - |x-8| + k$

گام ۵ معادله خطی که نقاط شکستگی را به هم وصل می‌کند،

$y = 2x + k - 10$ است (چه‌جوری نوشتیم؟) پس طول قاعده بزرگ دوزنقه

$\frac{10-k}{2}$ است ($y=0$ قرار دادیم) و داریم:

$S = \frac{\text{جمع دو قاعده}}{2} \times \text{ارتفاع} = \frac{(2 + \frac{10-k}{2}) |k-6|}{2}$

$= \frac{(14-k) |k-6|}{4} = 5 \xrightarrow{\text{کنترل گزینه}} k = 4$

گام ۳ با جابه‌جایی $\frac{\pi}{4}$ واحد در جهت مثبت محور x داریم:

$y = 2^{\sin(x - \frac{\pi}{4})}$

در ربع چهارم می‌افتد و $\sin(x - \frac{\pi}{4})$ می‌شود $-\cos x$. پس

$y = 2^{|\cos x|}$. دقت کنید که $|\cos x| = -\cos x$.

گام ۴ $\frac{3}{4}$ واحد انتقال در جهت منفی y هم داریم:

$y = 2^{|\cos x|} - \frac{3}{4}$

گام ۵ برای تلاقی با محور x داریم:

چون در معادله $2^{|\cos x|} = \frac{3}{4}$ مجهول در توان قرار دارد، از تعریف لگاریتم

$|\cos x| = \log_2 \frac{3}{4}$ می‌رویم:

با توجه به مقادیر $\log_2 1 = 0$ و $\log_2 2 = 1$ مقدار $\log_2 \frac{3}{4}$ عددی بین صفر و

یک است و با $|\cos x|$ دو بار در

فاصله $[0, \pi]$ مساوی می‌شود:

پس دو جواب داریم.

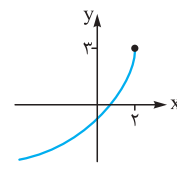
گام ۲ به ترتیب تبدیلات را انجام می‌دهیم:

$f(x) = |2x+1| \xrightarrow{\frac{k}{x} \text{ واحد به چپ}} y = |2x+2k+1|$

$y = |2x+2k+1| \xrightarrow{x \rightarrow x+k} y = |2x+2k+1|$

گام ۱ شکل مرحله آخر را ببینید ... برای این که محورها را قطع نکند، باید $2-b < 0$ و $a-3 > 0$ باشد؛ پس $b > 2$ و $a > 3$.

روشن ۲ نقطه شروع در نمودار $f(x)$ به صورت $(2, 3)$ است. یعنی $f(2) = 3$ را داریم. با قیافه‌ای به صورت مقابل:



گام ۳ در ضابطه $g(x)$ نقطه شروع را به دست می‌آوریم.
 $b+x=2 \Rightarrow x=2-b \xrightarrow{x=2-b} y=a-f(b+2-b)$
 $\Rightarrow y=a-f(2) \xrightarrow{f(2)=3} y=a-3$
 پس نقطه شروع به صورت $(2-b, a-3)$ است.

گام ۴ با توجه به ضریب منفی پشت f در $g(x) = a-f(\dots)$ نمودار نهایی نسبت به محور x قرینه می‌شود؛ یعنی قیافه‌اش به این صورت می‌شود:

گام ۵ با توجه به این که قرار نیست از محورهای مختصات عبور کند، پس نقطه شروع نمودار باید در ربع دوم باشد؛ یعنی:
 $2-b < 0 \Rightarrow b > 2$
 $a-3 > 0 \Rightarrow a > 3$

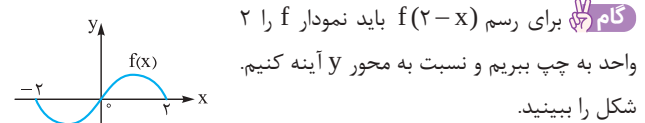
تیزبازی: باید به چپ و بالا برود، پس b بیشتر و a بیشتر مناسب است که فقط به ۲ می‌خورد.

۸۱. گام ۴ با توجه به $x=1$ و $y=2$ که خط چین رسم شده‌اند و عبور از مبدأ باید ضابطه به صورت $y = \frac{2x}{x-1}$ باشد.

