



گاج

پیشرفته

فرمول

پایه

فیزیک تجربی دوازدهم

مؤلف: علیرضا سلیمانی

۱۶۰

تیپ آموزشی

۱۸۰۰

پرسش تشریحی

با نام آن که دانایی را چراغ راه انسان قرار داد.

تقدیم به همسر و فرزندم که بودندشان همواره
انگیزه‌ای برای بهتر شدن و ادامه دادن بوده است.

پس از حدود ۲۵ سال تدریس فیزیک و زندگی در کنار دانش‌آموزان، حاصل بخشی از این تجربه در قالب کتاب «فرمول بیست فیزیک» پیش روی شما عزیزان قرار دارد. کتابی که تلاش کردم در آن «آموزش»، «تمرین» و «سنجش» در مسیری منظم و هدفمند کنار هم قرار گیرند.

در این کتاب:

- درسمه‌های کامل، مفهومی و مطابق با ترتیب صفحات کتاب درسی در قالب «بسته» آورده شده‌اند.
- سؤال‌های تیپ‌بندی‌شده، در دل درسمه‌ها قرار گرفتند تا مفاهیم و روش حل‌ها در قالب سؤال‌های متنوع و هدفمند آموزش داده شوند.
- ایستگاه تمرین، محلی برای تثبیت آموخته‌ها و تبدیل آن‌ها به مهارت را فراهم می‌کند.

بانک سؤالات

- سؤال‌های آزمون نهایی در دو بخش «مفاهیم» و «مسائل» به صورت کاملاً منظم دسته‌بندی شده‌اند.
- سؤالات تکمیلی در راستای آزمون‌های نهایی با سطحی کمی بالاتر از سؤالات آزمون نهایی برای چالش بیشتر قرار گرفته‌اند.

تشکر و قدردانی

در شکل‌گیری این مجموعه تشکر صمیمانه دارم از:

- آقای مهندس محمد جوکار، مدیریت محترم انتشارات، بابت حمایت و همراهی ارزشمندشان
- آقای امین اسماعیل‌زاده، سرکار خانم سعادت‌خواه و اعضای واحد تألیف و فنی بابت دقت، حوصله و تلاش بسیار
- همکاران عزیزم آقایان امیر غرق‌شفیعی، محمدعلی زمانی‌فر و سرکار خانم نوری
- دانش‌آموزهای پرتلاش، آراد گل‌بابایی رتبه ۲۵۰ رشته تجربی و کیارش کمالی رتبه ۴۰۳ رشته ریاضی سال ۱۴۰۴ بابت بررسی بخش‌هایی از کتاب

در آخر؛

- از همکاران عزیز و گرامی خواهرشنم نظرات و پیشنهادهای خود را در راستای بهبود کتاب در پیام‌رسان تلگرام و بله با آیدی @alirezasoleimani1 مطرح کنند.
- دانش‌آموزان گرامی می‌توانند با عضویت در کانال @f20fizik در پیام‌رسان‌های بله و تلگرام از محتوای آموزشی و حل کامل سؤالات و بررسی درسمه‌ها در طول سال تحصیلی بهره‌مند شوند.

تو پای به راه در نه و هیچ سپرس
خود راه بگوید که چون باید رفت

علیرضا سلیمانی

(مولانا)

فهرست

فصل اول حرکت بر خط راست

بسته ۱ شناخت مفاهیم حرکت (۱)	بسته ۲ شناخت مفاهیم حرکت (۲)	بسته ۳ شناخت مفاهیم حرکت (۳)	بسته ۴ حرکت با سرعت ثابت	بسته ۵ حرکت با شتاب ثابت
۶	۲۹	۴۱	۵۷	۶۸

فصل دوم دینامیک

بسته ۱ قوانین حرکت نیوتون	بسته ۲ نیروی وزن / نیروی مقاومت شاره / ...	بسته ۳ نیروی اصطکاک / نیروی سطح تکیه‌گاه	بسته ۴ نیروی کشسانی فنر / نیروی ...	بسته ۵ تکانه و قانون دوم نیوتون	بسته ۶ نیروی گرانشی
۹۸	۱۱۲	۱۲۶	۱۴۳	۱۵۴	۱۶۳

فصل سوم نوسان و امواج

بسته ۱ حرکت هماهنگ ساده	بسته ۲ سامانه جرم - فنر	بسته ۳ انرژی در حرکت هماهنگ ساده	بسته ۴ آونگ ساده و تشدید
۱۷۰	۱۸۳	۱۹۳	۲۰۵

بسته ۵ موج و انواع آن	بسته ۶ امواج الکترومغناطیسی	بسته ۷ امواج طولی	بسته ۸ بازتاب موج	بسته ۹ شکست موج
۲۱۵	۲۳۱	۲۳۹	۲۵۸	۲۶۹

ضمیمه

ضمیمه ۱ پاسخ‌نامه تشریحی فصل ۱ تا ۴	ضمیمه ۲ دو دوره امتحان نهایی
۳۴۳	۴۵۵

فصل چهارم آشنایی با فیزیک اتمی و هسته‌ای

بسته ۱ اثر فوتوالکتریک و فوتون	بسته ۲ طیف خطی	بسته ۳ مدل‌های اتمی تامسون، رادرفورد ...	بسته ۴ فیزیک هسته‌ای
۲۸۶	۲۹۷	۳۰۶	۳۲۶

فصل

حرکت بر خط راست



پسته ۵

حرکت با
شتاب
ثابت



پسته ۴

حرکت با
سرعت
ثابت



پسته ۳

شناخت
مفاهیم
حرکت
(۳)



پسته ۲

شناخت
مفاهیم
حرکت
(۲)



پسته ۱

شناخت
مفاهیم
حرکت
(۱)

بسته

تعداد
تیپ ۹

شناخت مفاهیم حرکت (۱)

صفحه ۲ تا ۴
کتاب درسی

در این قسمت به معرفی و بررسی مفاهیمی مانند بردار مکان، بردار جابه‌جایی، مسافت، زمان، سرعت متوسط، تندی متوسط و معادله مکان - زمان می‌پردازیم.

حرکت‌شناسی

حرکت: اگر مکان یا موقعیت (Location) یک جسم با گذشت زمان نسبت به یک **مبدأ مقایسه** تغییر کند، می‌گوییم جسم **حرکت** کرده است. تغییر مکان یک جسم می‌تواند بر **۱** امتداد یک مسیر مستقیم (حرکت بر خط راست) یا **۲** بر مسیر منحنی (حرکت در صفحه) یا به صورت **۳** ارتعاش (نوسان) به سمت چپ و راست (بالا و پایین) باشد (حرکت نوسانی).



(حرکت بر خط راست)



(حرکت بر مسیر منحنی)



(حرکت نوسانی)

برای بررسی حرکت یک جسم باید بدانیم، جسم در چه لحظه‌ای، در چه مکانی قرار گرفته است. در این فصل، حرکت اجسام بر روی خط راست را بررسی می‌کنیم.

مکان (x)

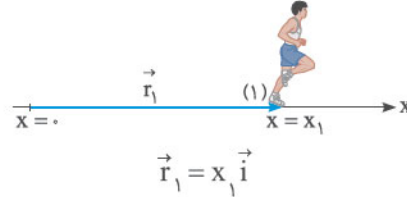
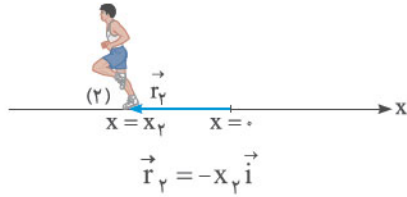
موقعیت (Location) یک متحرک در محور انتخابی نسبت به **مبدأ محور** ($x = 0$) در هر لحظه دلخواه را **مکان** آن متحرک می‌گویند. برای نمونه در شکل زیر موقعیت یک دونه در لحظه‌های متفاوت، روی محور x نشان داده شده است. تغییر در این موقعیت‌ها نشان‌دهنده حرکت دونه است.

در مدل‌سازی حرکت، متحرک را به صورت **ذره (نقطه)** در نظر می‌گیریم و موقعیت آن را روی محور x، به عنوان مکان آن در هر لحظه مشخص می‌کنیم.



بردار مکان ($\vec{r}$)

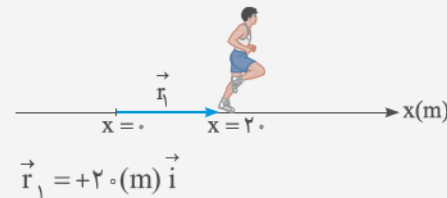
بردار مکان: برداری است که در هر لحظه، مبدأ محور ($x=0$) را به مکان جسم (x) وصل می‌کند. برای نمونه در شکل زیر، بردار مکان دنده‌ای در مکان‌های (۱) و (۲) مشخص شده است.



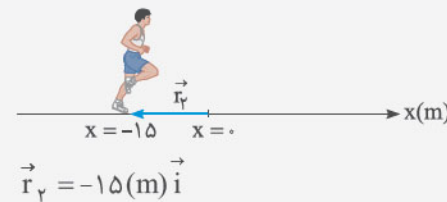
نکات مربوط به بردار مکان:

۱. بردار مکان، وابسته به مبدأ محور ($x=0$) است. یعنی اگر مبدأ محور را تغییر دهیم، بردار مکان تغییر می‌کند.

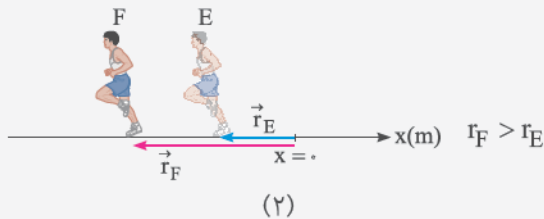
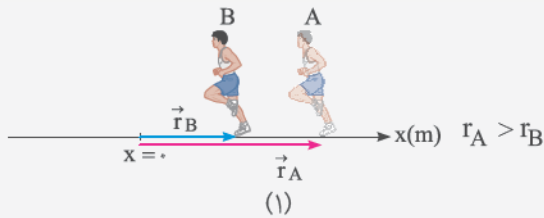
۲. اگر جسم در مکان‌های مثبت ($x > 0$) باشد، علامت بردار مکان، مثبت است.



۳. اگر جسم در مکان‌های منفی ($x < 0$) باشد، علامت بردار مکان، منفی است.

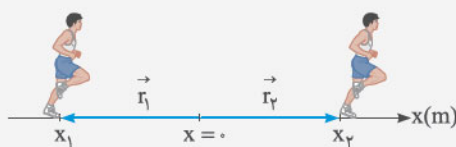


۴. اگر جسم در طول حرکت به مبدأ محور ($x=0$) نزدیک شود، اندازه بردار مکان آن در هر لحظه نسبت به لحظه قبل، کوچک‌تر می‌شود (شکل ۱) و در صورتی که جسم از مبدأ محور ($x=0$) دور شود، اندازه بردار مکان آن در هر لحظه، نسبت به لحظه قبل، بزرگ‌تر می‌شود (شکل ۲).



۵. اگر جسم از مبدأ محور ($x=0$) عبور کند، بردار مکان آن، تغییر جهت می‌دهد.

برای نمونه در شکل زیر، ابتدا بردار مکان دنده در خلاف جهت محور x و در نهایت بردار مکان دنده در جهت محور x قرار می‌گیرد؛ یعنی علامت بردار مکان، در حرکت از مکان x_1 تا مکان x_2 ، یک بار تغییر کرده است.



زمان (t)

برای اندازه‌گیری زمان از «زمان‌سنج» یا «کرونومتر» استفاده می‌کنیم.

لحظه: عددی را که عقربه زمان‌سنج نشان می‌دهد، لحظه می‌گویند. به عبارت دیگر، لحظه به یک نقطه خاص در زمان اشاره دارد. برای نمونه در شکل روبه‌رو، زمان‌سنج، لحظه $t = 15$ s را نشان می‌دهد.

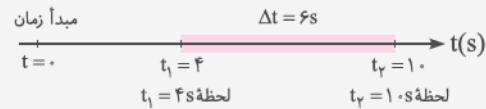
بازه زمانی (مدت زمان Δt): به طول یا مدت گذرانده‌شده بین دو رویداد اشاره می‌کند. بازه زمانی از یک لحظه مانند t_1 آغاز شده و تا لحظه دیگری مانند t_2 طول می‌کشد، بنابراین مدت زمان به صورت $\Delta t = t_2 - t_1$ اندازه‌گیری می‌شود. مدت زمان می‌تواند به صورت مشخص (مثلاً ۵ دقیقه) یا به صورت نسبی (کم یا زیاد) بیان شود.

برای نمونه در شکل مقابل، زمان‌سنج، فاصله زمانی بین دو لحظه $t_1 = 5$ s و $t_2 = 1$ s را مشخص می‌کند؛ یعنی مدت زمانی به اندازه ۵ s را اندازه‌گیری کرده است.



نکات مربوط به بررسی زمان:

۱. در بررسی کمیت زمان می توان آن را بر روی یک محور افقی مانند شکل زیر در نظر گرفت:



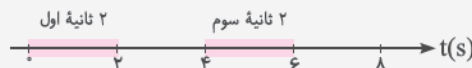
$$\Delta t = t_2 - t_1 = 10 - 4 = 6s$$

۲. اگر روی محور زمان، بازه‌هایی به اندازه یک واحد انتخاب کنیم، آن یک واحد معادل یک ثانیه است. برای نمونه «ثانیه سوم»، بازه زمانی به اندازه یک ثانیه بین دو لحظه $t_1 = 2s$ و $t_2 = 3s$ است.



$$t_1 = (n-1), t_2 = n \text{ : ثانیه } n \text{ ام}$$

۳. اگر تقسیم بندی روی محور زمان دو یا سه برابر شود، می توانیم بازه های زمانی به اندازه ۲ ثانیه و ۳ ثانیه ایجاد کنیم.



$$t_1 = (n-1)t, t_2 = (n)t \text{ : ثانیه } n \text{ ام}$$



$$t_1 = 6s, t_2 = 9s \text{ : ثانیه سوم ۳}$$

معادله مکان برحسب زمان (معادله حرکت)

معادله حرکت: تابعی از زمان است که مکان جسم را در زمان های مختلف مشخص می کند. به عبارت دیگر مشخص می کند که چگونه مکان یک جسم به صورت پیوسته تغییر می کند.

با استفاده از معادله مکان - زمان می توان موارد زیر را مشخص کرد:

(الف) مکانی که متحرک در لحظه t در آن قرار دارد.

(پ) مکان اولیه (x_0)، یعنی، مکانی که متحرک در لحظه شروع حرکت ($t=0$) در آن قرار دارد.

(ت) لحظه یا لحظه هایی که متحرک در مبدأ مکان ($x=0$) قرار می گیرد.

(ج) مشخص کردن لحظه های عبور از مبدأ مکان ($x=0$) و تغییر جهت بردار مکان

بررسی حرکت جسم با استفاده از معادله مکان - زمان

تیب

۱. معادله مکان برحسب زمان مربوط به یک متحرک در SI به صورت $x = t^2 - 10t + 21$ است.

(الف) بردار مکان اولیه متحرک را در SI بنویسید.

(پ) در چه لحظه یا لحظه هایی، بردار مکان متحرک در SI برابر $\vec{r} = +5\vec{i}$ می شود؟

(ت) در چه لحظه یا لحظه هایی، متحرک در مبدأ محور قرار می گیرد؟ (ث) در چه لحظه یا لحظه هایی، جهت بردار مکان متحرک تغییر می کند؟

(ج) در ۱۰ ثانیه اول حرکت، چند ثانیه بردار مکان متحرک در خلاف جهت محور x قرار می گیرد؟

$$t_0 = 0 \Rightarrow x_0 = +21m \Rightarrow \vec{r}_0 = (+21m)\vec{i}$$

(الف)

$$t_1 = 5s \Rightarrow x_1 = 25 - 50 + 21 = -4m \Rightarrow \vec{r}_1 = (-4m)\vec{i}$$

(ب)

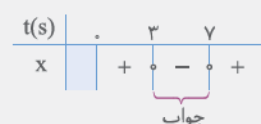
$$x = +5m \Rightarrow t^2 - 10t + 21 = 5 \Rightarrow t^2 - 10t + 16 = 0 \Rightarrow (t-2)(t-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 2s \\ t_2 = 8s \end{cases}$$

(پ)

$$x = 0 \Rightarrow t^2 - 10t + 21 = 0 \Rightarrow (t-3)(t-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 3s \\ t_2 = 7s \end{cases}$$

(ت)

(ث) در لحظه یا لحظه هایی که متحرک از مبدأ محور عبور می کند (یعنی لحظه یا لحظه هایی که علامت x تغییر می کند)، جهت بردار مکان متحرک تغییر خواهد کرد. از ریاضی می دانیم که در معادله درجه دوم با ریشه های متمایز، حتماً علامت تابع حول ریشه های معادله عوض می شود، بنابراین جهت بردار مکان متحرک در لحظه های $t_1 = 3s$ و $t_2 = 7s$ تغییر می کند.



(ج) برای یافتن بازه زمانی ای که در آن بردار مکان متحرک در خلاف جهت محور x قرار گیرد (علامت x منفی

شود)، باید معادله مکان برحسب زمان آن را تعیین علامت کرد.

با توجه به جدول فوق در بازه زمانی $t_1 = 3s$ تا $t_2 = 7s$ ، متحرک در مکان های منفی حضور دارد؛ یعنی به مدت زمان $4s$ ، بردار مکان آن در خلاف جهت محور x است.

سرعت متوسط ($\vec{v}_{av}$)

سرعت متوسط: به نسبت بردار جابه جایی بین دو نقطه از مسیر به مدت زمان انجام این جابه جایی، **سرعت متوسط** می گویند. برای محاسبه سرعت متوسط از رابطه مقابل استفاده می کنیم:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t}$$

در این رابطه، $\vec{d}$ ، جابه جایی برحسب متر و Δt ، مدت زمان برحسب ثانیه است؛ بنابراین یکای سرعت متوسط در SI، متر بر ثانیه (m/s) است. اگر جسم روی **خط راست** و در امتداد محور x حرکت کند، سرعت متوسط را می توان از رابطه مقابل محاسبه کرد:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

نکات مربوط به سرعت متوسط:

۱. سرعت متوسط، کمیتی برداری است.
۲. سرعت متوسط، همواره در جهت بردار جابه جایی است.
۳. سرعت متوسط، جهت کلی حرکت را مشخص می کند. اگر علامت آن مثبت باشد، جسم در جهت محور جابه جا می شود و اگر علامت آن منفی باشد، جسم خلاف جهت محور جابه جا می شود.
۴. سرعت متوسط، مستقل از مسیر حرکت است.
۵. سرعت متوسط، جابه جایی متوسطی است که متحرک در هرثانیه انجام می دهد.
۶. سرعت متوسط، اطلاعاتی از نقاط میانی مسیر حرکت بیان نمی کند.
۷. اگر جسم ساکن باشد یا به مکان اولیه خود باز گردد، سرعت متوسط آن، صفر است.

خرداد و شهریور ۱۴۰۰ ریاضی - خرداد ۹۹ ریاضی

خرداد ۹۹ تجربی

تندی متوسط (s_{av})

تندی متوسط: به نسبت مسافت پیموده شده به مدت زمان انجام آن، **تندی متوسط** می گویند. برای محاسبه تندی متوسط از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t}$$

در این رابطه l ، مسافت برحسب متر و Δt ، مدت زمان برحسب ثانیه است؛ بنابراین یکای تندی متوسط در SI، متر بر ثانیه (m/s) است. **توجه** سرعت متوسط و تندی متوسط برحسب یکای «کیلومتر بر ساعت (km/h)» نیز بیان می شوند. رابطه این دو یکا را می توان به صورت مقابل نوشت:

$$\frac{km}{h} \xrightarrow{\div 3.6} \frac{m}{s} \xrightarrow{\times 3.6} \frac{km}{h}$$

اعداد جدول مقابل را می توان برای تبدیل سریع تر این دو یکا به یکدیگر به خاطر سپرد.

km / h	m / s
۱۸	۵
۳۶	۱۰
۵۴	۱۵
۷۲	۲۰
۹۰	۲۵

نکات مربوط به تندی متوسط:

۱. تندی متوسط، کمیتی نرده ای است.
۲. تندی متوسط، به مسیر حرکت بستگی دارد.
۳. تندی متوسط، مسافتی است که به طور متوسط در هر ثانیه توسط جسم پیموده می شود.

شهریور ۱۴۰۰ تجربی - خرداد ۱۴۰۱ ریاضی

مقایسه سرعت متوسط و تندی متوسط:

۱. اگر متحرک بر روی خط راست (مسیر مستقیم) و بدون تغییر جهت حرکت کند، تندی متوسط و اندازه سرعت متوسط آن، برابر هستند.

شهریور ۱۴۰۰ تجربی - پرسش کتاب درسی

$$s_{av} = |v_{av}|$$

۲. اگر جهت حرکت متحرک تغییر کند، اندازه سرعت متوسط، کوچک‌تر از تندی متوسط است.

شهریور ۱۴۰۱ ریاضی

$$s_{av} > |v_{av}|$$

۳. اگر مسیر حرکت جسم خط راست نباشد، تندی متوسط بزرگ‌تر از اندازه سرعت متوسط است.

$$s_{av} \geq |v_{av}|$$

نتیجه در حالت کلی می‌توان گفت، تندی متوسط از اندازه سرعت متوسط بزرگ‌تر یا برابر با آن است.

محاسبه سرعت متوسط به کمک بردار مکان

تیب

دونده‌ای روی محور x حرکت می‌کند. اگر در لحظه $t_1 = 2s$ ، بردار مکان آن در SI به صورت $\vec{r}_1 = -2\vec{i}$ و در لحظه $t_2 = 22s$ بردار مکان آن به صورت $\vec{r}_2 = 20\vec{i}$ باشد، بردار سرعت متوسط آن بین دو لحظه t_1 و t_2 را در SI بنویسید.

$$\Delta \vec{x} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = 20\vec{i} - (-2\vec{i}) = (22\text{ m})\vec{i}, \quad \vec{v}_{av} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{22\vec{i}}{22-2} = \frac{22}{20}\vec{i} = (1.1\text{ m/s})\vec{i}$$

محاسبه سرعت متوسط به کمک معادله مکان - زمان

تیب

معادله مکان - زمان مربوط به یک متحرک در حرکت روی خط راست در SI به صورت $x = t^2 + 5t - 10$ است. بزرگی سرعت متوسط آن در ۳ ثانیه دوم حرکت، چند متر بر ثانیه است؟

ابتدا جابه‌جایی متحرک را در بازه زمانی مشخص شده ($t_2 = 6s$ تا $t_1 = 3s$) محاسبه می‌کنیم، سپس سرعت متوسط آن را به دست می‌آوریم:

$$3\text{ ثانیه دوم حرکت: } \begin{cases} t_1 = 3s \Rightarrow x_1 = 9 + 15 - 10 = 14\text{ m} \\ t_2 = 6s \Rightarrow x_2 = 36 + 30 - 10 = 56\text{ m} \end{cases}$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{56 - 14}{6 - 3} = \frac{42}{3} = 14\text{ m/s}$$

محاسبه تندی متوسط به کمک معادله مکان - زمان

تیب

معادله مکان - زمان مربوط به حرکت جسمی روی خط راست در SI به صورت $x = t^2 - 8t + 15$ است. تندی متوسط آن از لحظه‌ای که برای اولین بار بردار مکان تغییر جهت می‌دهد تا لحظه $t = 6s$ را حساب کنید.

برای محاسبه تندی متوسط باید مسافت پیموده شده را مشخص کرد. در این صورت ابتدا مسیر حرکت را با توجه به معادله حرکت داده شده رسم می‌کنیم:

$$x = 0 \Rightarrow t^2 - 8t + 15 = 0 \Rightarrow (t-3)(t-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 3s \\ t_2 = 5s \end{cases}$$

$$t_{\text{راس}} = \frac{3+5}{2} = 4s, \quad x_{\text{راس}} = (4)^2 - 8(4) + 15 = -1\text{ m}$$



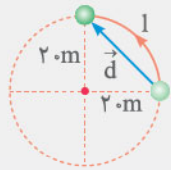
$$l = |-1 - 0| + (3 - (-1)) \Rightarrow l = 5\text{ m}$$

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{5}{6-3} \Rightarrow s_{av} = \frac{5}{3}\text{ m/s}$$

بنابراین تندی متوسط برابر است با:

❶ موتورسواری یک میدان دایره‌ای به شعاع 20m را دور می‌زند. اگر در مدت زمان 10s ، $\frac{1}{4}$ دور بزند، تندی متوسط و اندازه سرعت متوسط آن در این مدت چند متر بر ثانیه است؟ از مقایسه اندازه سرعت متوسط و تندی متوسط موتورسوار در این حرکت چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟ ($\sqrt{2} \approx 1/4$)

ابتدا با رسم شکل، اندازه جابه‌جایی و مسافت پیموده شده توسط موتورسوار را محاسبه می‌کنیم. در شکل زیر موتورسوار را به صورت ذره، مدل‌سازی کرده‌ایم:



$$d = \sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2} = 20 \cdot \sqrt{2} = 20 \times 1/4 = 28\text{m}$$

$$l = \frac{1}{4} \times 2\pi r = \frac{\pi r}{2} = \frac{3/14 \times 20}{2} = 3/14\text{m}$$

اکنون با استفاده از اندازه جابه‌جایی و مسافت پیموده شده، اندازه سرعت متوسط و تندی متوسط موتورسوار را به دست می‌آوریم:

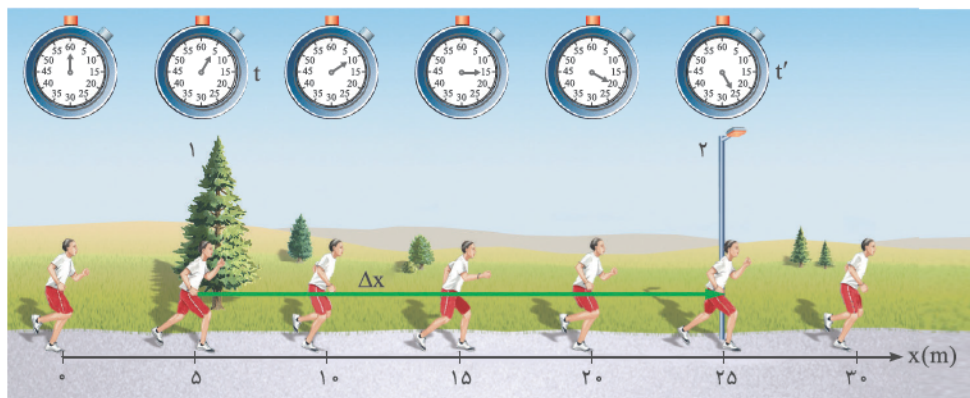
$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{3/14}{10} = 3/14 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{av} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{28}{10} = 2/8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

با توجه به اعداد به دست آمده، می‌توان نتیجه گرفت در حرکت روی مسیر منحنی (غیر خط راست)، اندازه سرعت متوسط بین دو نقطه از مسیر همواره کوچک‌تر از تندی متوسط آن بین همان دو نقطه است.

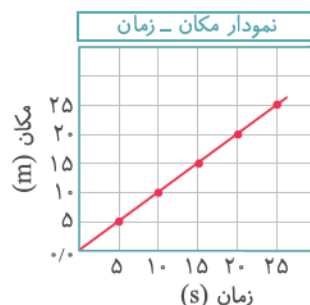
نمودار مکان - زمان ($x-t$)

نموداری است که مکان متحرک در هر لحظه را به صورت تابع پیوسته‌ای از زمان نشان می‌دهد. در واقع این نمودار نشان می‌دهد چگونه یک متحرک در طول زمان در مکان‌های مختلف حرکت می‌کند. برای رسم نمودار مکان - زمان یک متحرک، زمان را روی محور افقی و مکان را روی محور عمودی (قائم) در نظر می‌گیریم، سپس هریک از محورهای مکان و زمان را با مقیاسی مناسب درجه‌بندی می‌کنیم، حال کافی است جدولی برحسب اطلاعات زمان و مکان متحرک تهیه کرده و نقاط متناظر با این جدول را در صفحه $x-t$ مشخص کنیم. با وصل کردن این نقاط به هم به وسیله یک منحنی (خم) هموار، نمودار مکان - زمان متحرک رسم می‌شود. به عنوان مثال، نمودار مکان - زمان مربوط به دوندۀ زیر را رسم کرده‌ایم:



جدول مکان - زمان

مکان: $x(\text{m})$	زمان: $t(\text{s})$
0	0
5	5
10	10
15	15
20	20
25	25

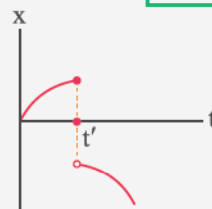


در این نمونه حرکت، تغییرات مکان برحسب زمان به صورت خطی با شیب ثابت است؛ اما باید توجه داشت مسیر حرکت دوندۀ خط راست است.

نکات مربوط به نمودار مکان - زمان در حرکت روی خط راست:

۱. در حرکت، مکان متحرک تابعی پیوسته از زمان است. بنابراین نمودار مکان - زمان نیز پیوسته خواهد بود.

نمودار در لحظه t' ناپیوسته است، بنابراین نمی‌تواند مربوط به حرکت متحرک باشد.



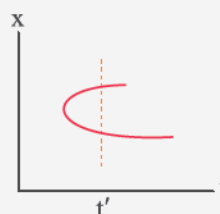
نمودار در تمامی لحظه‌ها پیوسته است، بنابراین می‌تواند مربوط به حرکت متحرک باشد.



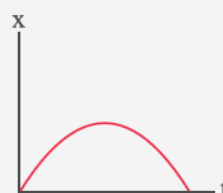
۲. نمودار مکان - زمان، تابعی از زمان است؛ یعنی در هر لحظه، جسم فقط در یک مکان می‌تواند قرار داشته باشد.

شهریور ۱۴۰۰ تجربی

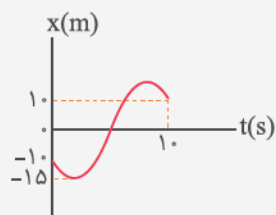
در لحظه t' ، متحرک در دو مکان مختلف قرار دارد، بنابراین نمودار نمی‌تواند مربوط به حرکت یک متحرک باشد.



در هر لحظه، متحرک فقط در یک مکان قرار دارد. بنابراین نمودار می‌تواند مربوط به حرکت یک متحرک باشد.

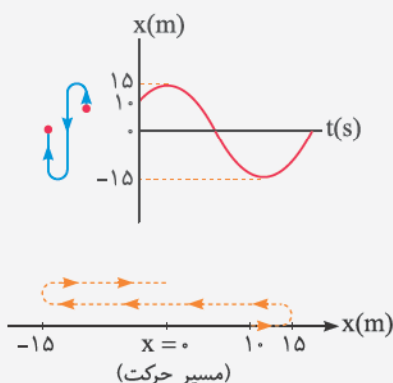


۳. از روی نمودار مکان - زمان می‌توان مکان متحرک در هر لحظه و در نتیجه، جابه‌جایی در هر بازه زمانی را تعیین کرد. برای نمونه، در شکل زیر، جابه‌جایی انجام شده در مدت زمان 10 s برابر است با:

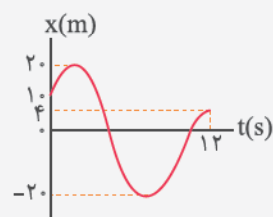


$$\Delta x = x_1 - x_0 = 10 - (-10) = 20\text{ m}$$

۴. نمودار مکان - زمان، مشخص‌کننده حرکت متحرکی است که بر مسیر مستقیم روی محور x حرکت می‌کند، بنابراین برای رسم مسیر حرکت متحرک باید تصویر نمودار مکان - زمان آن را روی محور x رسم کنیم؛ (در قله‌ها و دره‌ها روی نمودار مکان - زمان ممکن است، جهت حرکت تغییر کند).



۵. از روی نمودار مکان - زمان می‌توان مسافت پیموده‌شده توسط متحرک را در یک بازه زمانی به دست آورد. برای این کار، کافی است از روی نمودار یا از روی شکل مسیر حرکت، متحرک را دنبال کرد تا طول واقعی مسیر پیموده‌شده توسط آن را تعیین کرد. برای نمونه در شکل زیر، مسافت پیموده‌شده در مدت زمان 12 s توسط متحرک برابر است با:

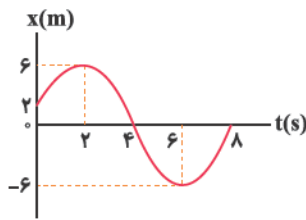


$$l = (20 - 10) + (20) + (20) + (20) + 4 = 74\text{ m}$$

بررسی حرکت با استفاده از نمودار مکان - زمان

تیب ۹

۹ نمودار مکان - زمان یک متحرک که روی محور X حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است:



الف) در لحظه $t_0 = 0$ ، بردار مکان متحرک را در SI بنویسید.

ب) در چه لحظه‌ای، بردار مکان متحرک در SI به صورت $\vec{r} = -6\vec{i}$ است؟

پ) در چه لحظه یا لحظاتی پس از شروع حرکت، متحرک در مبدأ محور قرار می‌گیرد؟

ت) چند مرتبه جهت بردار مکان متحرک تغییر می‌کند؟

ث) سرعت متوسط متحرک بین دو لحظه $t_1 = 2\text{ s}$ و $t_2 = 6\text{ s}$ چند متر بر ثانیه است؟

ج) تندی متوسط متحرک در مدت زمان ۸ ثانیه چند متر بر ثانیه است؟

الف) در لحظه $t_0 = 0$ ، متحرک در مکان $x_0 = +2\text{ m}$ قرار دارد، پس بردار مکان آن در SI به صورت $\vec{r}_0 = (2\text{ m})\vec{i}$ است.

ب) با توجه به نمودار، متحرک در لحظه $t = 6\text{ s}$ در مکان $x = -6\text{ m}$ قرار دارد.

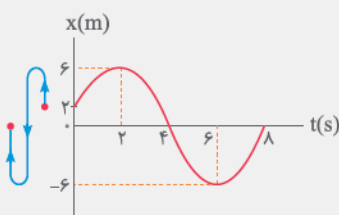
پ) با توجه به نمودار، در لحظه‌های $t_1 = 4\text{ s}$ و $t_2 = 8\text{ s}$ ، متحرک در مبدأ محور ($x = 0$) قرار دارد.

ت) هنگامی که متحرک از مبدأ محور عبور می‌کند (علامت X عوض می‌شود)، جهت بردار مکان متحرک تغییر می‌کند، بنابراین طبق نمودار یک مرتبه و در لحظه $t = 4\text{ s}$ ، جهت بردار مکان (علامت X) تغییر می‌کند.

باید توجه داشت در لحظه $t = 8\text{ s}$ ، متحرک در مبدأ محور قرار دارد، اما از آن عبور نمی‌کند، پس علامت بردار مکان تغییر نمی‌کند.

ث) سرعت متوسط متحرک برابر نسبت جابه‌جایی به مدت زمان انجام جابه‌جایی است، بنابراین:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{-6 - 2}{6 - 2} = -\frac{8}{4} = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



ج) تندی متوسط از نسبت مسافت پیموده شده به مدت زمان انجام آن به دست می‌آید.

مسافت پیموده شده توسط متحرک برابر با طول مسیر حرکت آن است.

$$l = 4 + 6 + 6 + 6 = 22\text{ m}$$

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{22}{8} = 2.75 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

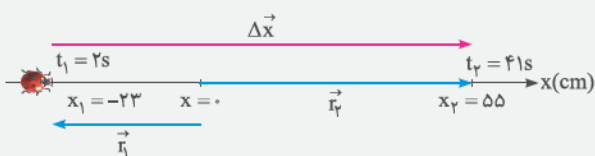
ایستگاه تمرین

۱۰ کفش دوزکی که در جهت محور X در حرکت است، در لحظه‌های $t_1 = 2\text{ s}$ و $t_2 = 4\text{ s}$ به ترتیب از مکان‌های $x_1 = -23\text{ cm}$ و $x_2 = 55\text{ cm}$ می‌گذرد.

برگرفته از کتاب درسی

الف) بردارهای مکان در لحظه‌های t_1 و t_2 و بردار جابه‌جایی کفش دوزک را در این بازه زمانی رسم کنید.

ب) سرعت متوسط کفش دوزک را در این بازه زمانی به دست آورید.



پاسخ الف) بردار مکان، برداری است که مبدأ محور ($x = 0$) را به

محل جسم (مکان آن) در هر لحظه وصل می‌کند. درحالی که بردار

جابه‌جایی، برداری است که مکان ابتدایی متحرک را به مکان انتهایی

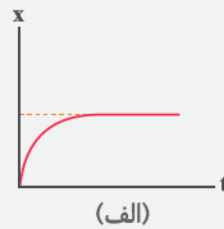
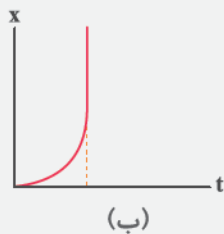
آن وصل می‌کند.

ب) چون کفش دوزک در راستای محور X حرکت می‌کند، پس سرعت متوسط آن برابر است با:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = [55 - (-23)] \times 10^{-2} = 78 \times 10^{-2} \text{ m}$$

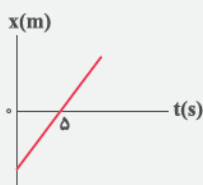
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \left(\frac{55 - (-23)}{4 - 2} \right) \times 10^{-2} = \frac{78 \times 10^{-2}}{2} = 39 \times 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

۱۳ کدام یک از نمودارهای زیر می‌تواند مشخص‌کننده حرکت یک جسم روی محور x باشد؟



پاسخ اگر جسمی دارای حرکت باشد، نمی‌تواند در یک لحظه دلخواه مانند t در چند مکان مختلف قرار گیرد. بنابراین نمودار (ب) نمی‌تواند مربوط به حرکت یک جسم باشد.

۱۴ شکل زیر، نمودار مکان - زمان خودرویی را نشان می‌دهد که روی محور x حرکت می‌کند. درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.



الف) در لحظه $t = 5s$ ، جهت بردار مکان خودرو تغییر می‌کند.

ب) خودرو ابتدا در جهت محور x و سپس در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند.

پ) خودرو ابتدا از مبدأ محور دور و سپس به آن نزدیک می‌شود.

ت) تندی متوسط خودرو از اندازه سرعت متوسط آن بیشتر است.

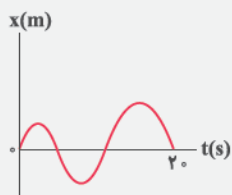
پاسخ الف) درست - در لحظه $t = 5s$ ، متحرک از مکان‌های منفی به مکان‌های مثبت می‌رود و جهت بردار مکان (علامت x) آن تغییر می‌کند.

ب) نادرست - خودرو پیوسته در جهت محور x حرکت می‌کند.

پ) نادرست - خودرو ابتدا به مبدأ محور نزدیک (اندازه بردار مکان کاهش می‌یابد) و سپس از آن دور می‌شود (اندازه بردار مکان افزایش می‌یابد).

ت) نادرست - خودرو پیوسته در جهت محور x روی خط راست (بدون تغییر جهت) حرکت می‌کند. بنابراین مسافت و اندازه جابه‌جایی و در نتیجه تندی متوسط و اندازه سرعت متوسط آن برابر هستند.

۱۵ شکل زیر، نمودار مکان - زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند را نشان می‌دهد. با توجه به نمودار به سؤالات زیر پاسخ دهید:



الف) در مدت زمان $2s$ جهت بردار مکان متحرک چند بار تغییر کرده است؟

ب) آیا می‌توان بدون اطلاع از مقادیر عددی روی محور x ، سرعت متوسط

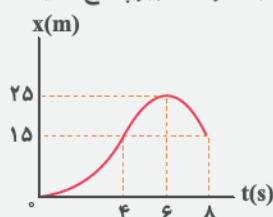
متحرک در مدت زمان $2s$ را حساب کرد؟

پاسخ الف) اگر متحرک از مبدأ مکان ($x = 0$) عبور کند، بردار مکان آن تغییر جهت می‌دهد. با توجه به نمودار مشخص می‌شود که جهت بردار مکان متحرک دو بار تغییر کرده است.

ب) بله - سرعت متوسط، مستقل از مسیر حرکت پیموده‌شده توسط متحرک است؛ یعنی با داشتن مکان ابتدایی و نهایی حرکت، می‌توان جابه‌جایی و در نهایت سرعت متوسط را محاسبه کرد. با توجه به نمودار، مشخص می‌شود که مکان اولیه و مکان نهایی متحرک یکسان است، پس داریم:

$$\left. \begin{aligned} v_{av} &= \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ \Delta x &= x_2 - x_1 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_{av} = 0$$

۱۶ با توجه به نمودار مکان - زمان زیر که مربوط به حرکت جسمی روی خط راست است، با رسم شکل مسیر حرکت به سؤالات زیر پاسخ دهید:



الف) بیشترین فاصله جسم از مبدأ محور در چه لحظه و مکانی است؟

ب) در کدام بازه زمانی، جسم در خلاف جهت محور x حرکت کرده است؟

پ) در چه لحظه‌ای جهت حرکت جسم تغییر کرده است؟

ت) در مدت زمانی که جسم در جهت محور x حرکت می‌کند، سرعت متوسط آن چند متر بر ثانیه است؟



پاسخ با توجه به نمودار مکان - زمان داده شده ابتدا مسیر حرکت را مطابق شکل رسم می‌کنیم.
در این صورت مشخص می‌شود:

الف) بیشترین فاصله جسم از مبدأ محور در مکان $x = +25\text{m}$ و در لحظه $t = 6\text{s}$ ایجاد شده است.

ب) بین دو لحظه $t_1 = 6\text{s}$ تا $t_2 = 8\text{s}$ ، جسم در خلاف جهت محور x حرکت کرده است.

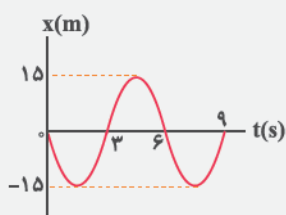
پ) در لحظه‌ای که جسم در مکان $x = +25\text{m}$ قرار دارد، جهت حرکت تغییر کرده است؛ یعنی در لحظه $t = 6\text{s}$ ، جهت حرکت تغییر می‌کند.

ت) از لحظه شروع حرکت $t_1 = 0$ تا لحظه $t_2 = 6\text{s}$ ، جسم در جهت محور x حرکت کرده است. جابه‌جایی انجام شده برابر است با:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 25 - 0 = 25\text{m}$$

و سرعت متوسط در این بازه زمانی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{25}{6} \text{ m/s}$$

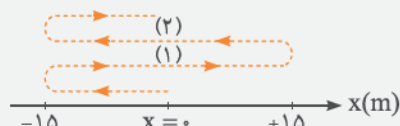


۱۷ نمودار مکان - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل است.

تندی متوسط متحرک از لحظه شروع حرکت تا لحظه‌ای که برای دومین بار جهت بردار مکان آن تغییر می‌کند را حساب کنید.

پاسخ جهت بردار مکان زمانی تغییر می‌کند که متحرک از مبدأ محور عبور کند. با توجه به نمودار مشخص می‌شود در لحظه‌های $t_1 = 3\text{s}$ و $t_2 = 6\text{s}$ ، متحرک از مبدأ محور ($x = 0$) عبور می‌کند؛ در این صورت در لحظه $t_2 = 6\text{s}$ برای دومین بار علامت بردار مکان متحرک تغییر می‌کند.

برای محاسبه تندی متوسط کافی است، مسافت پیموده‌شده تا این لحظه را حساب کنیم.
با توجه به شکل مقابل که مسیر حرکت را نشان می‌دهد، مسافت پیموده‌شده تا لحظه موردنظر برابر است با:



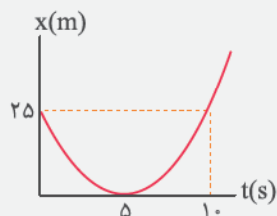
$$l = 4 \times 15 = 60\text{m}$$

بنابراین تندی متوسط به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{60}{6} = 10 \text{ m/s}$$

۱۸ معادله مکان - زمان یک متحرک در SI به صورت $x = (\Delta - t)^2$ است. در 10 ثانیه اول حرکت، تندی متوسط متحرک چند متر بر ثانیه با بزرگی سرعت متوسط متحرک اختلاف دارد؟

پاسخ برای مشخص کردن مسافت پیموده‌شده باید شکل مسیر حرکت را مشخص کنیم. با توجه به معادله مکان - زمان داده شده، ابتدا نمودار مکان - زمان را رسم می‌کنیم. بنابراین با توجه به نمودار می‌توان نتیجه گرفت، جابه‌جایی جسم در این بازه زمانی (10 ثانیه ابتدایی) صفر است. اما مسافت پیموده شده توسط آن برابر 50 متر است. بنابراین تندی متوسط متحرک و بزرگی سرعت متوسط متحرک برابر است با:



$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{50}{10} = 5 \text{ m/s} \quad , \quad v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 0$$



پس اختلاف بین این دو کمیت به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$s_{av} - v_{av} = 5 - 0 = 5 \text{ m/s}$$

تیپ ۲

بررسی حرکت جسم با استفاده از معادله سرعت - زمان

❓ معادله سرعت - زمان مربوط به متحرکی که در امتداد محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $v = t^2 - 10t + 16$ است.

(الف) سرعت اولیه این متحرک چند متر بر ثانیه است؟ (ب) بردار سرعت متحرک در لحظه $t = 4s$ را در SI بنویسید.