گام ۵ $\frac{1}{f} = \frac{x-1}{2x}$ را دو واحد به راست می‌بریم: $\frac{(x-2)-1}{2(x-2)}$ و نسبت به محور x قرینه می‌کنیم: $-\frac{x-3}{2x-4}$ و سه واحد پایین می‌بریم: $-\frac{x-3}{2x-4} - 3$

گام ۶ ضابطه نهایی $y = \frac{-x+3-6x+12}{2x-4}$ است که می‌خواهیم محور x را قطع کند: $y=0 \xrightarrow{\text{صورت صفر است}} 15-7x=0 \Rightarrow x=\frac{15}{7}$

۸۲. گام ۳ همان قرینه نمودار f نسبت به $f(-x)$ برای رسم $f(2-x)$ باید نمودار f را ۲ واحد به چپ ببریم و نسبت به محور y آینه کنیم. شکل را ببینید.



پس ۳ می‌تواند مناسب باشد.
روشن ۲ از رابطه $y=f(x)$ و $y=-f(-x)$ نتیجه می‌گیریم با تبدیل x به $-x$ و y به $-y$ ضابطه تغییر نکرده پس $(0,0)$ مرکز تقارن تابع $y=f(x)$ بوده، پس در $y=f(2-x)$ مرکز تقارن $(2,0)$ است. (نقطه متناظر $(0,0)$ در $y=f(x)$ به نقطه $(2,0)$ در $y=f(2-x)$ تبدیل می‌شود. فقط در ۳ مرکز تقارن $(2,0)$ است.

۸۳. گام ۳ $\sqrt{3x^2-2x}$ را ۲ واحد به راست انتقال می‌دهیم:

گام ۴ برای قرینه نسبت به $x=1$ باید x را به $2-x$ تبدیل کنیم:

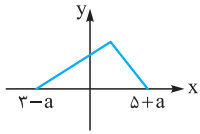
$\sqrt{3(2-x)^2-2(2-x-2)} = \sqrt{3x^2+2x}$
گام ۵ نمودار حاصل $y=\sqrt{3x^2+2x}$ است که $y+3=mx$ را در $x=-9$ قطع می‌کند؛ پس به ازای $x=-9$ ، y ها مساوی‌اند:

$y=m(-9)-3 = \sqrt{3(-9)^2+2(-9)}$
 $\Rightarrow -9m-3 = \sqrt{225} = 15 \xrightarrow{\text{مرتبه}} 9m = -18 \xrightarrow{\div 9} m = -2$
گام ۶ بالآخره $f(m)$ برابر است با:

$f(-2) = \sqrt{3(-2)^2-2(-2)} = \sqrt{16} = 4$
۸۴. گام ۳ با انتقال دو واحد به راست ابتدا و انتهای دامنه $a+2$ و $-a$ هستند.

گام ۴ برای قرینه نسبت به $x=\frac{5}{2}$ باید x را به $5-x$ تبدیل کنیم؛ پس سروه دامنه $5-(a+2)$ و $5-(-a)$ می‌شوند:

گام ۵ حالا شکلی به این صورت داریم و برای این که از ناحیه دوم نگذرد، باید $3-a \geq 0$ باشد؛ پس $a \leq 3$ و بیشترین مقدار a می‌شود ۳.



۸۵. گام ۱ برای قرینه نسبت به $y=3$ باید به جای y ، $6-y$ قرار دهیم:
 $6-y = 2-|x-3|$
 $y = 4+|x-3|$

گام ۲ حالا ۲ واحد به بالا و قرینه نسبت به محور طول:
 $y = -(6+|x-3|) = -|x-3|-6 = a|x+b|+c$
 $c=-6$ ، $a=-1$ ، $b=-3$
 و بنابراین:
 $a+b-c = (-1)+(-3)+6 = 2$

۸۶. گام ۱ فقط نقطه $A(-3, -2)$ را در نظر می‌گیریم؛ پس می‌دانیم:
 $f(-3) = -2$

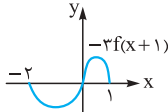
گام ۲ می‌خواهیم نقطه متناظر A را در نمودار $g(x) = a-2f(\frac{x+b}{3})$ پیدا کنیم. اولاً $\frac{x+b}{3}$ باید برابر -3 شود که از آن جا طول نقطه متناظر به دست می‌آید.
 $\frac{x+b}{3} = -3 \Rightarrow x = -9-b$

ثانیاً برابر عرض نقطه متناظر جای گذاری $x = -9-b$ را انجام می‌دهیم.
 $g(x) = y = a-2f(-3) \xrightarrow{f(-3)=-2} y = a-2(-2) = a+4$
 پس نقطه متناظر دارای مختصات $(-9-b, a+4)$ است.