(پ) در چه لحظه یا لحظه‌هایی بردار سرعت متحرک در SI برابر $-5\hat{i}$ می‌شود؟

(ت) در چه لحظه یا لحظه‌هایی، متحرک متوقف می‌شود؟ (ث) در چه لحظه یا لحظه‌هایی، جهت حرکت متحرک تغییر می‌کند؟

(ج) متحرک چند ثانیه در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند؟ (چ) شتاب متوسط متحرک در ۲ ثانیه چهارم حرکت، چند متر بر مربع ثانیه است؟

الف) برای محاسبه سرعت اولیه متحرک باید در معادله سرعت - زمان مقدار t را برابر صفر قرار دهیم.

$$t_0 = 0 \Rightarrow v_0 = 16 \frac{m}{s}$$

$$t = 4s \Rightarrow v = 16 - 40 + 16 = -8 \frac{m}{s} \Rightarrow \vec{v}_{t=4s} = (-8 \frac{m}{s})\hat{i} \quad (ب)$$

$$v = -5 \frac{m}{s} \Rightarrow -5 = t^2 - 10t + 16 \Rightarrow t^2 - 10t + 21 = 0 \Rightarrow (t-3)(t-7) = 0 \Rightarrow t_1 = 3s, t_2 = 7s \quad (پ)$$

$$v = 0 \Rightarrow t^2 - 10t + 16 = 0 \Rightarrow (t-2)(t-8) = 0 \Rightarrow t_1 = 2s, t_2 = 8s \quad (ت)$$

(ث) طبق قسمت قبل، سرعت متحرک در لحظه‌های $t_1 = 2s$ و $t_2 = 8s$ ، صفر است.

طبق جدول زیر، علامت سرعت قبل و بعد از این لحظه‌ها تغییر می‌کند، بنابراین در لحظه‌های $t_1 = 2s$ و $t_2 = 8s$ ، جهت حرکت متحرک تغییر خواهد کرد.

$t(s)$	۰	۲	۸	
v	+	+	-	+

(ج) با توجه به جدول تعیین علامت در قسمت قبلی، بین دو لحظه $t_1 = 2s$ تا $t_2 = 8s$ ، سرعت متحرک منفی است؛ یعنی متحرک به مدت زمان ۶ ثانیه، در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند.

(چ) ۲ ثانیه چهارم حرکت یعنی بازه زمانی $t_1 = 6s$ تا $t_2 = 8s$ ، بنابراین:

$$t_1 = 6s \Rightarrow v_1 = 36 - 60 + 16 = -8 \frac{m}{s}$$

$$t_2 = 8s \Rightarrow v_2 = 64 - 80 + 16 = 0$$

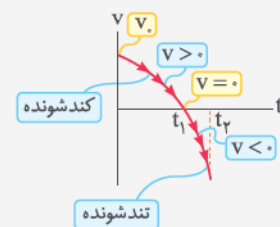
$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{0 - (-8)}{8 - 6} = 4 \frac{m}{s^2}$$

نمودار سرعت - زمان ($v-t$)

اگر معادله سرعت - زمان متحرکی مشخص باشد یا سرعت آن در هر لحظه را بدانیم، می‌توانیم نمودار **سرعت - زمان** را رسم کنیم. در این نمودار، محور افقی مربوط به زمان است و محور قائم مربوط به سرعت است.

نکات مربوط به نمودار سرعت - زمان:

۱. فرض کنید نمودار سرعت - زمان مربوط به حرکت جسمی در امتداد محور x ، مطابق شکل است. در این صورت برای تحلیل حرکت جسم، نکات زیر را در نظر می‌گیریم:



۱. نقطه برخورد منحنی به محور قائم (v)، **سرعت اولیه (v_0)** یعنی سرعت در لحظه شروع حرکت را مشخص می‌کند.

۲. نقاط برخورد منحنی با محور زمان (t)، مشخص کننده لحظاتی است که **سرعت متحرک صفر** شده است.

۳. در لحظاتی که منحنی **بالای محور زمان** قرار گرفته است، علامت

سرعت مثبت است، یعنی متحرک در **جهت محور** حرکت می‌کند.

۴. در لحظاتی که منحنی **پایین محور زمان** قرار گرفته است، علامت

سرعت منفی است، یعنی متحرک **خلاف جهت محور** حرکت می‌کند.

۵. اگر روی منحنی طوری حرکت کنیم که به **محور زمان نزدیک**

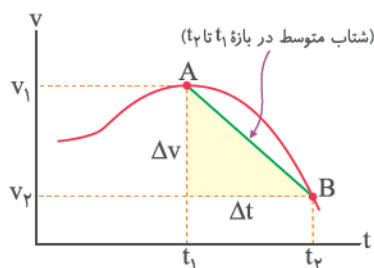
شویم، **تندی متحرک در حال کاهش** است، پس حرکت **کندشونده**

انجام می‌شود.

۶. اگر روی منحنی طوری حرکت کنیم که **از محور زمان دور شویم**، **تندی**

متحرک **در حال افزایش** است، پس حرکت **تندشونده** انجام می‌شود.

تعیین شتاب متوسط به کمک نمودار سرعت - زمان



اگر نمودار سرعت - زمان متحرکی مشخص باشد، با توجه به تعریف شتاب متوسط می‌توان نتیجه گرفت:

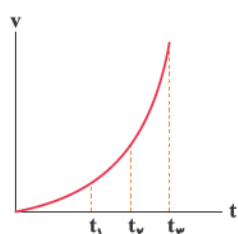
شتاب متوسط بین دو لحظه، برابر شیب خطی است که نمودار سرعت - زمان را در آن دو لحظه قطع می‌کند.

شهریور ۱۴۰۰ ریاضی

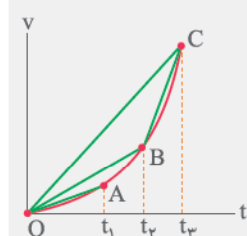
$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \text{شیب خط AB}$$

مقایسه شتاب متوسط در نمودار سرعت - زمان

تیپ ۳



نمودار سرعت - زمان یک متحرک که در امتداد محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. شتاب متوسط این متحرک را در بازه‌های زمانی $(0-t_1)$ ، $(0-t_2)$ ، $(0-t_3)$ و (t_2-t_3) با هم مقایسه کنید.

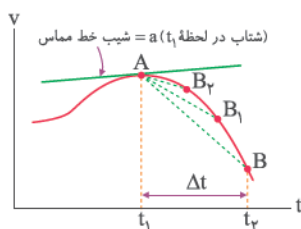


شیب خطی که دو نقطه روی نمودار سرعت - زمان را به هم وصل می‌کند، برابر شتاب متوسط است.

شیب خط $OA < \text{شیب خط } OB < \text{شیب خط } OC < \text{شیب خط } BC$

$$a_{av(t_2-t_3)} > a_{av(0-t_3)} > a_{av(0-t_2)} > a_{av(0-t_1)}$$

تعیین شتاب لحظه‌ای به کمک نمودار سرعت - زمان

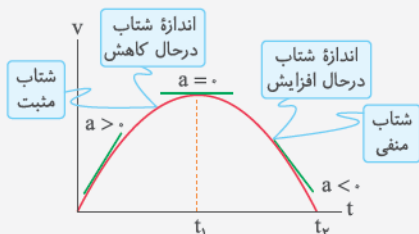


در نمودار سرعت - زمان، اگر بازه زمانی (Δt) را کوچک کنیم، خط واصل بین دو نقطه A و B به خط مماس بر نمودار در نقطه A میل می‌کند. در این صورت، شیب خط مماس در لحظه t_1 ، مشخص‌کننده شتاب در این لحظه است. یعنی شتاب لحظه‌ای را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

شتاب در هر لحظه دلخواه، برابر شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان در آن لحظه است. شتاب لحظه‌ای را با نماد $(\vec{a})$ نشان می‌دهند.

شهریور ۱۴۰۰ تجربی

۴. اگر خط‌های مماس بر نمودار سرعت - زمان به محور قائم نزدیک شود، اندازه شتاب در حال افزایش و اگر به محور افقی نزدیک شود، اندازه شتاب در حال کاهش است.



نکات مربوط به تعیین شتاب لحظه‌ای به کمک نمودار سرعت - زمان:

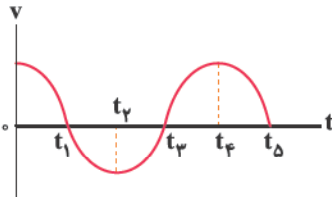
۱. اگر شیب خط مماس بر نمودار مثبت باشد، علامت شتاب مثبت است.
۲. اگر شیب خط مماس بر نمودار منفی باشد، علامت شتاب منفی است.
۳. در نقاطی که خط مماس بر منحنی سرعت - زمان افقی است، شتاب صفر است.

تذکر افزایش یا کاهش تندی، افزایش یا کاهش شتاب را مشخص نمی‌کند؛ ممکن است در یک بازه زمانی، شتاب در حال کاهش و تندی در حال افزایش باشد.

تحلیل نمودار سرعت - زمان

تیپ ۴

نمودار سرعت - زمان مربوط به یک متحرک که در امتداد محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است:



(الف) در کدام بازه‌های زمانی، متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند؟

(ب) در کدام بازه زمانی، متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند؟

(پ) در کدام بازه‌های زمانی، حرکت متحرک تندشونده است؟

(ت) در کدام بازه‌های زمانی، حرکت متحرک کندشونده است؟

(ث) در چه لحظه یا لحظاتی، متحرک متوقف می‌شود؟

(ج) در چه لحظه یا لحظاتی، جهت حرکت متحرک تغییر کرده است؟

(چ) در چه لحظه یا لحظاتی، شتاب متحرک صفر می‌شود؟

(الف) در بازه‌های زمانی که علامت سرعت مثبت است (نمودار بالای محور t قرار می‌گیرد)، متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند. بنابراین در بازه‌های زمانی صفر تا t_1 و t_3 تا t_5 ، متحرک در جهت محور x حرکت کرده است.

(ب) در بازه‌های زمانی که علامت سرعت منفی است (نمودار زیر محور t قرار می‌گیرد)، متحرک خلاف جهت محور x حرکت می‌کند؛ بنابراین در بازه زمانی t_1 تا t_3 ، متحرک خلاف جهت محور x حرکت کرده است.

(پ) در بازه‌های زمانی که اندازه (قدر مطلق) سرعت افزایش می‌یابد (از محور زمان دور می‌شویم)، حرکت متحرک تندشونده است؛ بنابراین در بازه‌های زمانی t_1 تا t_2 و t_3 تا t_4 ، حرکت متحرک تندشونده است.

(ت) در بازه‌های زمانی که اندازه (قدر مطلق) سرعت کاهش می‌یابد (به محور زمان نزدیک می‌شویم)، حرکت متحرک کندشونده است؛ بنابراین در بازه‌های زمانی صفر تا t_1 ، t_2 تا t_3 و t_4 تا t_5 ، حرکت متحرک کندشونده است.

(ث) در لحظه یا لحظاتی که منحنی نمودار سرعت - زمان با محور t برخورد می‌کند، سرعت متحرک صفر می‌شود؛ بنابراین در لحظه‌های t_1 و t_3 ، متحرک متوقف شده است.

(ج) در لحظه t_1 و t_3 ، علامت سرعت (جهت حرکت) متحرک تغییر می‌کند.

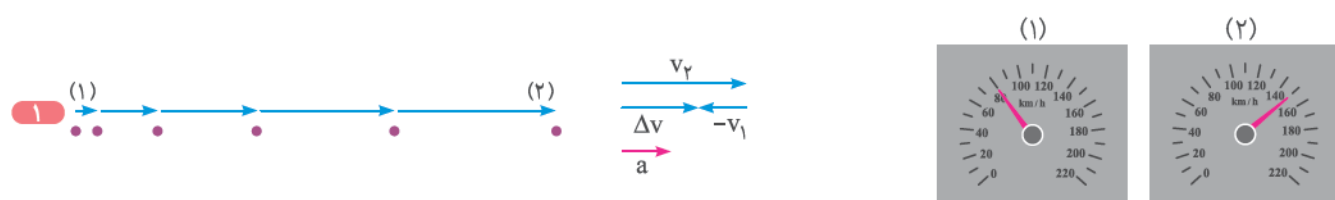
(چ) در لحظه یا لحظاتی که شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان صفر می‌شود، شتاب حرکت برابر صفر است؛ بنابراین در لحظه‌های t_2 و t_4 ، شتاب متحرک صفر شده است.

تعیین نوع حرکت

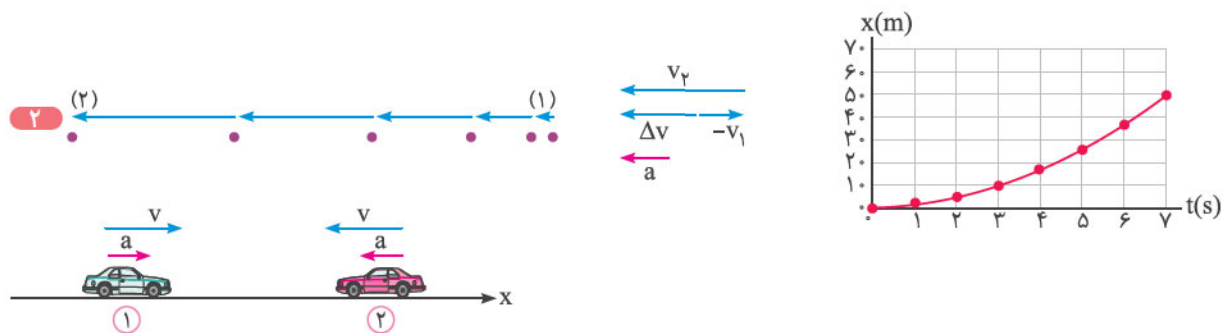
۱. **حرکت تندشونده:** حرکتی است که در آن **تندی** در حال **افزایش** است. در این حالت تغییر سرعت (شتاب) با سرعت نهایی هم‌علامت است؛

خرداد ۱۴۰۲ ریاضی

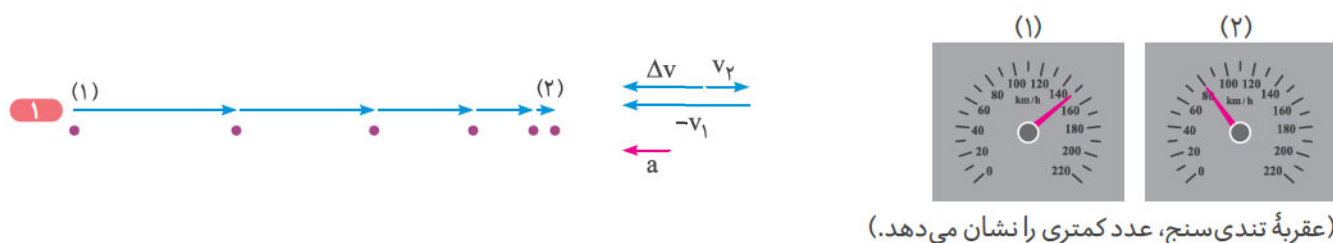
یعنی برای انجام این حرکت، **سرعت و شتاب هم علامت** هستند ($av > 0$).



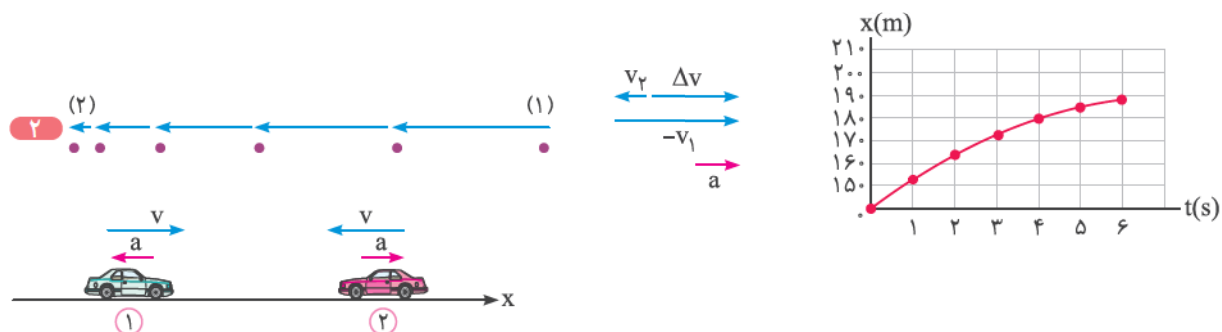
(عقربه تندی سنج، عدد بیشتری را نشان می‌دهد.)



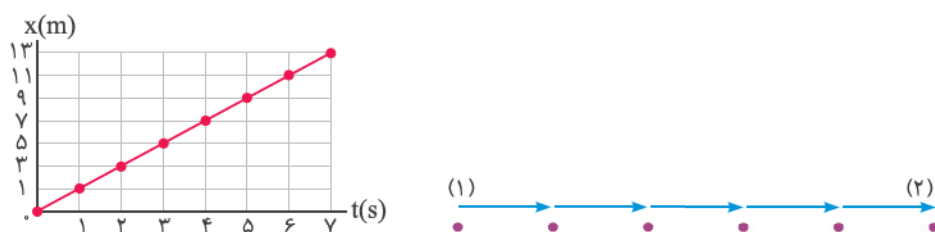
۲. **حرکت کندشونده:** حرکتی است که در آن **تندی** در حال **کاهش** است. در این حالت تغییر سرعت (شتاب) و سرعت نهایی دارای علامت‌های مخالف یکدیگر هستند؛ یعنی در این حرکت **علامت سرعت و شتاب مخالف** یکدیگر است ($av < 0$).
 خرداد ۱۴۰۰ ریاضی خارج



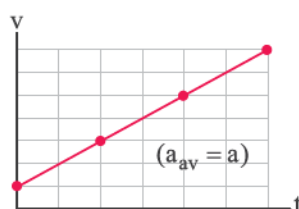
عقربه تندی سنج، عدد کمتری را نشان می‌دهد.



۳. **حرکت با سرعت ثابت:** اگر در طول حرکت، سرعت تغییر نکند، حرکت با سرعت ثابت انجام می‌شود یعنی در بازه‌های زمانی یکسان، جابه‌جایی‌های یکسان طی می‌شود.



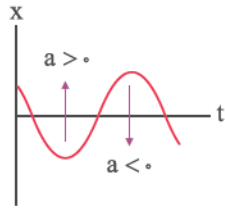
توجه اگر نمودار سرعت - زمان متحرکی که در امتداد محور x حرکت می‌کند، موازی محور زمان باشد، حرکت با سرعت ثابت انجام شده و شتاب حرکت صفر است.



توجه اگر نمودار سرعت - زمان متحرکی که در امتداد محور x حرکت می‌کند، خط راستی با شیب ثابت باشد، شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای با هم برابر هستند؛ در این صورت حرکت متحرک را شتاب‌دار با شتاب ثابت می‌گویند.

شهریور ۱۴۰۱ تجربی

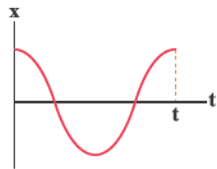
تعیین علامت شتاب با توجه به نمودار مکان - زمان



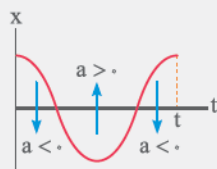
اگر نمودار مکان - زمان مشخص باشد، در صورتی که **انحنای نمودار (خم) روبه بالا** باشد، شتاب حرکت **مثبت** و در صورتی که **انحنای نمودار (خم) روبه پایین** باشد، شتاب حرکت **منفی** است.

تعیین علامت شتاب از روی نمودار مکان - زمان

تیب



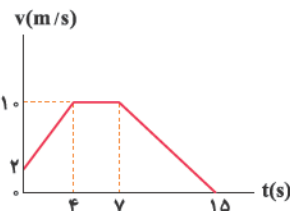
نمودار مکان - زمان خودرویی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، مطابق شکل است. جهت شتاب حرکت چندبار تغییر می‌کند؟



جهت انحنای نمودار مکان - زمان مشخص‌کننده جهت شتاب است. با توجه به نمودار می‌توان نتیجه گرفت؛ علامت شتاب دو بار تغییر کرده است.

محاسبه شتاب متوسط و لحظه‌ای از روی نمودار سرعت - زمان

تیب



نمودار سرعت - زمان یک متحرک که بر روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل مقابل است:

(الف) شتاب متحرک در لحظه $t_1 = 2/4 \text{ s}$ ، چند متر بر مربع ثانیه است؟

(ب) بردار شتاب متحرک در لحظه $t_2 = 10/3 \text{ s}$ را در SI بنویسید.

(پ) شتاب متوسط در 7 ثانیه اول، چند برابر شتاب متوسط در مدت زمان 15 ثانیه است؟

(الف) هرگاه نمودار سرعت - زمان خطی با شیب ثابت باشد، شتاب در هر لحظه دلخواه با شتاب متوسط در هر بازه زمانی برابر است.

$$a_{t=2/4\text{s}} = a_{av(-4)} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{10-2}{4-0} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

(ب) در بازه زمانی 7s تا 15s نمودار سرعت - زمان خطی با شیب ثابت است. پس شتاب در هر لحظه دلخواه در این بازه با شتاب متوسط در این بازه زمانی برابر است.

$$a_{t=10/3\text{s}} = a_{av(7-15)} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0-10}{15-7} \Rightarrow a_{av} = -1/25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow \vec{a}_{t=10/3\text{s}} = (-1/25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) \vec{i}$$

(پ) شتاب متوسط از نسبت تغییرات سرعت به مدت زمان این تغییرات به دست می‌آید. در این صورت نسبت شتاب متوسط‌ها در دو بازه زمانی مورد نظر برابر است با:

$$\left. \begin{aligned} a_{av(0-7)} &= \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{10-2}{7-0} = \frac{8}{7} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ a_{av(0-15)} &= \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0-2}{15} = -\frac{2}{15} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a_{av(0-7)}}{a_{av(0-15)}} = \frac{\frac{8}{7}}{-\frac{2}{15}} = -\frac{60}{7}$$

ایستگاه تمرین

۱ متحرکی در مسیر مستقیم حرکت می‌کند و معادله سرعت - زمان آن در SI به صورت $v = 2t^2 - 4t - 2$ است. شتاب متوسط آن در ۲ ثانیه دوم حرکت، چند متر بر مربع ثانیه است؟

پاسخ برای محاسبه شتاب متوسط بین دو لحظه، ابتدا سرعت در لحظه‌های مشخص شده را با توجه به معادله سرعت - زمان داده شده حساب می‌کنیم:

$$v = 2t^2 - 4t - 2$$

$$t_1 = 2s \Rightarrow v_1 = 2(2)^2 - 4(2) - 2 = -2 \text{ m/s}$$

$$t_2 = 4s \Rightarrow v_2 = 2(4)^2 - 4(4) - 2 = 14 \text{ m/s}$$

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{14 - (-2)}{4 - 2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ m/s}^2$$

اکنون با توجه به رابطه محاسبه شتاب متوسط می‌توان نوشت:

۲ متحرکی روی محور X در حال حرکت است و بردار شتاب متوسط آن در بازه زمانی $t_1 = 5s$ تا $t_2 = 10s$ در SI برابر $4\vec{i}$ و در بازه زمانی $t_2 = 10s$ تا $t_3 = 12s$ برابر $2\vec{i}$ است. بردار شتاب متوسط آن در بازه زمانی $t_1 = 5s$ تا $t_3 = 12s$ در SI را مشخص کنید.

پاسخ با توجه به رابطه محاسبه شتاب متوسط در بازه زمانی داده شده، می‌توان نوشت:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \Rightarrow 4\vec{i} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{10 - 5} \Rightarrow \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = 20\vec{i}$$

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \Rightarrow 2\vec{i} = \frac{\vec{v}_3 - \vec{v}_2}{12 - 10} \Rightarrow \vec{v}_3 - \vec{v}_2 = 4\vec{i}$$

برای مشخص کردن شتاب متوسط بین دو لحظه t_1 و t_3 کافی است بردار $(\vec{v}_3 - \vec{v}_1)$ را مشخص کنیم. با استفاده از معادله‌های بالا می‌توان نوشت:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = 20\vec{i} \\ \vec{v}_3 - \vec{v}_2 = 4\vec{i} \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)} \vec{v}_3 - \vec{v}_1 = 24\vec{i}$$

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{24\vec{i}}{12 - 5} = \frac{24}{7}\vec{i} = (3.43 \text{ m/s}^2)\vec{i}$$

در این صورت شتاب متوسط در بازه زمانی $t_1 = 5s$ تا $t_3 = 12s$ برابر است با:

۳ معادله سرعت - زمان یک متحرک که بر روی محور X حرکت می‌کند در SI به صورت $v = t^2 - 2t - 15$ است؛

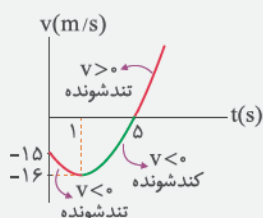
الف) جهت حرکت متحرک چند بار تغییر می‌کند؟
ب) چند ثانیه متحرک در خلاف جهت محور X به صورت تندشونده حرکت می‌کند؟
پ) چند ثانیه متحرک در خلاف جهت محور X حرکت می‌کند؟
ت) شتاب متوسط آن در ۵ ثانیه اول حرکت، چند متر بر مربع ثانیه است؟

پاسخ الف) همواره جهت حرکت متحرک حول ریشه‌های مثبت غیرمضاعف معادله سرعت - زمان تغییر می‌کند.

$$v = 0 \Rightarrow t^2 - 2t - 15 = 0 \Rightarrow (t + 3)(t - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -3 \text{ s} \\ t_2 = 5 \text{ s} \end{cases}$$

بنابراین یک مرتبه جهت حرکت متحرک تغییر می‌کند.

ب) برای تعیین تندشونده یا کندشونده بودن حرکت از روی معادله سرعت - زمان، بهتر است ابتدا نمودار سرعت - زمان آن را رسم کنیم.



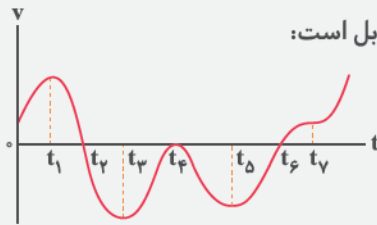
$$t_s = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1s \Rightarrow v_s = 1 - 2 - 15 = -16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

در ثانیه اول حرکت، سرعت متحرک منفی و اندازه آن در حال افزایش است، پس به مدت زمان ۱s متحرک در خلاف جهت محور X به صورت تندشونده حرکت می‌کند.

پ) در ۵ ثانیه اول، سرعت متحرک منفی است؛ یعنی متحرک در ۵ ثانیه اول در خلاف جهت محور X حرکت می‌کند.

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - (-15)}{5 - 0} = \frac{15}{5} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

ت)



۴ نمودار سرعت - زمان مربوط به یک متحرک که بر روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل مقابل است:

- الف) چند مرتبه سرعت متحرک صفر می‌شود؟
 ب) چند مرتبه جهت حرکت متحرک تغییر می‌کند؟
 پ) چند مرتبه شتاب متحرک صفر می‌شود؟
 ت) چند مرتبه جهت بردار شتاب متحرک تغییر می‌کند؟

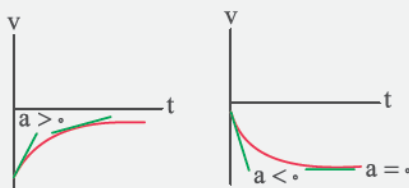
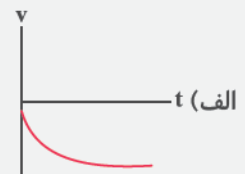
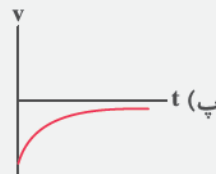
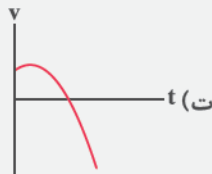
پاسخ الف) در لحظه‌های t_2 و t_4 (یعنی سه مرتبه)، نمودار سرعت - زمان با محور زمان برخورد کرده و سرعت متحرک صفر می‌شود.

ب) در لحظه‌های t_2 و t_4 ، علامت سرعت تغییر می‌کند؛ یعنی ۲ مرتبه جهت حرکت متحرک تغییر می‌کند.

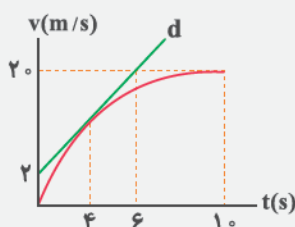
پ) در لحظاتی که شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان، افقی (صفر) شود، شتاب متحرک نیز صفر می‌شود؛ بنابراین در لحظه‌های t_1 ، t_3 ، t_5 و t_7 (یعنی ۵ مرتبه)، شتاب متحرک صفر می‌شود.

ت) در لحظه‌های t_1 ، t_3 ، t_5 و t_7 (یعنی ۴ مرتبه) (قله‌ها و دره‌های نمودار سرعت - زمان)، جهت شتاب تغییر می‌کند.

۵ متحرکی روی محور x در خلاف جهت محور در حال حرکت و بزرگی شتاب آن در خلاف جهت محور در حال کاهش است. کدام یک از نمودارهای زیر می‌تواند مربوط به حرکت این متحرک باشد؟



پاسخ اگر متحرک در خلاف جهت محور در حال حرکت باشد، علامت سرعت آن منفی است. شیب خط مماس بر منحنی سرعت - زمان مشخص‌کننده شتاب است. در نمودار (الف) شیب خط‌های مماس منفی و در نمودار (پ) شیب خط‌های مماس مثبت است و در هر دو نمودار اندازه شیب خط در حال کاهش است، پس نمودار (الف) می‌تواند مربوط به حرکت جسم باشد.



۶ نمودار سرعت - زمان جسمی در حرکت روی خط راست و در SI به صورت مقابل است. با توجه به

برگرفته از کتاب درسی

نمودار به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) در چه لحظه‌ای شتاب حرکت صفر است؟

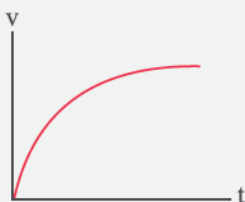
ب) نوع حرکت جسم را مشخص کنید.

پ) اختلاف بین شتاب در لحظه $t = 4$ s و شتاب متوسط در مدت زمان ۱۰ s را حساب کنید.



پاسخ الف) در لحظه‌ای که شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان صفر باشد، شتاب حرکت صفر است. در این صورت در لحظه $t = 10$ s، شتاب برابر صفر است.

ب) سرعت جسم در جهت محور از لحظه شروع حرکت تا لحظه $t = 10$ s در حال افزایش است، پس حرکت در جهت محور (x)، تندشونده است.



پسته

تعداد
تیپ ۱۲

حرکت با شتاب ثابت

صفحه ۲۱ تا ۱۵
کتاب درسی

حرکت با شتاب ثابت

اگر شتاب متحرکی در لحظه‌های مختلف یکسان باشد، حرکت جسم را حرکت با شتاب ثابت می‌گویند.

در این حرکت، سرعت جسم با آهنگ ثابتی افزایش یا کاهش می‌یابد؛ یعنی در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، تغییرات سرعت نسبت به زمان به صورت یک تابع خطی از زمان است.

خرداد ۱۴۰۰ ریاضی

برای نمونه اگر در یک حرکت بر روی خط راست با شتاب ثابت، بزرگی شتاب برابر 4 m/s^2 باشد، ممکن است در هر ثانیه 4 m/s به سرعت اضافه یا از آن کاسته شود.

نمونه‌هایی از حرکت با شتاب ثابت:

۳. هواپیمایی که روی باند پرواز حرکت می‌کند تا به شرایط لازم برای برخاستن برسد.
دی ۹۷ تجربی

۱. حرکت جسمی که در خلأ و در نزدیکی سطح زمین در حال سقوط است (حرکت سقوط آزاد).
دی ۹۶ تجربی

۲. جسمی که روی سطح هموار یک سراسیمبی در حال لغزیدن است.

معادله سرعت - زمان

در حرکت با شتاب ثابت، شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای برابر هستند؛ بنابراین معادله سرعت - زمان را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$a = a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0} \xrightarrow{t_0=0} a = \frac{v - v_0}{t} \Rightarrow v = at + v_0$$

رابطه محاسبه سرعت متوسط

معادله سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت، تابع خطی از زمان است. در این صورت، سرعت متوسط در یک بازه زمانی دلخواه با میانگین سرعت متحرک در آن دو لحظه برابر است.

$$v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

نکته برای محاسبه جابه‌جایی بین دو لحظه در حرکت با شتاب ثابت بر روی خط راست می‌توان از رابطه زیر (رابطه مستقل از شتاب) استفاده کرد:

$$\left. \begin{aligned} v_{av} &= \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ v_{av} &= \frac{v_1 + v_2}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta x = \frac{v_1 + v_2}{2} \Delta t$$

نوشتن معادله سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت

تیب ۱

متحرکی روی محور x با شتاب ثابت در حال حرکت است. اگر در لحظه $t_1 = 2s$ ، سرعت آن برابر $v_1 = 6 \frac{m}{s}$ و در لحظه $t_2 = 8s$ ، سرعت آن برابر $v_2 = 18 \frac{m}{s}$ باشد، معادله سرعت بر حسب زمان آن در SI را بنویسید.

معادله سرعت بر حسب زمان متحرکی که با شتاب ثابت روی محور x حرکت می‌کند، به صورت $v = at + v_0$ نوشته می‌شود. با توجه به داده‌ها می‌توان نوشت:

$$v = at + v_0 \Rightarrow \begin{cases} 6 = 2a + v_0 \\ 18 = 8a + v_0 \end{cases} \xrightarrow{(-)} 6 - 18 = 2a - 8a \Rightarrow -6a = -12 \Rightarrow a = 2 \frac{m}{s^2} , \quad 6 = 2 \times 2 + v_0 \Rightarrow v_0 = 2 \frac{m}{s}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = 2t + 2$$

بنابراین معادله سرعت - زمان به صورت زیر نوشته می‌شود:

محاسبه سرعت لحظه‌ای و سرعت متوسط از روی معادله سرعت-زمان

تیب ۲

معادله سرعت - زمان متحرکی که در امتداد محور x حرکت می‌کند در SI به صورت $v = -1/8t + 2/2$ است. (برگرفته از کتاب درسی)
الف) سرعت متحرک در لحظه $t = 5s$ ، چند متر بر ثانیه است؟
ب) سرعت متوسط متحرک و جابه‌جایی آن در ۴ ثانیه اول حرکت را به دست آورید.

$$t = 5s \Rightarrow v = -1/8 \times 5 + 2/2 \Rightarrow v = -9/8 + 1 = -1/8 \frac{m}{s}$$

الف

ب) در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط بین دو لحظه t_1 و t_2 با میانگین سرعت‌های ابتدا و انتهای بازه زمانی (میانگین سرعت در لحظه t_1 و t_2) برابر است.

$$\begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 2/2 \frac{m}{s} \\ t_2 = 4s \Rightarrow v_2 = -1/8 \times 4 + 2/2 = -1/2 + 1 = 1/2 \frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{2/2 + (-1/2)}{2} = -1/4 \frac{m}{s}$$

$$\Delta x = v_{av} \Delta t \Rightarrow \Delta x = -1/4 \times 4 = -1m$$

جابه‌جایی در ۴s اول برابر است با:

نمودار سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت

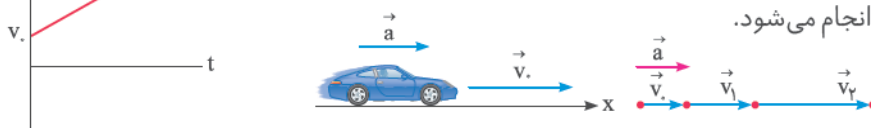
با توجه به معادله سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت، می‌توان نتیجه گرفت، نمودار سرعت - زمان در این حرکت، خط راستی با شیب ثابت است. برای بررسی نمودار سرعت - زمان حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

۱. اگر جسم ابتدا در جهت محور حرکت کند.

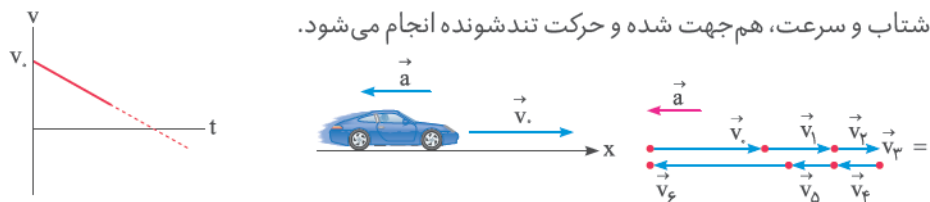


در این حالت، علامت سرعت اولیه متحرک مثبت است، اما حرکت متحرک می‌تواند تندشونده ($av > 0$) یا کندشونده ($av < 0$) باشد؛ بنابراین می‌توان دو حالت زیر را در نظر گرفت:

الف) حرکت همواره تندشونده باشد: در این حالت، بردارهای شتاب و سرعت اولیه هم‌جهت هستند و حرکت همواره تندشونده در جهت محور انجام می‌شود.



ب) حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده باشد: در این حالت، ابتدا بردارهای شتاب و سرعت اولیه در خلاف جهت یکدیگر هستند. در صورتی که جهت حرکت تغییر کند، بردارهای شتاب و سرعت، هم‌جهت شده و حرکت تندشونده انجام می‌شود.

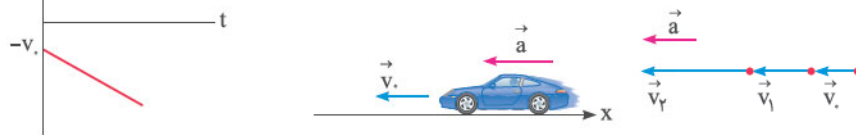




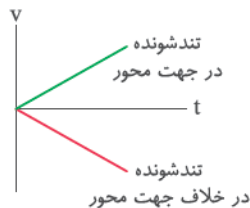
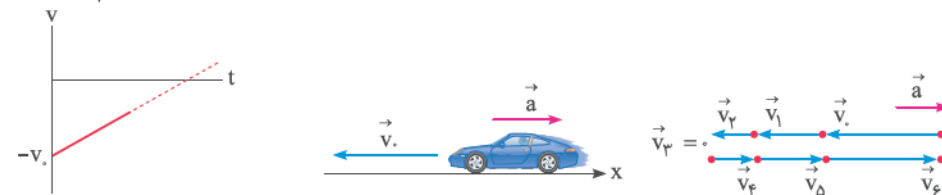
۲. اگر جسم ابتدا در خلاف جهت محور حرکت کند.

در این حالت، علامت سرعت اولیه متحرک **منفی** است. اما حرکت متحرک می تواند تندشونده ($av > 0$) یا کندشونده ($av < 0$) باشد؛ بنابراین می توان دو حالت زیر را در نظر گرفت:

الف) حرکت همواره تندشونده باشد: در این حالت، بردارهای شتاب و سرعت اولیه هم جهت هستند (هر دو خلاف جهت محور می باشند) و حرکت همواره تندشونده در خلاف جهت محور انجام می شود.



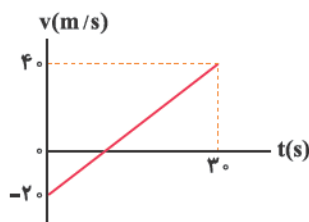
ب) حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده باشد: در این حالت، بردار شتاب در جهت محور و بردار سرعت اولیه در خلاف جهت محور است؛ بنابراین متحرک ابتدا کندشونده در خلاف جهت محور حرکت می کند. پس از تغییر جهت، حرکت تندشونده در جهت محور انجام می شود.



نتیجه اگر متحرک از **حالت سکون با شتاب ثابت** در جهت محور یا خلاف جهت محور حرکت کند، **حرکت آن همواره تندشونده** انجام می شود.

نمودار سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت

تیب ۳



۱) نمودار سرعت - زمان جسمی که روی محور x حرکت می کند، مطابق شکل زیر است:

الف) شتاب حرکت جسم چند متر بر مربع ثانیه است؟

ب) معادله سرعت - زمان آن را در SI بنویسید.

پ) بردار سرعت جسم در لحظه $t = 15s$ را در SI بنویسید.

ت) جابه جایی جسم در ۳ ثانیه دوم حرکت، چند متر است؟

ث) در چه لحظه ای، جهت حرکت جسم تغییر می کند؟

الف) چون نمودار سرعت - زمان خطی است، شتاب حرکت ثابت و برابر با شیب نمودار سرعت - زمان است.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \frac{40 - (-20)}{30 - 0} = \frac{60}{30} = 2 \frac{m}{s^2}$$

ب) معادله سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت، درجه یک و به صورت $v = at + v_0$ نوشته می شود.

$$t = 15s \Rightarrow v = 2 \times 15 - 20 = 10 \frac{m}{s} \Rightarrow \vec{v} = (10 \frac{m}{s}) \vec{i}$$

$$t_1 = 3s \Rightarrow v_1 = 2 \times 3 - 20 = -14 \frac{m}{s}$$

$$t_2 = 6s \Rightarrow v_2 = 2 \times 6 - 20 = -8 \frac{m}{s}$$

$$\Delta x = \frac{v_1 + v_2}{2} \Delta t = \frac{-14 + (-8)}{2} \times 3 = -33m$$

ث) جهت حرکت جسم هنگامی تغییر می کند که سرعت در یک لحظه صفر شود و علامت سرعت قبل و بعد از آن لحظه، تغییر کند.

$$v = 2t - 20 = 0 \Rightarrow 2t = 20 \Rightarrow t = 10s$$

بنابراین:

معادله مکان - زمان

در حرکت با شتاب ثابت، **سرعت متوسط** بین دو لحظه با **میانگین سرعت‌ها** در آن **دو لحظه** برابر است. از طرفی با توجه به تعریف سرعت متوسط ($v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$) می‌توان نوشت:

$$\left. \begin{aligned} v_{av} &= \frac{v + v_0}{2} \\ v_{av} &= \frac{\Delta x}{\Delta t} \end{aligned} \right\} \text{ و } \Delta x = v_{av} \Delta t = \frac{v + v_0}{2} \Delta t \Rightarrow x - x_0 = \frac{v + v_0}{2} (t - t_0) \xrightarrow{t_0=0} x - x_0 = \frac{v + v_0}{2} t$$

اکنون با جایگذاری معادله سرعت - زمان در رابطه بالا می‌توان معادله مکان - زمان را به صورت زیر مشخص کرد:

$$\left. \begin{aligned} x - x_0 &= \frac{v + v_0}{2} t \\ v &= at + v_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x - x_0 = \frac{at + v_0 + v_0}{2} t \Rightarrow x - x_0 = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0}$$

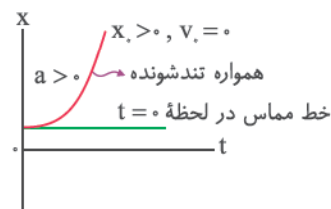
خرداد ۱۴۰۱ ریاضی خارج

توجه معادله مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت، **تابع درجه دوم** از زمان است.

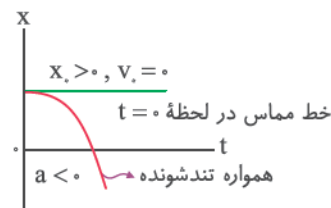
نمودار مکان - زمان

در حرکت با شتاب ثابت، معادله مکان - زمان به صورت تابع درجه دوم از زمان است. در این صورت **نمودار مکان - زمان** به شکل **سهمی** رسم می‌شود. برای رسم نمودار مکان - زمان حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

۱. اگر متحرک از حال سکون ($v_0 = 0$) شروع به حرکت کند.



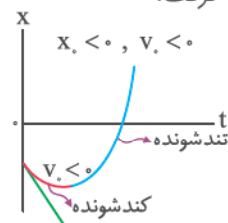
الف) اگر شتاب متحرک **مثبت** باشد ($a > 0$)، نمودار مکان - زمان به صورت روبه‌رو خواهد بود. در این حالت، حرکت همواره **تندشونده** در **جهت محور** انجام می‌شود.



ب) اگر شتاب حرکت **منفی** باشد ($a < 0$)، نمودار مکان - زمان به صورت روبه‌رو خواهد بود. در این حالت، حرکت همواره **تندشونده** در **خلاف جهت محور** انجام می‌شود.

۲. اگر متحرک دارای سرعت اولیه منفی باشد ($v_0 < 0$).

الف) اگر شتاب متحرک **مثبت** باشد، نمودار مکان - زمان، به صورت زیر رسم می‌شود که با توجه به نمودار می‌توان نتیجه گرفت: حرکت **ابتدا کندشونده** و سپس **تندشونده** انجام شده است.

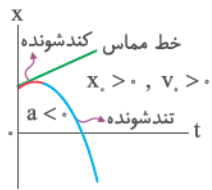


ب) اگر شتاب حرکت **منفی** باشد، نمودار مکان - زمان به صورت روبه‌رو رسم می‌شود. در این حالت می‌توان نتیجه گرفت: حرکت **پیوسته تندشونده** در **خلاف جهت محور** انجام شده است.

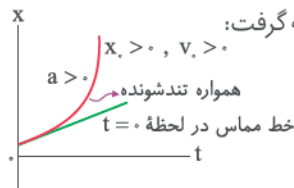




۳. اگر متحرک دارای سرعت اولیه مثبت باشد ($v_0 > 0$).



الف) اگر شتاب حرکت منفی باشد، نمودار مکان - زمان به صورت روبه‌رو خواهد بود. در این صورت می‌توان نتیجه گرفت: حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده انجام شده است.



ب) اگر شتاب حرکت مثبت باشد، نمودار مکان - زمان به صورت روبه‌رو خواهد بود. در این صورت می‌توان نتیجه گرفت: حرکت پیوسته تندشونده در جهت محور انجام شده است.

تحلیل حرکت با استفاده از معادله مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت

تیب

❶ معادله مکان - زمان یک خودرو که روی محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = -2t^2 + 16t - 24$ است.