گام ۳ با توجه به این که $y=f(x)$ به $y=a-2f(\frac{x+b}{3})$ تبدیل شده است. به خاطر وجود ضریب منفی پشت f عملاً یک قرینه‌یابی نسبت به محور x باید

انجام بدهیم پس قیافه نمودار از حالت $\bullet$ به حالت $\bullet$ تبدیل می‌شود.
گام ۴ با توجه به این که نمی‌خواهیم محورها را قطع کند، پس نقطه متناظر به دست آمده باید در ناحیه چهارم باشد؛ یعنی:
 $-9-b > 0 \Rightarrow b < -9$
 $a+4 < 0 \Rightarrow a < -4$
 که ۱ صحیح می‌باشد.

۸۷. گام ۱ برای رسیدن از $-3f(-\frac{x}{3}+1)$ به $y=f(x)$ اول به جای x قرار می‌دهیم $-2x$ (لج‌بازی کنیم در نمودار طول‌ها را بر ۲ تقسیم کنیم).
 که اگر این کار را انجام دهیم، به $-3f(x+1)$ می‌رسیم.



پس نقطه متناظر $(2a+3, a-8)$ است.

گام ۳ این نقطه باید روی $y=3x+3$ باشد:

$$a-8=3(2a+3)+3 \Rightarrow -20=5a \Rightarrow a=-4$$

۹۱. **گام ۳** برای رسیدن از $f(x)$ به $f(3-2x)$ باید x ها را ۳ واحد به

چپ ببریم و بر ۲- تقسیم کنیم؛ پس α به $\frac{\alpha-3}{-2}$ تبدیل می شود.

گام ۳ جمع ریشه ها $\alpha+\beta+\gamma+\dots$ است و به $\frac{3-\alpha}{2}+\frac{3-\beta}{2}+\frac{3-\gamma}{2}+\dots$

می رسد. اگر n ریشه داشته باشیم، جمع جدید $\frac{3n-(\alpha+\beta+\gamma+\dots)}{2}$ است؛ پس:

$$6=\frac{3n-12}{2} \Rightarrow 3n=12+12=24 \Rightarrow n=8$$

۹۲. **گام ۱** در (x, y) $y=f(x)$ تبدیل شده است به $A'(X, Y)$

در نمودار تبدیل یافته و داریم:

$$\begin{cases} X=\frac{1+x}{2} \\ Y=2y+1 \end{cases}$$

از ۲ معادله بالا x و y را بر حسب X و Y به دست می آوریم:

$$\begin{cases} x=2X-1 \\ y=\frac{Y-1}{2} \end{cases}$$

گام ۳ چون داشتیم $y=f(x)$ می توانیم آن ها را بر حسب X و Y بنویسیم:

$$\frac{Y-1}{2}=f(2X-1) \xrightarrow{\times 2} Y-1=2f(2X-1)$$

$$\Rightarrow Y=2f(2X-1)+1$$

$$g(x)=2f(2x-1)+1=2(3-\sqrt{2x-1})+1=7-2\sqrt{2x-1}$$

گام ۳ دامنه g به صورت $x \in [\frac{1}{2}, +\infty)$ $\Rightarrow 2x-1 \geq 0$ و برد آن $[-\infty, 7]$

است. در اشتراک آن ها از ۱ تا ۷، هفت عدد صحیح داریم.

۹۳. **گام ۴** f و g را به ترتیب x^3 و x^4 در نظر می گیریم.

گام ۳ پس در $f+g$ باید x^4+x^3 داشته باشیم و درجه ۴ است.

در f^2 باید $(x^3)^2$ ایجاد شود؛ یعنی درجه ۶ است.

در fg هم $x^3x^4=x^7$ داریم؛ یعنی به درجه ۷ می رسد.

۹۴. **گام ۳** نگران حذف شدن جمله ها هستیم (مثلاً x^6 ها با هم

می روند)؛ پس بهتر است عبارت را ساده کنیم.

گام ۳ به جای a^2-b^2 می نویسیم $(a-b)(a+b)$ و داریم:

$$\begin{aligned} & (x^3+2x+3)^2 - (x^3-2x-3)^2 \\ &= \underbrace{(x^3+2x+3+x^3-2x-3)}_{2x^3} \underbrace{(x^3+2x+3-x^3+2x+3)}_{4x+6} \\ &= 2x^3(4x+6) = 8x^4 + 12x^3 \end{aligned}$$

گام ۳ حالا $8x^4$ هم داریم؛ پس $f(x)=12x^3-8x^4$ که از درجه سوم است.