الف) سرعت اولیه، مکان اولیه و شتاب حرکت متحرک را در SI بنویسید. ب) نمودار مکان - زمان آن را در ۸ ثانیه اول حرکت، رسم کنید.

پ) معادله سرعت - زمان آن را در SI بنویسید. ت) جابه‌جایی متحرک در ۱۰ ثانیه اول حرکت، چند متر است؟

ث) نمودار سرعت - زمان آن را در ۱۰ ثانیه اول حرکت، رسم کنید. ج) نوع حرکت خودرو در ۱۰ ثانیه اول را تحلیل کنید.

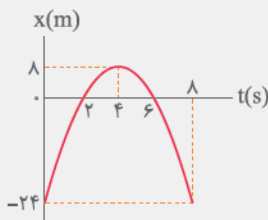
الف) هرگاه معادله مکان - زمان یک متحرک درجه دو باشد، حرکت متحرک با شتاب ثابت است. با مقایسه صورت کلی معادله مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت و معادله داده شده می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \\ x = -2t^2 + 16t - 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a = -2 \Rightarrow a = -4 \frac{m}{s^2} \\ v_0 = 16 \frac{m}{s} \\ x_0 = -24m \end{cases}$$

ب) ابتدا ریشه‌های معادله را مشخص می‌کنیم:

$$x = -2t^2 + 16t - 24 = 0 \Rightarrow t^2 - 8t + 12 = 0 \Rightarrow (t-2)(t-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 2s \\ t_2 = 6s \end{cases}$$

اکنون رأس نمودار را مشخص می‌کنیم:



$$t_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{16}{-4} = 4s \Rightarrow x_s = -2 \times 16 + 64 - 24 = 8m$$

پ) معادله سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت به صورت $v = at + v_0$ نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} a = -4 \frac{m}{s^2} \\ v_0 = 16 \frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow v = -4t + 16$$

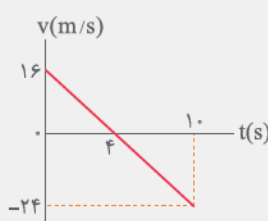
ت) روش اول:

$$\begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow x_1 = -24m \\ t_2 = 10s \Rightarrow x_2 = -2 \times 100 + 16 \times 10 - 24 = -64m \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = -64 - (-24) = -40m$$

روش دوم:

$$\begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 16 \frac{m}{s} \\ t_2 = 10s \Rightarrow v_2 = -4 \times 10 + 16 = -24 \frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow \Delta x = \frac{v_1 + v_2}{2} \Delta t = \frac{16 + (-24)}{2} \times 10 = -40m$$

ث)



$$v = -4t + 16$$

$$t = 10s \Rightarrow v = -24m/s$$

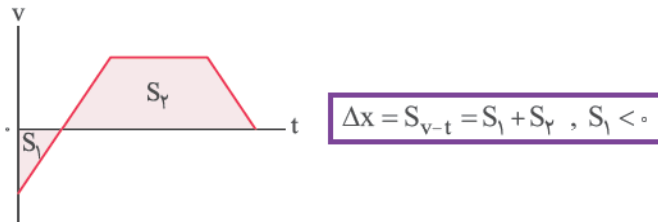
ج) با توجه به نمودار سرعت - زمان متحرک، حرکت ابتدا کندشونده در جهت محور x و سپس تندشونده در خلاف جهت محور x بوده است. در لحظه $t = 4s$ نیز جهت حرکت آن تغییر می‌کند.

استفاده از مساحت سطح بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان

اگر نمودار سرعت - زمان در حرکتی مشخص باشد، برای محاسبه جابه جایی یا مسافت می توان از مساحت ایجاد شده بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان استفاده کرد. البته باید توجه داشت قسمتی از منحنی که زیر محور زمان قرار می گیرد، باید با علامت منفی در محاسبه جابه جایی در نظر گرفته شود.

دی ۹۸ تجربی

به عبارت دیگر، **مساحت سطح بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان** در هر بازه زمانی برابر **جابه جایی** است.



با توجه به این که مسافت برابر با طول مسیر پیموده شده توسط متحرک است، می توان نوشت:

$$l = |S_1| + S_2$$

محاسبه جابه جایی و مسافت به کمک نمودار سرعت - زمان

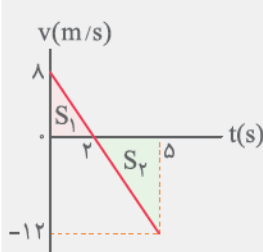
تیپ ۵

④ معادله سرعت - زمان یک متحرک که روی محور x حرکت می کند، در SI به صورت $v = -4t + 8$ است.

الف) جابه جایی و مسافت پیموده شده توسط این متحرک در ۵ ثانیه اول حرکت، چند متر است؟

ب) سرعت متوسط و تندی متوسط آن را در ۵ ثانیه اول حرکت، به دست آورید.

الف) برای محاسبه جابه جایی و مسافت پیموده شده توسط متحرک، نمودار سرعت - زمان آن را رسم می کنیم:



$$v = -4t + 8 = 0 \Rightarrow t = \frac{8}{4} = 2s$$

$$t = 5s \Rightarrow v = -4 \times 5 + 8 = -12 \frac{m}{s}$$

$$\begin{cases} S_1 = \frac{2 \times 8}{2} = 8 \\ S_2 = \frac{3 \times 12}{2} = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta x = S_1 + (-S_2) = 8 + (-18) = -10 m \\ l = S_1 + S_2 = 8 + 18 = 26 m \end{cases}$$

ب) سرعت متوسط برابر است با:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-10}{5} = -2 \frac{m}{s}$$

یا

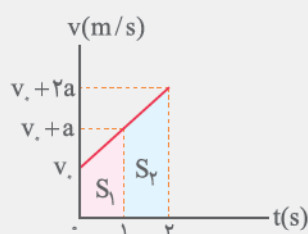
$$\begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 8 \frac{m}{s} \\ t_2 = 5s \Rightarrow v_2 = -12 \frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{8 + (-12)}{2} = -2 \frac{m}{s}$$

تندی متوسط به صورت زیر محاسبه می شود:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{26}{5} = 5.2 \frac{m}{s}$$

❏ نشان دهید در حرکت با شتاب ثابت، اختلاف جابه‌جایی در دو ثانیه متوالی برابر با شتاب متحرک است. (دی ۱۴۰۲ ریاضی)

فرض کنیم متحرک با شتاب ثابت و سرعت اولیه v_0 در جهت محور حرکت کند. در این صورت نمودار سرعت - زمان آن را می‌توان مطابق شکل رسم کرد. مساحت سطح بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان، برابر با جابه‌جایی است؛ بنابراین برای محاسبه جابه‌جایی‌ها در ثانیه اول ($0-1s$) و ثانیه دوم ($1s-2s$) می‌توان نوشت:



$$\Delta x_1 = S_1 = \left(\frac{v_0 + (v_0 + a)}{2} \right) \times 1 \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{2v_0 + a}{2}$$

$$\Delta x_2 = S_2 = \left(\frac{(v_0 + a) + (v_0 + 2a)}{2} \right) \times 1 \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{2v_0 + 3a}{2}$$

بنابراین اختلاف جابه‌جایی‌ها در دو ثانیه متوالی برابر است با:

$$\Delta x_2 - \Delta x_1 = \frac{2v_0 + 3a}{2} - \frac{2v_0 + a}{2} = \frac{2a}{2} = a$$

تعیین شتاب با استفاده از جابه‌جایی در ثانیه‌های متوالی



❏ جسمی با شتاب ثابت و سرعت اولیه $\vec{v}_0 = (\Delta m / s) \hat{i}$ بر مسیر مستقیمی حرکت می‌کند. اگر اختلاف جابه‌جایی انجام شده توسط جسم در دو ثانیه متوالی برابر Δm باشد، جابه‌جایی انجام شده توسط آن پس از ۴s چند متر است؟

اختلاف جابه‌جایی در دو ثانیه متوالی برابر با شتاب حرکت است. در این صورت می‌توان نوشت:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta x = \Delta m \\ \Delta x = a \end{array} \right\} \Rightarrow a = \Delta m / s^2$$

اکنون برای محاسبه جابه‌جایی انجام شده پس از ۴s می‌توان نوشت:

$$\Delta x' = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t \Rightarrow \Delta x' = \frac{1}{2} (\Delta)(4)^2 + \Delta(4) \Rightarrow \Delta x' = 6 \Delta m$$

نمودار شتاب - زمان

در حرکت با شتاب ثابت، با گذشت زمان، شتاب حرکت تغییر نمی‌کند. یعنی در این حرکت، نمودار شتاب - زمان به صورت خطی راست، افقی و موازی با محور زمان است.



۲ اگر شتاب منفی باشد ($a < 0$)

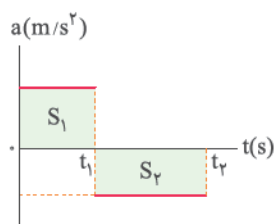


۱ اگر شتاب مثبت باشد ($a > 0$)

شهریور ۹۶ تجربی

تذکر مساحت سطح بین نمودار شتاب - زمان و محور زمان، مشخص‌کننده تغییرات سرعت است.

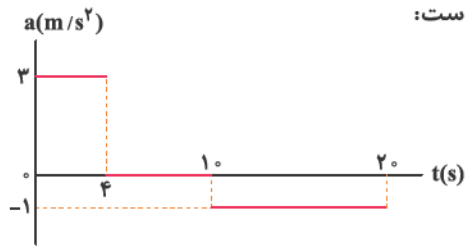
توجه کنید که در محاسبه تغییر سرعت، آن قسمت از مساحت را که زیر محور قرار می‌گیرد، با علامت منفی در نظر می‌گیریم.



$$S_{a-t} = \Delta v = S_1 + S_2, S_2 < 0$$

محاسبه تغییر سرعت از روی نمودار شتاب - زمان

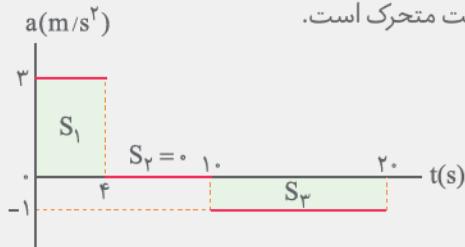
تیب



۴) نمودار شتاب - زمان یک متحرک که روی محور X حرکت می‌کند، مطابق شکل مقابل است:

الف) تغییر سرعت این متحرک در ۲۰ ثانیه اول حرکت، چند متر بر ثانیه است؟

ب) شتاب متوسط متحرک در ۲۰ ثانیه اول حرکت، چند متر بر مربع ثانیه است؟



الف) مساحت سطح بین نمودار شتاب - زمان و محور زمان، برابر تغییر سرعت متحرک است.

$$S_1 = 4 \times 3 = 12, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = 10 \times 1 = 10$$

$$\Delta v = S_1 + S_2 + (-S_3) = 12 + 0 + (-10) = 2 \frac{m}{s}$$

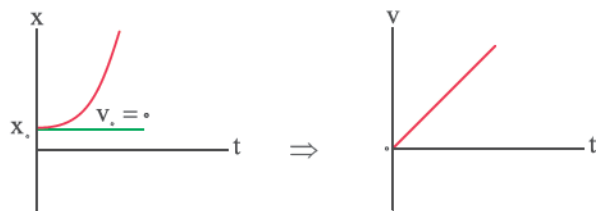
$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_{av} = \frac{2}{20} = 0.1 \frac{m}{s^2}$$

ب)

تبدیل نمودارها در حرکت با شتاب ثابت

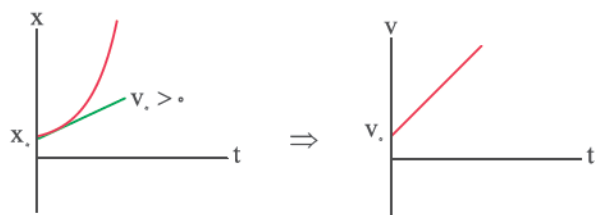
در تبدیل نمودارهای مربوط به حرکت با شتاب ثابت می‌توان حالت‌های زیر را در نظر گرفت.

الف) اگر شتاب حرکت مثبت باشد ($a > 0$).



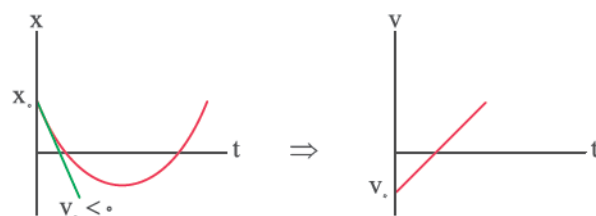
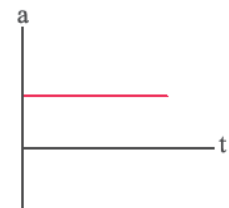
حرکت همواره تندشونده است.

$$(x_0 > 0)$$



حرکت همواره تندشونده است.

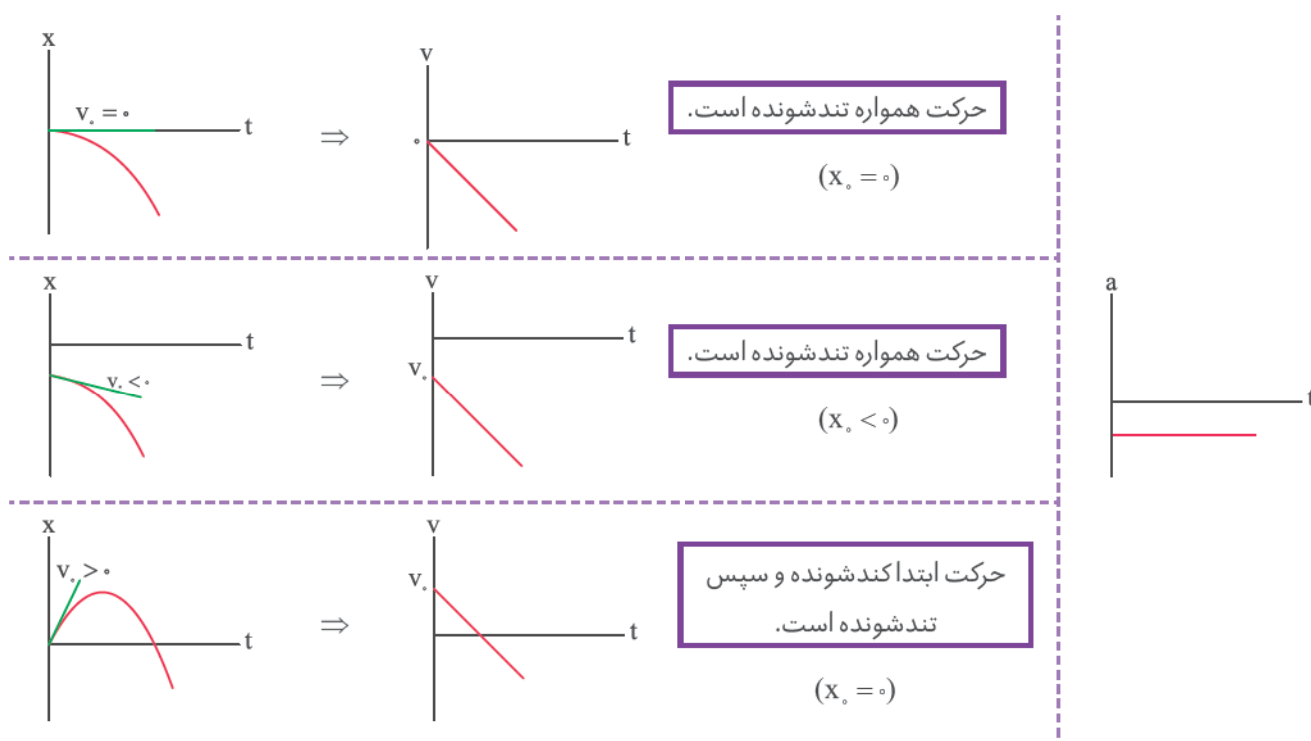
$$(x_0 > 0)$$



حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است.

$$(x_0 > 0)$$

ب) اگر شتاب حرکت منفی باشد ($a < 0$).

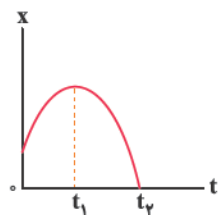


نتیجه: مکان اولیه متحرک تأثیری در نوع حرکت ندارد.

رسم نمودار سرعت - زمان و شتاب - زمان از روی نمودار مکان - زمان

تیب

۱) نمودار مکان - زمان یک متحرک که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق سهمی شکل مقابل است؛



الف) سرعت اولیه متحرک در چه جهتی است؟

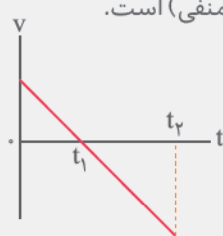
ب) بردار شتاب متحرک در چه جهتی است؟

پ) نمودار سرعت - زمان آن را رسم کنید.

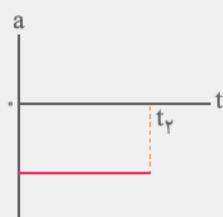
ت) نمودار شتاب - زمان آن را رسم کنید.

الف) شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان در لحظه $t_0 = 0$ مثبت است، بنابراین سرعت اولیه متحرک در جهت محور x است.

ب) دهانه نمودار مکان - زمان متحرک رو به پایین است، بنابراین شتاب متحرک در خلاف جهت محور x (شتاب منفی) است.
 پ) هرگاه نمودار مکان - زمان یک متحرک سهمی باشد، حرکت آن با شتاب ثابت است و معادله سرعت - زمان آن درجه یک و نمودار سرعت - زمان آن خطی با شیب ثابت می‌شود. چون شتاب منفی و سرعت اولیه آن مثبت و در لحظه t_1 جهت حرکت متحرک عوض می‌شود، نمودار سرعت - زمان آن به صورت مقابل رسم می‌شود:



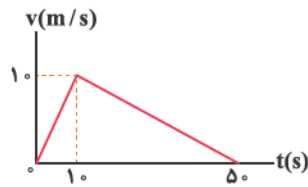
ت) شتاب متحرک ثابت و منفی است، بنابراین نمودار شتاب - زمان آن مطابق شکل مقابل رسم می‌شود.



تبدیل نمودارها

تیب ۹

(برگرفته از کتاب درسی)



۹ نمودار سرعت - زمان یک متحرک که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است:

(الف) شتاب متحرک در مرحله تندشونده چند برابر اندازه شتاب آن در مرحله کندشونده است؟

(ب) شتاب متحرک در لحظه $t_1 = 4/2s$ و $t_2 = 4/3s$ را به دست آورید.

(پ) نمودار شتاب - زمان آن را رسم کنید.

(ت) سرعت متوسط آن در ۵ ثانیه اول حرکت چند متر بر ثانیه است؟

(ث) مسافت پیموده شده در بازه زمانی ۳۰s تا ۵۰s چند متر است؟

(ج) اگر $x_0 = -18m$ باشد، نمودار مکان - زمان آن را در مدت ۵۰ ثانیه رسم کنید.

(الف) در بازه زمانی صفر تا ۱s، اندازه سرعت (تندی) افزایش یافته و حرکت متحرک تندشونده است.

$$a_{(0-1)} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{10-0}{1-0} = 10 \frac{m}{s^2}$$

در بازه زمانی ۱s تا ۵s، اندازه سرعت (تندی) کاهش یافته و حرکت متحرک کندشونده است.

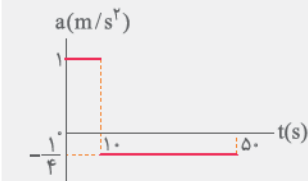
$$a_{(1-5)} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0-10}{5-1} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2} \frac{m}{s^2}$$

$$\frac{a_{(0-1)}}{|a_{(1-5)}|} = \frac{10}{|-\frac{5}{2}|} = |-4| = 4$$

بنابراین شتاب مرحله تندشونده ۴ برابر اندازه شتاب مرحله کندشونده است.

(ب) هرگاه نمودار سرعت - زمان خطی راست با شیب ثابت باشد، در تمام لحظه‌ها شتاب یکسان و برابر با شتاب متوسط در آن بازه زمانی است.

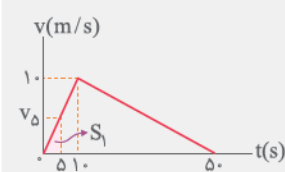
$$a_{t_1=4/2s} = a_{(0-1)} = 10 \frac{m}{s^2} ; a_{t_2=4/3s} = a_{(1-5)} = -\frac{5}{2} \frac{m}{s^2}$$



(پ) شتاب در هر مرحله ثابت است، پس نمودار شتاب - زمان در هر مرحله به صورت

خطی به موازات محور زمان است.

(ت) جابه‌جایی متحرک در ۵ ثانیه اول حرکت را به کمک مساحت سطح بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان یا به کمک معادله مکان - زمان



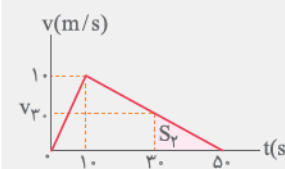
$$\text{به دست می‌آوریم.} \quad \frac{1}{2} \times 5 = \frac{v_5}{5} \Rightarrow v_5 = 5 \frac{m}{s}$$

$$\Delta x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t$$

$$S_1 = \Delta x_{(0-5)} = \frac{5 \times 5}{2} = 12.5m \quad \text{یا} \quad \Delta x = \frac{1}{2} \times 1 \times 25 + 0 = 12.5m$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{12.5}{5} = 2.5 \frac{m}{s}$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{12.5}{5} = 2.5 \frac{m}{s}$$



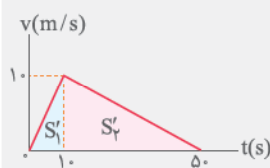
(ث) ابتدا سرعت متحرک در لحظه $t = 3s$ را به کمک مفهوم شیب خط به دست می‌آوریم و سپس

مسافت پیموده شده را از مساحت سطح بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{1}{2} \times 3 = \frac{v_3}{3} \Rightarrow v_3 = \frac{3}{2} \times 10 = 15 \frac{m}{s}$$

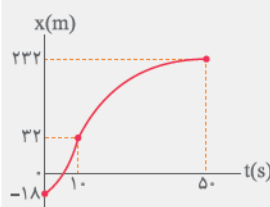
$$S_2 = \Delta x_{(0-3)} = \frac{3 \times 15}{2} = 22.5m$$

(ج)



$$S'_1 = \Delta x_{(0-1)} = \frac{1 \times 10}{2} = 5m$$

$$\Rightarrow x_{1s} - x_0 = 5 \xrightarrow{x_0 = -18m} x_{1s} - (-18) = 5 \Rightarrow x_{1s} = 32m$$



$$S'_2 = \Delta x_{(1-5)} = \frac{4 \times 10}{2} = 20m$$

$$\Rightarrow x_{5s} - x_{1s} = 20 \xrightarrow{x_{1s} = 32m} x_{5s} - 32 = 20 \Rightarrow x_{5s} = 232m$$

معادله سرعت - جابه‌جایی (مستقل از زمان)

در تحلیل و بررسی سؤالاتی که کمیت زمان در آن‌ها تعیین نشده است، می‌توان از معادله **سرعت - جابه‌جایی**، بهره‌برد. از این معادله برای مشخص کردن یکی از کمیت‌های جابه‌جایی (Δx)، سرعت اولیه (v_0)، سرعت (v) یا شتاب (a) مربوط به متحرک می‌توان استفاده کرد. برای به‌دست آوردن این معادله خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} x &= v_{av}t + x_0 \\ v &= at + v_0 \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a} \\ v_{av} &= \frac{v + v_0}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = \left(\frac{v + v_0}{2} \right) \left(\frac{v - v_0}{a} \right) + x_0 \Rightarrow v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \quad \text{یا} \quad v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$$

استفاده از معادله سرعت - جابه‌جایی (مستقل از زمان) در تعیین سرعت

تیپ ۱۰

❓ خودرویی با سرعت $18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ در امتداد مسیری مستقیم از چهارراهی می‌گذرد. اگر تندی آن با شتاب ثابت $1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ افزایش یابد، سرعت خودرو پس از 300 m جابه‌جایی چند کیلومتر بر ساعت می‌شود؟

(برگرفته از کتاب درسی)

برای محاسبه سرعت خودرو از معادله سرعت - جابه‌جایی (مستقل از زمان) در حرکت با شتاب ثابت استفاده می‌کنیم:

$$v_1 = 18 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x \Rightarrow v_2^2 - 25 = 2 \times 1 \times 300 \Rightarrow v_2^2 = 625 \Rightarrow v_2 = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

مسائل توقف بدون در نظر گرفتن زمان تأخیر در واکنش

تیپ ۱۱

❓ محیط‌بان یک پارک محافظت‌شده هنگام گشت شبانه، با تندی $54 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ در جاده‌ای مستقیم در حرکت است که ناگهان گوزن بدون حرکتی را جلوی خود می‌بیند و ترمز می‌کند. حرکت خودرو با شتابی به اندازه $5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ کند می‌شود تا سرانجام متوقف شود. اگر لحظه‌ای که محیط‌بان ترمز می‌گیرد، گوزن در فاصله ۳۰ متری از خودرو باشد،

(برگرفته از کتاب درسی)

الف) آیا خودرو به گوزن برخورد می‌کند؟

ب) چه مدت طول می‌کشد تا خودرو متوقف شود؟

الف) مسافتی که خودرو طی می‌کند تا متوقف شود را به کمک معادله سرعت - جابه‌جایی محاسبه می‌کنیم:

$$v_1 = 54 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 0 - 225 = 2 \times (-5) \times \Delta x \Rightarrow \Delta x = 22.5 \text{ m}$$

بنابراین خودرو به گوزن برخورد نمی‌کند و در فاصله ۷/۵ متری آن متوقف می‌شود.

ب) برای محاسبه زمان توقف خودرو از معادله سرعت - زمان استفاده می‌کنیم: (در لحظه توقف، سرعت صفر است.)

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = -5t + 15 \xrightarrow{v=0} 0 = -5t + 15 \Rightarrow t = 3 \text{ s}$$

مسائل توقف با در نظر گرفتن زمان تأخیر در واکنش

تیب ۱۲

۱۴ اتومبیلی با سرعت $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ در مسیری مستقیم در حال حرکت است. ناگهان راننده مانعی را در فاصله ۷۵ متری خود می بیند و ترمز می کند. اگر زمان تأخیر در واکنش راننده 0.4 ثانیه باشد و اندازه شتاب ترمز اتومبیل حین ترمز $5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ باشد، با محاسبات نشان دهید که اتومبیل به مانع برخورد می کند یا خیر؟ (برگرفته از کتاب درسی)

هنگامی که راننده مانع را می بیند، مدت زمان کوتاهی طول می کشد تا پای خود را از روی گاز برداشته و ترمز کند. به این بازه، زمان تأخیر در واکنش راننده می گویند و حرکت اتومبیل در این مدت با سرعت ثابت مدل سازی می شود. بنابراین قسمت اول مسیر را با سرعت ثابت و قسمت دوم را با شتاب ثابت و کندشونده طی می کند تا متوقف شود.

روش اول:

$$v_1 = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

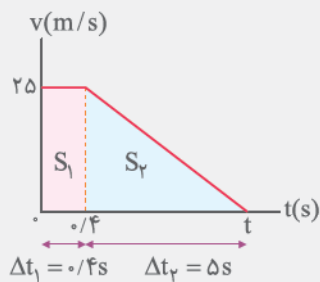
$$\Delta x_1 = v_1 \Delta t_1 = 25 \times 0.4 = 10 \text{ m}$$

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x_2 \Rightarrow 0 - 625 = 2(-5)\Delta x_2 \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{625}{10} = 62.5 \text{ m}$$

$$\Delta x_{\text{کل}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 10 + 62.5 = 72.5 \text{ m}$$

بنابراین اتومبیل نه تنها به مانع برخورد نمی کند، بلکه در فاصله $2/5$ متری آن می ایستد.

روش دوم: ابتدا نمودار سرعت - زمان متحرک را رسم می کنیم و به کمک مساحت سطح بین نمودار و محور زمان، جابه جایی کل اتومبیل را از لحظه دیدن مانع تا توقف کامل آن محاسبه می کنیم.



$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -5 = \frac{0 - 25}{t - 0.4} \Rightarrow t - 0.4 = 5 \Rightarrow t = 0.8 \text{ s}$$

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \Delta x_1 = 25 \times 0.4 = 10 \text{ m} \\ S_2 &= \Delta x_2 = \frac{25 \times 5}{2} = 62.5 \text{ m} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta x_{\text{کل}} = 62.5 + 10 = 72.5 \text{ m} \Rightarrow \text{به مانع برخورد نمی کند.}$$

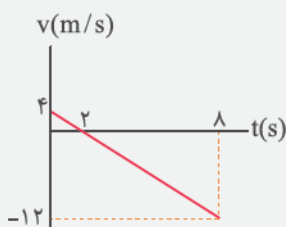
ایستگاه تمرین

۱ معادله مکان - زمان متحرکی در SI به صورت $x = -t^2 + 4t + 20$ است. نوع حرکت آن از مبدأ زمان ($t_0 = 0$) تا لحظه $t = 8 \text{ s}$ چگونه است؟

پاسخ برای بررسی نوع حرکت جسم، ابتدا معادله سرعت - زمان جسم را مشخص می کنیم:

$$\left. \begin{aligned} x &= -t^2 + 4t + 20 \\ x &= \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2}a = -1 \Rightarrow a = -2 \text{ m/s}^2, \quad v_0 = 4 \text{ m/s}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = -2t + 4$$



اکنون با رسم نمودار سرعت - زمان و بررسی تغییرات تندی حرکت، نوع حرکت را بررسی می کنیم:

$$v = -2t + 4 = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ s}$$

$$t = 8 \text{ s} \Rightarrow v = -2(8) + 4 = -12 \text{ m/s}$$

با توجه به نمودار مشخص می شود، متحرک ابتدا به مدت زمان ۲s، در جهت محور به صورت کندشونده و پس از آن در لحظه $t = 2 \text{ s}$ تغییر جهت داده و به صورت تندشونده در خلاف جهت محور حرکت می کند.

۲ متحرکی در امتداد محور x و با شتاب ثابت در حرکت است. در مکان $x = +10\text{ m}$ ، سرعت متحرک 4 m/s^2 و در مکان $x_2 = +19\text{ m}$ سرعت متحرک 18 km/h است. برگرفته از کتاب درسی

الف) شتاب حرکت آن چند متر بر مربع ثانیه است؟

ب) پس از چه مدتی، سرعت متحرک از 4 m/s به 18 km/h می‌رسد؟

پاسخ الف) شتاب حرکت را به کمک معادله سرعت - جابه‌جایی به دست می‌آوریم:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 25 - 16 = 2a(19 - 10) \Rightarrow a = \frac{9}{2 \times 9} = 0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

ب) با استفاده از رابطه محاسبه شتاب، مدت زمان لازم را می‌توان حساب کرد:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow 0.5 = \frac{5 - 4}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 2\text{ s}$$

۳ سرعت متحرکی در یک مسیر مستقیم در مکان $x_1 = 4\text{ m}$ برابر 8 m/s است. اگر شتاب حرکت 9 m/s^2 باشد، در چه مکانی سرعت متحرک برابر 10 m/s است؟

پاسخ با استفاده از معادله سرعت - جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت می‌توان مکان مورد نظر را به صورت زیر تعیین کرد:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x \Rightarrow (10)^2 - (8)^2 = 2a(x_2 - 4)$$

$$\frac{v_1 = 8\text{ m/s}}{x_1 = 4} \quad \frac{v_2}{x_2} \rightarrow x(\text{m}) \Rightarrow 100 - 64 = 2\left(\frac{9}{2}\right)(x_2 - 4) \Rightarrow 36 = \frac{18}{2}(x_2 - 4)$$

$$\Rightarrow x_2 - 4 = 4 \Rightarrow x_2 = 8\text{ m}$$

۴ دو متحرک به طور همزمان از حال سکون و از یک نقطه در امتداد مسیر مستقیمی به حرکت درمی‌آیند. شتاب حرکت اولی a و دیگری $(a+2)$ است. پس از t ثانیه، سرعت آنها به ترتیب به 10 m/s و 12 m/s می‌رسد. شتاب a در SI چقدر است؟

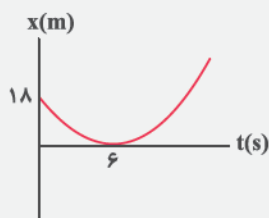
پاسخ با استفاده از معادله سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت می‌توان نوشت:

$$v = at + v_0 \xrightarrow{v_0=0} \begin{cases} v_1 = at \Rightarrow 10 = at & (*) \\ v_2 = (a+2)t \Rightarrow 12 = at + 2t & (*) \end{cases} \rightarrow 12 = 10 + 2t \Rightarrow t = 1\text{ s}$$

اکنون برای محاسبه شتاب a خواهیم داشت:

$$(*) : 10 = at, \quad t = 1\text{ s} \xrightarrow{t=1\text{ s}} a = 10 \Rightarrow a = 10\text{ m/s}^2$$

۵ نمودار مکان - زمان حرکت جسمی روی خط راست مطابق شکل است. سرعت متحرک در لحظه $t = 2\text{ s}$ ، چند متر بر ثانیه است؟



پاسخ ابتدا به کمک معادله مستقل از شتاب، سرعت اولیه متحرک را به دست می‌آوریم و سپس شتاب آن را محاسبه می‌کنیم:

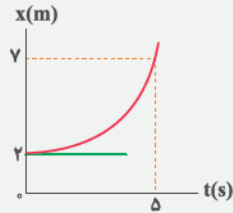
$$\Delta x_{(0-6)} = \frac{v_0 + v_6}{2} \Delta t \Rightarrow 0 - 18 = \frac{v_0 + 0}{2} \times 6 \Rightarrow v_0 = -6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - (-6)}{6 - 0} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

معادله سرعت - زمان را نوشته و سپس سرعت آن را در لحظه $t = 2\text{ s}$ محاسبه می‌کنیم:

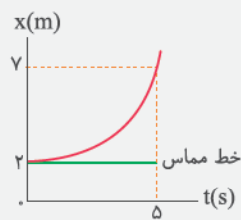
$$v = at + v_0 \Rightarrow v = t - 6 \xrightarrow{t=2\text{ s}} v = 2 - 6 = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

۶ نمودار مکان - زمان متحرکی به صورت سهمی شکل مقابل است:



الف) سرعت متحرک در لحظه $t = 5s$ چقدر است؟

ب) نمودار سرعت - زمان این متحرک را رسم کنید.



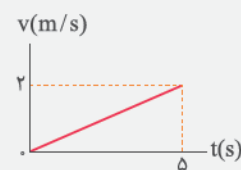
پاسخ الف) با توجه به نمودار مکان - زمان داده شده، شیب خط مماس بر نمودار در لحظه $t = 0$ ، صفر است. بنابراین می توان نتیجه گرفت، سرعت اولیه آن صفر است (شیب خط مماس بر منحنی مکان - زمان در $t = 0$ ، صفر است).

با استفاده از معادله مکان - زمان، ابتدا شتاب حرکت را حساب می کنیم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow 7 = \frac{1}{2}a(5)^2 + 0 + 2 \Rightarrow 5 = \frac{25}{2}a \Rightarrow 25a = 10 \Rightarrow a = 0.4 \text{ m/s}^2$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = 0.4 \times 5 + 0 = 2 \text{ m/s}$$

در این صورت سرعت متحرک در لحظه $t = 5s$ برابر است با:



ب) با توجه به معادله سرعت - زمان، نمودار سرعت - زمان را به صورت زیر رسم می کنیم:

$$v = at + v_0 = 0.4t + 0 = 0.4t$$

۷ معادله مکان - زمان یک متحرک که در امتداد محور x حرکت می کند، در SI به صورت $x = 2t^2 - 28t + 66$ است.

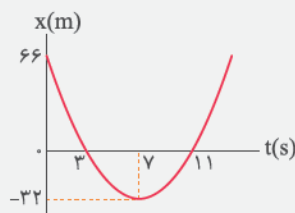
الف) شتاب، سرعت اولیه و مکان اولیه متحرک را به دست آورید. ب) نمودار مکان - زمان آن را رسم کنید.

پ) نمودار سرعت - زمان آن را رسم کنید.

ث) تندی متوسط متحرک در ۱۰ ثانیه اول حرکت، چند متر بر ثانیه است؟

پاسخ الف) هرگاه معادله مکان - زمان یک متحرک در SI درجه ۲ باشد، حرکت آن با شتاب ثابت است. با مقایسه معادله داده شده و معادله حرکت با شتاب ثابت می توان نوشت:

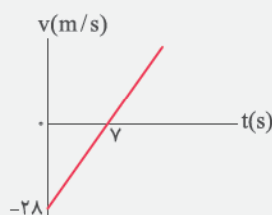
$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \\ x &= 2t^2 - 28t + 66 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2}a = 2 \Rightarrow a = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, v_0 = -28 \frac{\text{m}}{\text{s}}, x_0 = 66 \text{ m}$$



ب) ریشه های معادله حرکت به همراه مختصات رأس سهمی را مشخص می کنیم:

$$x = 2t^2 - 28t + 66 = 0 \Rightarrow t^2 - 14t + 33 = 0 \Rightarrow (t - 3)(t - 11) = 0 \Rightarrow t_1 = 3s, t_2 = 11s$$

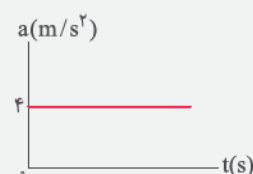
$$t_s = -\frac{b}{2a} = \frac{28}{4} = 7s \Rightarrow x_s = 2 \times 49 - 28 \times 7 + 66 = 98 - 196 + 66 = -32 \text{ m}$$



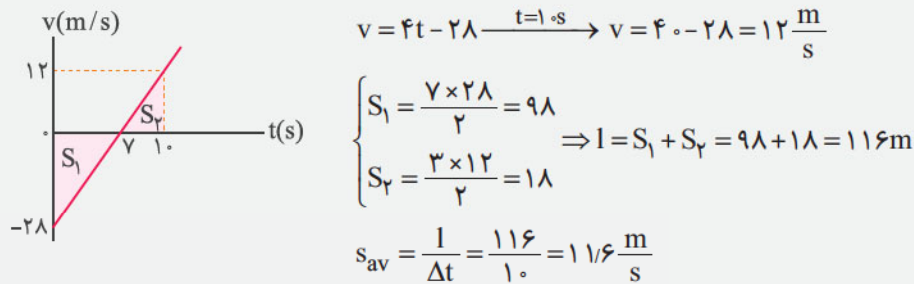
پ) با توجه به داده های مسئله، می توان معادله سرعت - زمان را نوشته و با توجه به این معادله نمودار سرعت - زمان را به صورت مقابل رسم کرد:

$$v = at + v_0 = 4t - 28, v = 0 \Rightarrow 4t - 28 = 0 \Rightarrow t = 7s$$

ث) شتاب ثابت است، پس نمودار شتاب - زمان خطی به موازات محور زمان است.



ث) مسافت پیموده شده را به کمک مساحت سطح بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان محاسبه می‌کنیم و سپس تندی متوسط متحرک را به دست می‌آوریم:



۸) معادله سرعت - زمان یک متحرک که روی محور X حرکت می‌کند، در SI به صورت $v = -5t + 15$ است.

الف) در چه لحظه‌ای، جهت حرکت تغییر می‌کند؟ (ب) شتاب و سرعت اولیه متحرک را تعیین کنید.

پ) در ۵ ثانیه اول حرکت، نوع حرکت متحرک را بررسی کنید. (ت) سرعت متوسط متحرک در ۸ ثانیه اول حرکت، چند متر بر ثانیه است؟

ث) جابه‌جایی و مسافت پیموده شده در ۶ ثانیه اول حرکت، چند متر است؟

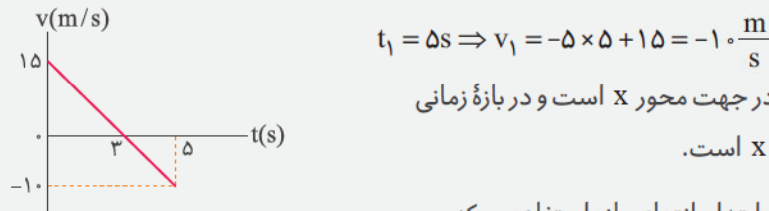
ج) اگر متحرک در لحظه $t_0 = 0s$ در $x_0 = -10m$ باشد؛ نمودار مکان - زمان آن را در ۸ ثانیه اول حرکت رسم کنید.

پاسخ الف) لحظه تغییر جهت برابر است با: $v = -5t + 15 = 0 \Rightarrow t = \frac{15}{5} = 3s$

ب) هرگاه معادله سرعت - زمان متحرکی درجه یک باشد، حرکت متحرک با شتاب ثابت است.

$$\begin{cases} v = at + v_0 \\ v = -5t + 15 \end{cases} \Rightarrow a = -5 \frac{m}{s^2}, v_0 = 15 \frac{m}{s}$$

پ) ابتدا نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار در ۳ ثانیه اول، حرکت متحرک کندشونده در جهت محور X است و در بازه زمانی ۳s تا ۵s، حرکت متحرک تندشونده در خلاف جهت محور X است.

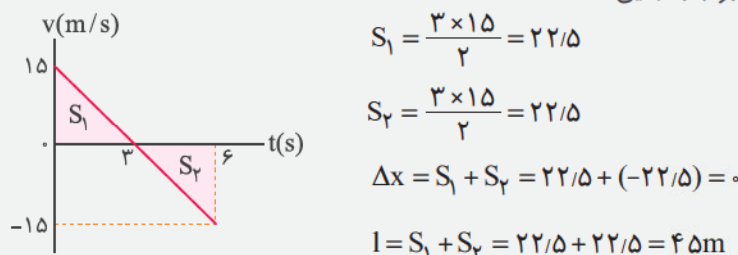
ت) برای محاسبه سرعت متوسط، از میانگین سرعت‌ها در ابتدا و انتهای بازه استفاده می‌کنیم:

$$t_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 15 \frac{m}{s}$$

$$t_2 = 5s \Rightarrow v_2 = -5 \times 5 + 15 = -10 \frac{m}{s}$$

$$v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{15 + (-10)}{2} = -\frac{5}{2} \frac{m}{s}$$

ث) مساحت سطح بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان برابر جابه‌جایی است.



ج) ابتدا معادله مکان - زمان متحرک را می‌نویسیم و سپس نمودار مکان - زمان آن را رسم می‌کنیم:

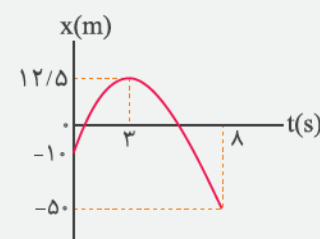
$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

$$x = \frac{1}{2} \times (-5)t^2 + 15t + (-10) \Rightarrow x = -\frac{5}{2}t^2 + 15t - 10$$

مختصات رأس نمودار به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$t_s = 3s \Rightarrow x_s = -\frac{5}{2} \times 9 + 15 \times 3 - 10 = 12.5 m$$

$$t = 8s \Rightarrow x = -\frac{5}{2} \times 64 + 120 - 10 = -50 m$$



بانک سؤالات نهایی

الف پرسش‌های مفهومی

● درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

۱۹۴ سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان با محور زمان برابر است با مسافت طی شده توسط متحرک. شهریور ۹۸ ریاضی

۱۹۵ سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان با محور زمان برابر با تغییر مکان است. خرداد ۹۸ ریاضی - دی ۱۴۰۰ ریاضی - دی ۹۸ تجربی

۱۹۶ مساحت سطح بین نمودار مکان - زمان و محور زمان در هر بازه زمانی برابر اندازه جابه‌جایی در آن بازه است. خرداد ۱۴۰۳ تجربی

۱۹۷ در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط متحرک در هر بازه زمانی دلخواه با سرعت لحظه‌ای آن برابر است. خرداد ۱۴۰۳ تجربی - خرداد ۱۴۰۰ ریاضی خارج

۱۹۸ هواپیمایی که بر روی باند پرواز می‌کند تا به شرایط برخاستن برسد، دارای شتاب تقریباً ثابت است. دی ۹۷ تجربی

۱۹۹ معادله مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت، تابعی درجه دوم از زمان است. شهریور ۹۹ ریاضی - خرداد ۱۴۰۱ ریاضی خارج

● در هر یک از گزاره‌های زیر، واژه مناسب را انتخاب کنید.

۲۰۰ در حرکت با شتاب ثابت، نمودار مکان - زمان متحرک به صورت خط راست - سهمی است. شهریور ۱۴۰۲ ریاضی

۲۰۱ در حرکت با سرعت شتاب ثابت روی خط راست، تغییرات سرعت نسبت به زمان به صورت یک تابع خطی است. خرداد ۱۴۰۰ ریاضی

۲۰۲ در حرکت با شتاب ثابت، اختلاف جابه‌جایی در دو ثانیه متوالی برابر سرعت شتاب متحرک است. دی ۱۴۰۲ ریاضی

۲۰۳ سطح محصور بین نمودار شتاب - زمان و محور زمان برابر تغییر مکان - سرعت است. شهریور ۱۴۰۲ تجربی

۲۰۴ در حرکت با شتاب ثابت - یکنواخت بر خط راست، سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای با هم برابرند. خرداد ۹۸ ریاضی

● به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

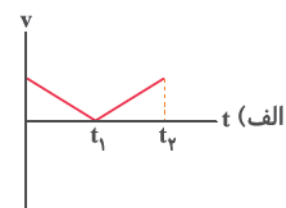
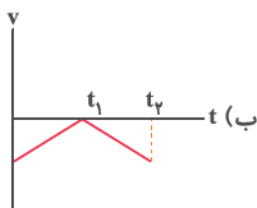
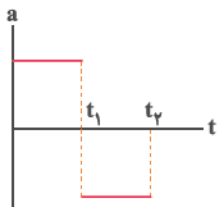
۲۰۵ در چه صورت اندازه شتاب متوسط متحرک با شتاب لحظه‌ای آن برابر می‌شود؟ دی ۹۷ تجربی

۲۰۶ جمله «جسمی روی سطح شیب‌دار بدون اصطکاک، در حال لغزیدن است» مثالی از چه حرکتی است؟ دی ۱۴۰۱ ریاضی

۲۰۷ جسمی در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. شتاب جسم در حال افزایش و تندی آن در حال کاهش است. نمودار سرعت - زمان این جسم را به صورت کیفی رسم کنید.