۹۵. **گام ۲** $(x^2+1)^2$ درجه چهارم است؛ پس برای رسیدن به درجه ۷ باید

$(1-x)^n$ درجه سوم باشد؛ پس $n=3$ و $f(x)=(x^2+1)^2(1-x)^3+k$

گام ۳ حالا $f(-1)$ برابر است با: $k+((-1)^2+1)^2(1-(-1))^3=k+4$

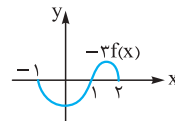
$$=2^2 \times 2^2 + k = k+16 = -10 \Rightarrow k=-42$$

گام ۳ پس داریم: $n+k=3+(-42)=-39$

۹۶. **گام ۱** می دانیم برد توابع چندجمله ای با درجه زوج هرگز $\mathbb{R}$

نیست؛ پس $f(x)$ باید چندجمله ای درجه فرد شود:

$$x^6 \text{ و } x^4 \text{ باید بروند} \rightarrow a^2-4=2-a=0 \Rightarrow a=2$$

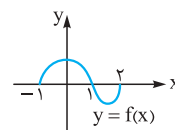


گام ۳ حالا به جای x قرار می دهیم $x-1$ تا به

$-3f(x)$ برسیم (لججازی کنیم در نمودار ۱ واحد

به راست برویم).

سپس عرض ها را در $\frac{1}{3}$ ضرب می کنیم:



رسیدیم به $f(x)$.

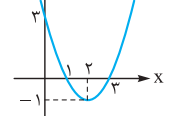
گام ۳ حالا جدول تعیین علامت $(x+1)f(x)$ را رسم می کنیم.

x	-1	1	2
$x+1$	-	+	+
$f(x)$	+	+	-
$(x+1)f(x)$	-	+	-

گام ۳ با توجه به این که زیر رادیکال باید نامنفی باشد، دامنه به صورت

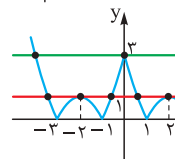
$\{-1, 1\} \cup [2, +\infty)$ می شود و $b=1, a=-1$ و $c=2$ است و $c-b-2a=3$.

۸۸. **گام ۱** نمودار $y=x^2-4x+3$ را بلدیم:



می دانیم $x^2=|x|$ پس دنبال رسم نمودار $y=f(|x|)$

هستیم پس باید:



گام ۳ قسمت زیر محور x را بالا

می آوریم، سپس سمت چپ را پاک

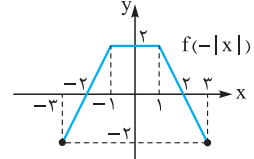
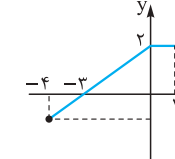
و راست را به چپ آینه می کنیم:

گام ۳ این نمودار خط $y=1$ را در ۶ نقطه و خط $y=3$ را در ۳ نقطه قطع

می کند؛ پس: $k=1, k'=3, k'-k=2$.

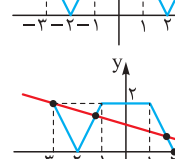
۸۹. **گام ۴** برای رسم $f(-|x|)$ اول $f(-x)$ را رسم می کنیم،

سپس سمت چپ محور را پاک و راست را به چپ آینه می کنیم:



گام ۳ حالا قسمت زیر محور x را به

بالا می آوریم تا به $|f(-|x|)|$ برسیم:



گام ۳ در این شکل $3y+x=3$ را

هم رسم می کنیم:

پس: $n=4$ (تعداد نقاط برخورد)

$$\xrightarrow{n=4} f\left(\frac{n+1}{2}\right) = f\left(\frac{5}{2}\right)$$

گام ۳ پس داریم:

معادله خط f با دو نقطه $(0, 2)$ و $(4, -1)$ به صورت $y=-\frac{3}{4}x+2$ است و داریم:

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{3}{4} \times \frac{5}{2} + 2 = 2 - \frac{15}{8} = \frac{1}{8} = 0.125$$

۹۰. **گام ۴** نقطه $A(-3, 4)$ روی نمودار $y=f(x)$ است؛ پس

$f(-3)=4$. برای به دست آوردن طول نقطه متناظر باید $2a-x=-3$

شود؛ پس طول نقطه متناظر می شود:

برای به دست آوردن عرض نقطه متناظر کافی است به جای $f(-3)$ عدد ۴ قرار

دهیم و y را به دست آوریم:

$$y=a-2 \times 4=a-8$$