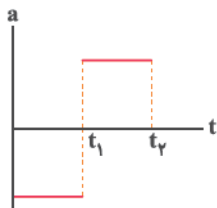
۲۰۸ نمودار شتاب - زمان متحرکی مطابق شکل زیر است:

کدام یک از نمودارهای سرعت - زمان زیر می‌تواند متناظر با این نمودار شتاب - زمان باشد؟ توضیح دهید.

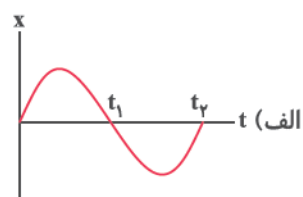
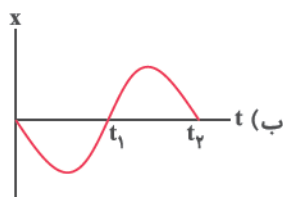


۲۰۹ نمودار شتاب - زمان متحرکی که در امتداد محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل مقابل است. توضیح دهید

کدام یک از نمودارهای مکان - زمان شکل‌های (الف) یا (ب) می‌تواند متناظر با این نمودار شتاب - زمان باشد؟

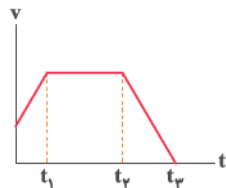


خرداد ۹۸ تجربی



۲۱۰ شکل زیر، نمودار سرعت - زمان یک متحرک که در امتداد محور x در حال حرکت است را نشان می‌دهد. با توجه به این نمودار:

خرداد ۱۴۰۱ تجربی خارج



الف) شیب خط در بازه زمانی صفر تا t_1 ، چه کمیتی را نشان می‌دهد؟

ب) مساحت سطح بین نمودار و محور زمان، چه کمیتی را نشان می‌دهد؟

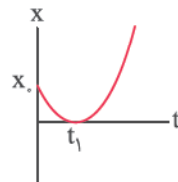
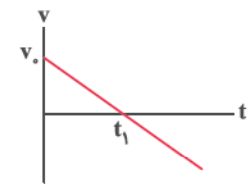
پ) آیا جهت حرکت این متحرک تغییر کرده است؟

ت) در بازه زمانی‌ای که حرکت کندشونده است، بردار شتاب در چه جهتی است؟

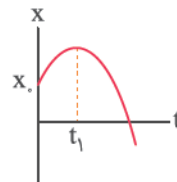
۲۱۱ شکل روبه‌رو نمودار سرعت - زمان یک متحرک را نشان می‌دهد. کدام یک از شکل‌های (۱) یا (۲) می‌تواند

خرداد ۱۴۰۳ ریاضی

نشان‌دهنده نمودار مکان - زمان این متحرک باشد؟



(۲)

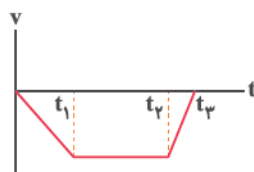


(۱)

۲۱۲ نمودار سرعت - زمان یک متحرک که در امتداد محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل مقابل است. نمودار

خرداد ۹۹ تجربی

شتاب - زمان آن را به صورت کیفی رسم کنید.



مسائل ب

خرداد ۱۴۰۲ تجربی

۲۱۳ معادله سرعت - زمان متحرکی در SI به صورت $v = -10t + 20$ است؛

الف) در لحظه $t = 3s$ جهت بردارهای سرعت و شتاب متحرک را تعیین کنید.

ب) در چه لحظه‌ای این متحرک تغییر جهت می‌دهد؟

۲۱۴ معادله سرعت - زمان متحرکی در SI به صورت $v = -2t + 1$ است. جابه‌جایی متحرک در بازه زمانی $t_1 = 0s$ تا $t_2 = 3s$ چند متر است؟

دی ۹۷ تجربی

۲۱۵ معادله سرعت - زمان متحرکی در SI به صورت $v = -2t + 2$ است. اگر متحرک در لحظه $t_0 = 0s$ در مکان $x_0 = 1m$ باشد، سرعت متوسط

خرداد ۱۴۰۱ تجربی

متحرک در بازه زمانی $t_0 = 0s$ تا $t = 3s$ چند متر بر ثانیه است؟

۲۱۶ معادله سرعت - زمان متحرکی در SI به صورت $v = 2t + v_0$ و سرعت متوسط آن در ۴ ثانیه اول حرکت $2m/s$ است. مقدار v_0 چند متر

خرداد ۹۸ تجربی خارج

بر ثانیه است؟

۲۱۷ سرعت متحرکی در لحظه $t = 0s$ به صورت $\vec{v}_0 = 10(m/s)\hat{i}$ و شتاب ثابت آن $\vec{a} = -1(m/s^2)\hat{i}$ است. در بازه زمانی صفر تا $2s$ ، تندی

دی ۱۴۰۱ تجربی

حرکت آن چگونه تغییر می‌کند؟

خرداد ۹۹ تجربی خارج

۲۱۸ متحرکی که در جهت محور x در حال حرکت است، دارای سرعت اولیه $6m/s$ و شتاب $4m/s^2$ است؛

الف) جابه‌جایی متحرک در بازه زمانی $t_1 = 0s$ تا $t_2 = 3s$ چند متر است؟

ب) معادله سرعت - زمان این متحرک را بنویسید.

خرداد ۹۹ ریاضی خارج

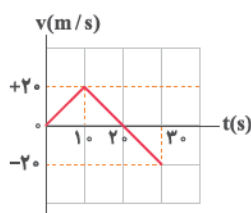
۲۱۹ یک خودرو می‌تواند در حرکت بر خط راست با شتاب $5m/s^2$ حرکت کند؛

الف) چه مدت طول می‌کشد تا تندی آن از صفر به $108 km/h$ برسد؟

ب) خودرو در این مدت چه مسافتی را می‌پیماید؟

۲۲۰ معادله حرکت جسمی که روی خط راست حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = 2t^2 + t + 1$ است. معادله سرعت - زمان این متحرک را بنویسید.

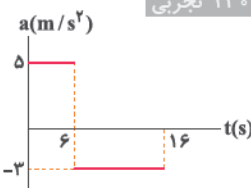
خرداد ۱۴۰۱ تجربی خارج



۲۴۰ نمودار سرعت - زمان متحرکی که از مکان اولیه -20m شروع به حرکت می‌کند، مطابق شکل مقابل است: با به دست آوردن مکان متحرک در لحظه‌های $t = 10\text{s}$ و $t = 20\text{s}$ ، نمودار مکان - زمان این متحرک را در بازه زمانی (صفر تا 30s) رسم کنید.

خرداد ۱۴۰۲ تجربی

۲۴۱ شکل زیر، نمودار شتاب - زمان یک متحرک را که در امتداد محور x از حال سکون شروع به حرکت می‌کند، نشان می‌دهد:



خرداد ۱۴۰۳ تجربی

الف) با انجام محاسبات لازم، نمودار سرعت - زمان آن را در بازه زمانی صفر تا 16s رسم کنید.

ب) مسافت پیموده شده در بازه زمانی 6s تا 16s چند متر است؟

۲۴۲ یک خودروی پلیس در کنار جاده ایستاده است، موتورسواری با سرعت ثابت $108 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ از کنار آن می‌گذرد. در همین لحظه، خودروی پلیس

خرداد ۱۴۰۳ ریاضی

با شتاب ثابت $4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ در همان جهت شروع به حرکت می‌کند؛

الف) پس از چه مدت، پلیس به موتورسوار می‌رسد؟

ب) نمودار سرعت - زمان هر دو متحرک را تا لحظه‌ای که سرعت آن‌ها یکسان می‌شود، در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

بانک سؤالات تکمیلی

الف پرسش‌های مفهومی

● درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۲۴۳ حرکت جسمی که روی سطح هموار یک سراشیبی در حال لغزیدن است، حرکت با سرعت ثابت است.

۲۴۴ در حرکت با شتاب ثابت، بیش از یک‌بار جهت حرکت نمی‌تواند تغییر کند.

۲۴۵ در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست و تندشونده، شتاب حرکت می‌تواند منفی باشد.

۲۴۶ در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، سرعت متوسط بین دو لحظه با سرعت در وسط آن دو لحظه برابر است.

● عبارت درست را از داخل پرانتز انتخاب کنید.

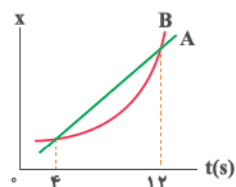
۲۴۷ اگر معادله سرعت - زمان حرکتی تابع درجه دوم از زمان باشد، حرکت با شتاب ثابت - متغیر است.

۲۴۸ در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، تغییرات سرعت نسبت به زمان به صورت یک تابع درجه یک - درجه دوم است.

۲۴۹ اگر نمودار شتاب - زمان در حرکتی، خطی موازی محور زمان باشد، نمودار سرعت - زمان خطی با شیب ثابت - متغیر است.

۲۵۰ اگر سرعت اولیه متحرکی در حرکت با شتاب ثابت منفی باشد، حرکت تندشونده - کندشونده - تندشونده یا کندشونده است.

● به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

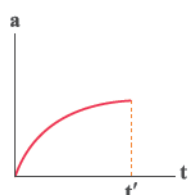


۲۵۱ نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که در امتداد محور x حرکت می‌کنند، مطابق شکل مقابل است. بزرگی

سرعت متحرک B در چه لحظه‌ای برابر بزرگی سرعت متحرک A است؟ (نمودار B قسمتی از یک سهمی است.)

برگرفته از تمرین کتاب درسی

۲۵۲ متحرکی در لحظه شروع حرکت با شتاب ثابت و منفی از مکان $x_0 = -20\text{m}$ با تندی اولیه در جهت محور حرکت می‌کند. اگر در لحظه $t = 4\text{s}$



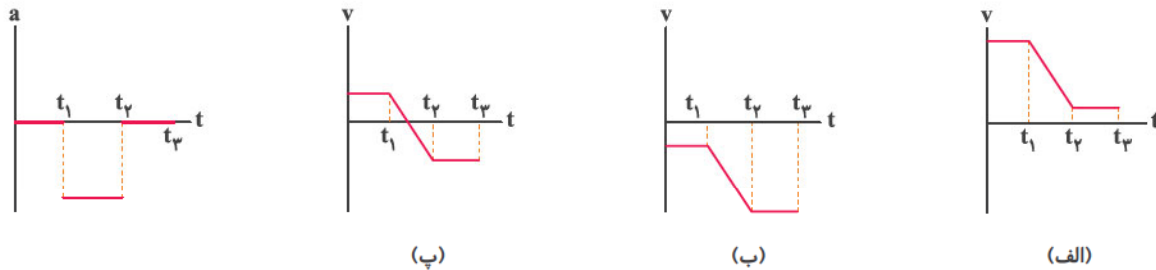
و در مبدأ مکان، جهت حرکت آن تغییر کند، نمودارهای مربوط به حرکت آن را رسم کنید.

۲۵۳ نمودار شتاب - زمان حرکت جسمی مطابق شکل است. نوع حرکت جسم را در مدت زمان نشان داده شده

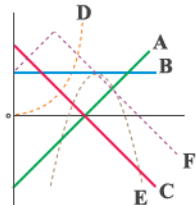
تا لحظه t' مشخص کنید.

۲۵۴ نمودار شتاب - زمان یک متحرک که در امتداد محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. توضیح دهید چگونه هر یک از نمودارهای

سرعت - زمان شکل‌های (الف)، (ب) و (پ) می‌تواند متناظر با این نمودار شتاب - زمان باشد؟



۲۵۵ شکل روبه‌رو چند نمودار را با محورهای بدون علامت نشان می‌دهد:



الف) کدام نمودار سرعت برحسب زمان را برای جسمی که با سرعت ثابت و در امتداد محور x در حرکت است، بهتر نشان می‌دهد؟

ب) کدام نمودار مکان برحسب زمان را برای جسمی که با شتاب ثابت و منفی و در امتداد محور x در حرکت است، بهتر نشان می‌دهد؟

پ) اگر نمودار E مکان برحسب زمان را نشان دهد، کدام نمودار سرعت برحسب زمان آن را بهتر نشان می‌دهد؟

مسائل ب

۲۵۶ معادله حرکت جسمی روی خط راست در SI با رابطه $x = 2t^2 - 4t + 1$ بیان می‌شود؛

الف) بردار مکان جسم را در لحظه $t = 2s$ روی محور x نشان دهید.

ب) نمودار مکان - زمان آن را رسم کنید.

پ) سرعت متوسط متحرک را در بازه زمانی $t_1 = 2s$ تا $t_2 = 4s$ به دست آورید.

ت) باتوجه به نمودار مکان - زمان تعیین کنید در چه لحظه‌ای سرعت متحرک صفر است؟

۲۵۷ متحرکی روی محور x حرکت می‌کند و معادله سرعت - زمان آن در SI به صورت $v = -3t + 24$ است. اگر متحرک در مبدأ زمان، از مکان

$x = +18m$ عبور کند، در چه لحظه (لحظه‌هایی) از مکان $x = +90m$ عبور می‌کند؟

۲۵۸ معادله مکان - زمان یک متحرک که در امتداد محور x حرکت می‌کند در SI به صورت $x = 3t^2 - 12t + 8$ است؛

الف) معادله سرعت - زمان آن را در SI بنویسید.

ب) نمودار سرعت - زمان آن را در ۵ ثانیه اول حرکت رسم کنید.

پ) تندی متوسط آن در ۵ ثانیه اول حرکت، چند متر بر ثانیه است؟

ت) در چه لحظه‌ای متحرک مجدداً به مکان اولیه خود برمی‌گردد؟

۲۵۹ دو خودرو روی خط راست از حال سکون با شتاب‌های a و $\frac{a}{4}$ هم‌زمان از یک نقطه به سوی مقصدی معین به حرکت درمی‌آیند و با فاصله

زمانی ۴ ثانیه به مقصد می‌رسند. زمان حرکت جسمی که زودتر به مقصد می‌رسد، چند ثانیه است؟ ($\sqrt{2} = 1/4$)

۲۶۰ متحرکی روی خط راست با شتاب ثابت حرکت می‌کند. در مکان $x_1 = +20m$ تندی متحرک $5m/s$ و در مکان $x_2 = +30m$ ، تندی متحرک

$15m/s$ است. تندی متحرک در مکان $x_3 = +40m$ چند متر بر ثانیه است؟

۲۶۱ مطابق شکل خودرویی از مبدأ محور ($x = 0$) و از حال سکون با شتاب ثابت

$2m/s^2$ در جهت محور حرکت می‌کند. پس از مدت زمان $4s$ به طور ناگهانی شتاب

خود را به $2m/s^2$ در خلاف جهت محور می‌رساند و به مدت $6s$ دیگر حرکت می‌کند.

در پایان این مدت زمان، فاصله خودرو از مکان $x = +30m$ به چند متر می‌رسد؟

۲۶۲ خودرویی در یک مسیر مستقیم حرکت می‌کند. در ۵ ثانیه اول حرکت، سرعت آن ثابت است. در ۴ ثانیه بعدی، سرعتش را با شتاب ثابت

کاهش داده تا متوقف شود. اگر کل مسافت پیموده‌شده در این دو مرحله برابر $49m$ باشد، بیشینه سرعت خودرو در این مدت زمان

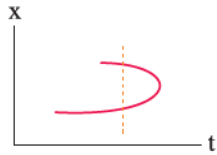
چند متر بر ثانیه است؟



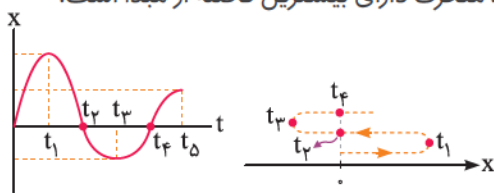
پاسخ‌های تشریحی



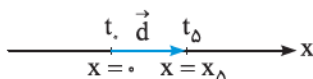
جابه‌جایی
خط راست
در نمودار مکان - زمان شکل (الف)، در یک لحظه، متحرک
در دو مکان مختلف قرار می‌گیرد که امکان‌پذیر نیست.
توجه نمودار مکان - زمان باید مشخص‌کننده
یک تابع باشد. یعنی هنگامی که بر روی نمودار، خطوطی
عمودی بر محور زمان رسم کنیم،
هر خط نمودار را فقط در یک
نقطه قطع کند. در این صورت
نمودار (ب) جواب است.



الف) با توجه به نمودار مکان - زمان داده‌شده، می‌توان دریافت
در دو لحظه t_2 و t_4 ، متحرک از مبدأ مکان عبور کرده است.
ب) در دو لحظه t_1 و t_3 ، جهت حرکت تغییر کرده است.
پ) در سه بازه زمانی $(0 - t_1)$ ، $(t_2 - t_3)$ و $(t_4 - t_5)$ ، متحرک
در حال دور شدن از مبدأ است.
الف) با توجه به شکلی مسیر حرکت، می‌توان نتیجه گرفت در
لحظه t_1 ، متحرک دارای بیشترین فاصله از مبدأ است.



ب) از لحظه t_1 تا لحظه t_3 ، متحرک در خلاف جهت محور x
حرکت می‌کند.
پ) در لحظه‌های t_2 و t_4 (به جز لحظه صفر)، متحرک از مبدأ
عبور می‌کند.
ت) در دو لحظه t_1 و t_3 ، جهت حرکت تغییر می‌کند.
ث) متحرک از لحظه t_1 تا لحظه t_5 از مکان $x = 0$ به مکان
فرضی $x = x_5$ در مکان‌های مثبت رسیده است، پس در
این بازه زمانی، جابه‌جایی در جهت محور x است. (مسیر
حرکت تأثیری در این جابه‌جایی ندارد.)



فصل ۱ حرکت بر خط راست

۱ نادرست - برداری که مبدأ محور را به مکان جسم در هر لحظه
وصل می‌کند، بردار مکان نام دارد.

۲ درست
۳ نادرست - طول مسیر پیموده‌شده توسط یک متحرک،
مسافت نامیده می‌شود.

۴ نادرست - بردار جابه‌جایی، برداری است که مکان آغازین را
به مکان پایانی وصل می‌کند و مستقل از مبدأ محور است.

۵ نادرست - بردار سرعت متوسط، همسو (هم‌جهت) با بردار
جابه‌جایی است.

۶ نادرست - تندی متوسط، یک کمیت نرده‌ای است.

۷ نادرست - تندی متوسط برابر با نسبت مسافت به زمان
است.

۸ درست

۹ درست

۱۰ درست

۱۱ هم‌جهت - سرعت متوسط از رابطه $\vec{v}_{av} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$ تعریف می‌شود.
در این صورت سرعت متوسط همواره با بردار جابه‌جایی آن
 $(\Delta \vec{x})$ ، هم‌جهت است.

۱۲ تندی متوسط - اگر جسم روی خط مستقیم بدون تغییر جهت
حرکت کند، مسافت پیموده‌شده با اندازه جابه‌جایی آن برابر
است. در این صورت بنابر رابطه محاسبه سرعت متوسط و
تندی متوسط می‌توان نتیجه گرفت، در هر بازه زمانی اندازه
سرعت متوسط با تندی متوسط برابر است:

$$s_{av} = \frac{1}{\Delta t}, |v_{av}| = \frac{|\Delta x|}{\Delta t} \xrightarrow{1=|\Delta x|} s_{av} = |v_{av}|$$

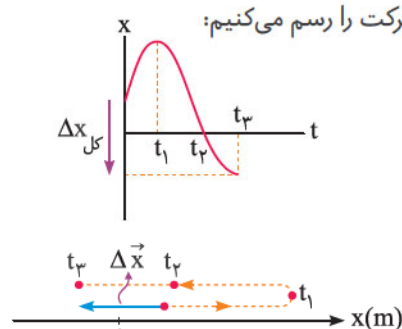
۱۳ کمتر - اگر جسم روی خط مستقیم، تغییر جهت دهد، مسافت
پیموده‌شده از اندازه جابه‌جایی بزرگ‌تر خواهد بود؛ بنابراین در
این بازه، اندازه سرعت متوسط کمتر از تندی متوسط است.

$$1 > |\Delta x|, s_{av} = \frac{1}{\Delta t}, |v_{av}| = \frac{|\Delta x|}{\Delta t} \\ \Rightarrow \frac{s_{av}}{|v_{av}|} = \frac{1}{|\Delta x|} > 1 \Rightarrow s_{av} > |v_{av}|$$

۱۴ کمتر از - اگر جسم بر مسیر مستقیم تغییر جهت دهد، اندازه
جابه‌جایی جسم کمتر از مسافت پیموده‌شده توسط آن است.

۲۰

الف) با توجه به نمودار مکان - زمان داده شده، ابتدا شکل مسیر حرکت را رسم می‌کنیم:



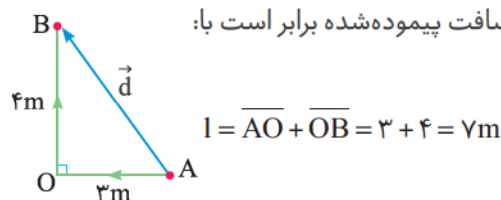
بنابراین می‌توان نتیجه گرفت در لحظه t_1 متحرک بیشترین فاصله را از مبدأ دارد.

ب) بردار جابه‌جایی، مکان ابتدایی حرکت را به مکان نهایی آن وصل می‌کند. در این صورت مطابق شکل، جابه‌جایی در **خلاف جهت محور x** است.

پ) **یک مرتبه** و در لحظه t_1 جهت حرکت جسم تغییر کرده است. ت) بین دو لحظه t_1 و t_2 متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ است.

ث) در لحظه t_2 متحرک از مبدأ عبور می‌کند.

مسافت با طول مسیر پیموده شده بین دو نقطه برابر است، پس مسافت پیموده شده برابر است با:

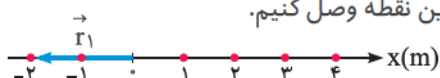


جابه‌جایی، مستقل از مسیر حرکت است. کافی است پاره خط جهت‌داری از نقطه A تا نقطه B رسم کنیم. اندازه این پاره خط با اندازه جابه‌جایی انجام شده برابر است. با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$d = \sqrt{(AO)^2 + (OB)^2} \Rightarrow d = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5m$$

همان‌طور که دیده می‌شود، اندازه جابه‌جایی جسم در این حرکت، کوچک‌تر از مسافت طی شده توسط آن است.

الف) در لحظه $t_1 = 1s$ متحرک در مکان $x = -2m$ قرار دارد. برای رسم بردار مکان، کافی است مبدأ محور ($x = 0$) را به این نقطه وصل کنیم.



ب) برای تعیین سرعت متوسط در این بازه زمانی کافی است ابتدا جابه‌جایی انجام شده بین دو لحظه را بدون در نظر گرفتن مسیر حرکت مشخص کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} t_1 = 1s \Rightarrow x_1 = -2m \\ t_2 = 4s \Rightarrow x_2 = 4m \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = 4 - (-2) = 6m$$

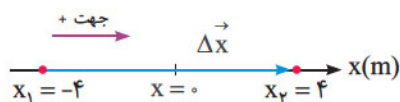
اکنون با استفاده از رابطه سرعت متوسط داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{6}{4-1} = 2m/s$$

۲۱

۲۲

الف) مطابق شکل، متحرک روی خط راست و در جهت محور جابه‌جا شده است.

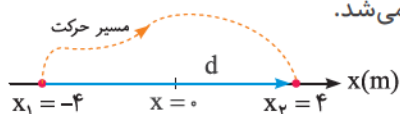


ب) بزرگی سرعت متوسط در این مدت برابر است با:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4 - (-4)}{8} = 1m/s$$

پ) در این مدت چون متحرک روی خط راست و بدون تغییر جهت حرکت کرده است، مطابق شکل، اندازه جابه‌جایی و مسافت پیموده شده توسط آن با هم برابر است، در این صورت داریم:

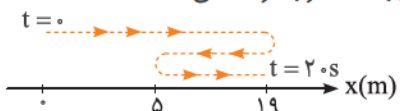
توجه اگر جسم در این مدت بر مسیر منحنی حرکت می‌کرد، مسافت پیموده شده از اندازه جابه‌جایی آن بزرگ‌تر می‌شد.



$$l > d \Rightarrow l > 8m$$

الف) بیشترین فاصله دوچرخه‌سوار از مبدأ $x = +19m$ است.

ب) بین دو لحظه $t_1 = 4s$ تا $t_2 = 12s$ ، دوچرخه‌سوار در **خلاف جهت محور حرکت می‌کند.**



پ) طول مسیر پیموده شده با مسافت برابر است. با توجه به شکل، مسافت پیموده شده برابر است با:

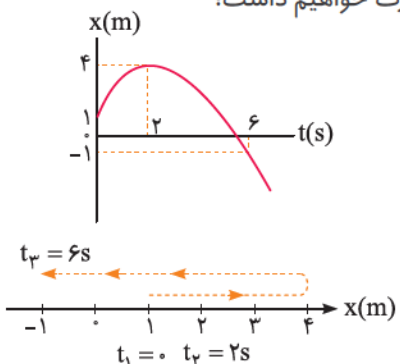
$$l = (19 - 0) + 2(19 - 5) = 19 + 28 = 47m$$

ت) با استفاده از رابطه محاسبه سرعت متوسط داریم:

$$\left. \begin{array}{l} t_1 = 4s \Rightarrow x_1 = 19m \\ t_2 = 12s \Rightarrow x_2 = 19m \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta x = 0$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{av} = 0$$

الف) با توجه به نمودار مکان - زمان داده شده، ابتدا مسیر حرکت مورچه، روی محور x را مشخص می‌کنیم. این صورت خواهیم داشت:



۲۲

۲۵

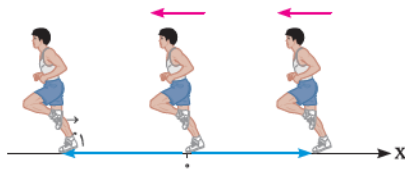
نادرست - اگر تندی متوسط جسم صفر باشد، یعنی جسم ساکن بوده است.

نادرست - نمودار مکان-زمان، مشخص‌کننده تغییرات مکان برحسب زمان است و شکل مسیر حرکت را مشخص نمی‌کند. ثابت می‌ماند

افزایش

می‌تواند (در صورتی که جسم روی خط راست حرکت کرده و جهت حرکت آن تغییر کند، تندی متوسط از اندازه سرعت متوسط بزرگ‌تر است).

مثبت یا منفی - اگر متحرکی روی خط راست و در خلاف جهت محور حرکت کند، بردار مکان آن می‌تواند مثبت یا منفی باشد. به شکل زیر دقت کنید:



کاهش

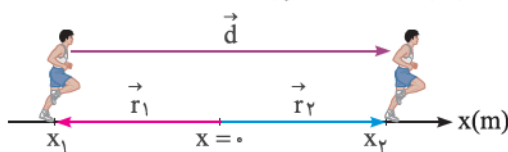
برابر

بزرگ‌تر از

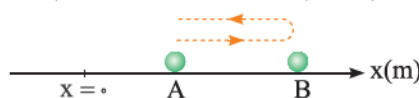
منفی

کوچک‌تر

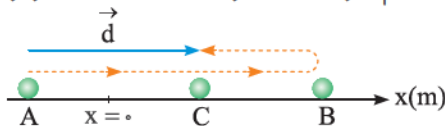
نادرست - اگر متحرک در جابه‌جایی بین دو نقطه روی خط راست تغییر جهت نداشته باشد، مسافت با اندازه جابه‌جایی برابر است. در شکل زیر این شرط بررسی شده است اما باید توجه داشت که بردار مکان ابتدا در جهت منفی محور و پس از آن در جهت مثبت محور است.



نادرست - در مسیر نشان داده شده روی محور x، جهت حرکت متحرک تغییر کرده است، اما جهت بردار مکان ثابت است (متحرک همواره در مکان‌های مثبت قرار دارد).



نادرست - سرعت متوسط همواره در جهت جابه‌جایی است، پس نمی‌تواند جهت حرکت در هر لحظه را مشخص کند. برای نمونه در مسیر نشان داده شده، جسمی از مکان A تا مکان C روی محور جابه‌جا شده است. جابه‌جایی جسم در جهت محور بوده، بنابراین سرعت متوسط نیز در جهت محور است، اما جهت حرکت جسم با توجه به مسیر نشان داده شده تغییر کرده است.



در لحظه $t_2 = 2s$ ، مورچه بیشترین فاصله از مبدأ مختصات ($x = 0$) را دارد.

ب) با استفاده از رابطه سرعت متوسط داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{-1 - (+1)}{6 - 0} = -\frac{1}{3} \text{ m/s}$$

پ) با توجه به شکل مسیر حرکت مورچه، در مکان $x = +4m$ و در لحظه $t = 2s$ ، جهت حرکت مورچه تغییر کرده است. الف) با توجه به نمودار مشخص می‌شود در دو لحظه $t_1 = 3s$ و $t_2 = 12s$ ، فاصله متحرک از مبدأ $x = 18m$ است.

ب) با توجه به شکل مسیر، مسافت پیموده شده برابر است با:



$$l = (36 - 0) + (36 - 18) = 36 + 18 = 54m$$

پ) با استفاده از رابطه محاسبه سرعت متوسط داریم:

$$\left. \begin{aligned} t_1 = 0 &\Rightarrow x_1 = 0 \\ t_2 = 9s &\Rightarrow x_2 = 36m \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta x = 36m$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{36}{9} = 4 \text{ m/s}$$

الف) با توجه به نمودار، در لحظه $t = 8s$ ، متحرک بیشترین فاصله از مبدأ محور ($x = 0$) را دارد.

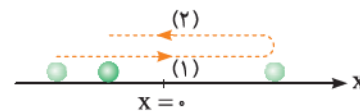
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{16 - 9}{8 - 6} = 3.5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{ب)}$$

پ) چون متحرک روی خط راست و بدون تغییر جهت حرکت کرده است، مسافت پیموده شده با جابه‌جایی برابر می‌شود:

$$l = \Delta x_{(0,8)} = 16 - 0 = 16m$$

نادرست - معادله‌ای که مکان جسم را در هر لحظه مشخص می‌کند، معادله مکان-زمان نامیده می‌شود.

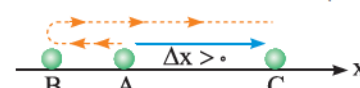
درست - به تعداد دفعاتی که جسم از مبدأ محور ($x = 0$) عبور می‌کند، بردار مکان تغییر جهت می‌دهد.

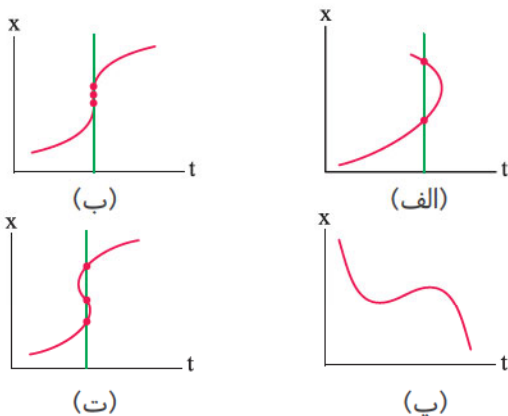


نادرست - اگر سرعت متوسط متحرکی صفر باشد، جابه‌جایی آن برابر صفر است. در این صورت ممکن است جسم دوباره به مکان اولیه خود بازگشته باشد و در این حالت، تندی متوسط آن صفر نیست.



نادرست - سرعت متوسط در جهت جابه‌جایی است. جابه‌جایی جسم در کل مسیر می‌تواند در جهت محور x باشد، اما بازه‌هایی جسم می‌تواند در خلاف جهت محور حرکت کرده باشد.





الف) درست - همواره بین دو لحظه‌ای که جهت بردار مکان (علامت x) تغییر می‌کند، جابه‌جایی و سرعت متوسط صفر است. (ب) نادرست - در لحظه‌های t_1 و t_3 ، به ترتیب جهت حرکت متحرک برای اولین بار و دومین بار تغییر می‌کند. طبق نمودار، متحرک بین این دو لحظه در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. (پ) نادرست - در لحظه‌های t_2 و t_4 ، جهت بردار مکان (علامت x) تغییر می‌کند. طبق نمودار، در این مدت متحرک در مکان‌های منفی ($x < 0$) حضور دارد؛ یعنی بین دو لحظه t_2 و t_4 ، بردار مکان متحرک در خلاف جهت محور x است. **توجه** دقت کنید در بازه زمانی بین دو لحظه t_2 و t_4 که جهت بردار مکان برای دومین بار و سومین بار تغییر می‌کند، بردار مکان متحرک در جهت محور x است.

الف) ابتدا لحظه‌هایی که متحرک از مبدأ مکان می‌گذرد را محاسبه می‌کنیم:

$$x = t^2 - 8t + 15 = 0 \Rightarrow (t - 3)(t - 5) = 0 \Rightarrow t_1 = 3s, t_2 = 5s$$

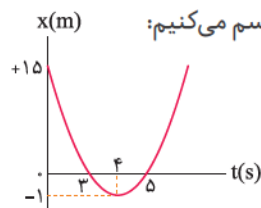
اکنون مکان متحرک در لحظه‌های $t_2 = 5s$ و $t_3 = 9s$ را به دست می‌آوریم:

$$t_3 = 9s \Rightarrow x_3 = 81 - 72 + 15 = 24m$$

و در نهایت سرعت متوسط آن را محاسبه می‌کنیم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{24 - 0}{9 - 5} = 6 \frac{m}{s}$$

ب) در لحظه‌هایی که متحرک از مبدأ محور می‌گذرد، جهت بردار مکان آن (علامت x) تغییر می‌کند. پس در لحظه‌های $t_1 = 3s$ و $t_2 = 5s$ ، جهت بردار مکان متحرک تغییر می‌کند. برای محاسبه مسافت پیموده شده توسط متحرک در این بازه زمانی، نمودار مکان - زمان آن را رسم می‌کنیم:



$$t_s = 4s \Rightarrow x_s = 16 - 32 + 15 \Rightarrow x_s = -1m$$

$$l(3, 5) = 1 + 1 = 2m$$

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{2}{2} = 1 \frac{m}{s}$$

درست - اگر دو متحرک از کنار هم عبور کنند، در آن لحظه، مکان دو متحرک یکسان است.

اگر سرعت متوسط جسمی در یک بازه زمانی صفر باشد، مکان اولیه و مکان نهایی آن بر هم منطبق هستند. در این حالت جسم می‌تواند مسیری را بین این دو نقطه پیموده باشد، بنابراین تندی متوسط آن می‌تواند مخالف صفر باشد. اما اگر جسم در این بازه زمانی ساکن باشد، در این حالت تندی متوسط آن صفر می‌شود.

اگر تندی متوسط جسم صفر باشد، یعنی متحرک در آن بازه زمانی ساکن است. پس سرعت متوسط آن نیز در آن بازه زمانی صفر است، چون جسم تغییر مکان نداده است.

مکان ابتدایی و نهایی متحرک مشخص شده است. در این صورت، می‌توان جابه‌جایی آن را تعیین کرد؛ اما مسیر حرکت متحرک مشخص نمی‌باشد، بنابراین نمی‌توان مسافت پیموده شده توسط متحرک را مشخص کرد. البته می‌دانیم، مسافت پیموده شده، همواره بزرگ‌تر یا مساوی اندازه جابه‌جایی انجام شده است.

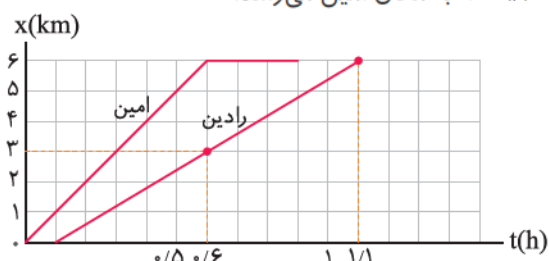
$$\Delta x = x_2 - x_1 = 10 - (-4) = 14m$$

$$l \geq |\Delta x| \Rightarrow l \geq 14m$$

الف) با توجه به نمودار مشخص می‌شود در لحظه $(t = 0)$ ، امین شروع به حرکت کرده است، اما رادین پس از $0.1h$ شروع به حرکت کرده است (هر واحد روی محور زمان برابر $0.1h$ است).

ب) با توجه به نمودارهای مکان - زمان داده شده، می‌توان نتیجه گرفت امین به مدت $0.6h$ حرکت کرده است. در این مدت مشخص می‌شود که رادین به اندازه $3km$ جابه‌جا شده است.

پ) پس از لحظه $t = 0.6h$ امین حرکت نمی‌کند (ساکن شده است)، اما رادین در حال حرکت می‌باشد و در لحظه $t = 1.1h$ به مکان امین می‌رسد.



با توجه به نمودارها، تنها نمودار قسمت (پ) می‌تواند مربوط به حرکت یک متحرک باشد. زیرا در نمودار شکل‌های (الف)، (ب) و (ت) در یک لحظه متحرک در بیش از یک نقطه قرار می‌گیرد که امکان‌پذیر نیست.

در مسیر (۲) نیز می‌توان نوشت:

$$s_{av_2} = 10.8 \text{ km/h} \times \frac{1}{3.6} = 3 \text{ m/s}$$

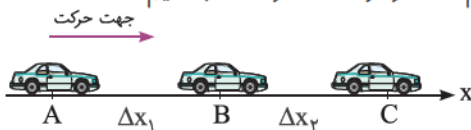
$$s_{av} = \frac{1}{\Delta t} \Rightarrow 3 = \frac{\overline{AB}}{\Delta t_2} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{\overline{AB}}{3}$$

برای تعیین تندی متوسط در کل مدت زمان حرکت، با توجه به شکل مسیر می‌توان نوشت:

$$s_{av_T} = \frac{l_T}{\Delta t_T} \Rightarrow s_{av_T} = \frac{2\overline{AB}}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{2\overline{AB}}{\frac{\overline{AB}}{2} + \frac{\overline{AB}}{3}}$$

$$s_{av_T} = \frac{2\overline{AB}}{\frac{5\overline{AB}}{6}} = \frac{12}{5} = 2.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

خودرو در یک جهت حرکت کرده است؛ پس برای تعیین سرعت متوسط آن در کل مسیر حرکت، کافی است جابه‌جایی‌های انجام‌شده در دو قسمت را حساب کنیم:



$$v_{av_1} = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} \Rightarrow 5 = \frac{\Delta x_1}{2 \times 60} \Rightarrow \Delta x_1 = 600 \text{ m}$$

$$v_{av_2} = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} \Rightarrow 2 = \frac{\Delta x_2}{3 \times 60} \Rightarrow \Delta x_2 = 360 \text{ m}$$

اکنون با توجه به رابطه محاسبه سرعت متوسط خواهیم داشت:

$$v_{av} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{600 + 360}{120 + 180} = \frac{960}{300} = 3.2 \text{ m/s}$$

در کل مسیر رفت و برگشت، جابه‌جایی متحرک صفر است، بنابراین سرعت متوسط آن نیز صفر می‌شود.

برای محاسبه تندی متوسط کل، ابتدا به کمک تندی متوسط در مسیرهای رفت و برگشت، مدت زمان رفت و برگشت شناگر را

محاسبه می‌کنیم:

$$s_{av_1} = \frac{l_1}{\Delta t_1} \Rightarrow 4 = \frac{40}{\Delta t_1} \Rightarrow \Delta t_1 = 10 \text{ s}$$

$$s_{av_2} = \frac{l_2}{\Delta t_2} \Rightarrow 2 = \frac{40}{\Delta t_2} \Rightarrow \Delta t_2 = 20 \text{ s}$$

$$s_{av_{\text{کل}}} = \frac{l_{\text{کل}}}{\Delta t_{\text{کل}}} = \frac{40 + 40}{10 + 20} = \frac{8}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ابتدا به کمک رابطه سرعت متوسط، مدت زمان حرکت متحرک را در سه مرحله محاسبه می‌کنیم. توجه کنید که در قسمت سوم متحرک برمی‌گردد، یعنی جابه‌جایی و سرعت متوسط آن منفی می‌شود.

$$v_{av_1} = \frac{d_1}{\Delta t_1} \Rightarrow 4 = \frac{40}{\Delta t_1} \Rightarrow \Delta t_1 = 10 \text{ s}$$

$$v_{av_2} = \frac{d_2}{\Delta t_2} \Rightarrow 3 = \frac{30}{\Delta t_2} \Rightarrow \Delta t_2 = 10 \text{ s}$$

$$v_{av_3} = \frac{d_3}{\Delta t_3} \Rightarrow -1 = \frac{-5}{\Delta t_3} \Rightarrow \Delta t_3 = 5 \text{ s}$$

$$\Rightarrow \Delta t_{\text{کل}} = 10 + 10 + 5 = 25 \text{ s}$$

پ) طبق نمودار مکان - زمان رسم‌شده در سؤال قبل، در بازه

زمانی صفر تا ۴s متحرک در خلاف جهت محور x حرکت کرده

$$\Delta \vec{x}_{(4,0)} = (-1 - 15) \vec{i} = (-16 \text{ m}) \vec{i}$$

الف) با توجه به مشخص بودن مکان‌های ابتدایی و نهایی

متحرک و استفاده از رابطه محاسبه سرعت متوسط می‌توان

نوشت:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t} = \frac{20 \vec{i} - (-10) \vec{i}}{7 - 2} = \left(\frac{30}{5} \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \vec{i}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{av} = (6 \text{ m/s}) \vec{i}$$

ب) سرعت متوسط در جهت جابه‌جایی متحرک قرار دارد.

سرعت متوسط متحرک در جهت محور است، پس می‌توان

نتیجه گرفت، متحرک در جهت محور جابه‌جا شده است.

پ) مکان اولیه و نهایی متحرک مشخص شده است، اما

مسیر حرکت مشخص نیست. ممکن است جهت حرکت

متحرک در این جابه‌جایی تغییر کرده باشد، در این صورت

مسافت طی‌شده از اندازه جابه‌جایی آن بزرگ‌تر شده و تندی

متوسط از اندازه سرعت متوسط بیشتر می‌شود، پس تندی

متوسط در رابطه زیر می‌تواند قرار گیرد:

$$s_{av} \geq |v_{av}| \Rightarrow s_{av} \geq 6 \text{ m/s}$$

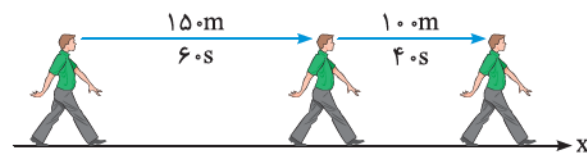
$$v_{av} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{50 - (-30)}{20 - 0} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{av} = \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \vec{i}$$

متحرک روی خط راست و بدون تغییر جهت، حرکت کرده

است؛ بنابراین تندی متوسط آن با اندازه سرعت متوسط

برابر می‌شود.



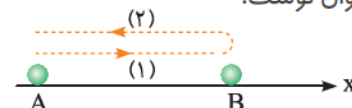
$$s_{av} = v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{d_1 + d_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{150 + 100}{60 + 40} = \frac{250}{100}$$

$$\Rightarrow s_{av} = 2.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

اگر مسیر حرکت خودرو در جابه‌جایی بین دو شهر، AB

در نظر گرفته شود، در مسیر (۱) با توجه به تندی متوسط

خودرو می‌توان نوشت:



$$s_{av_1} = 72 \text{ km/h} \times \frac{1}{3.6} = 20 \text{ m/s}$$

$$s_{av} = \frac{1}{\Delta t} \Rightarrow 20 = \frac{\overline{AB}}{\Delta t_1} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{\overline{AB}}{20}$$

۵۸

۵۹

۶۰

۵۴

۵۵

۵۶

۵۷

حال با توجه به شکل، طول مسیر حرکت که با مسافت پیموده شده برابر است را حساب می‌کنیم:

$$l = \Delta y + \Delta x = 100 + 200 = 300 \text{ m}$$

پس تندی متوسط در این بازه زمانی برابر است با:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{300}{15} = 20 \text{ m/s}$$

برای محاسبه اندازه سرعت متوسط، ابتدا اندازه جابه‌جایی انجام شده (d) را حساب کنیم:

$$d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(200)^2 + (100)^2} = 100\sqrt{5} \text{ m}$$

$$v_{av} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{100\sqrt{5}}{15} = \frac{20\sqrt{5}}{3} \text{ m/s}$$

اگر متحرکی هنگام حرکت از مبدأ محور ($x=0$) عبور کند، بردار مکان تغییر جهت می‌دهد. پس کافی است معادله حرکت جسم را برابر صفر قرار دهیم.

$$x=0 \Rightarrow t^2 - t - 6 = 0 \Rightarrow (t-3)(t+2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 3 \text{ s} \quad \checkmark \\ t = -2 \text{ s} \quad \times \text{ (مبدأ زمان } t=0 \text{ است)} \end{cases}$$

بنابراین بردار مکان، در هنگام حرکت، یک بار و در لحظه $t = 3 \text{ s}$ ، تغییر جهت می‌دهد.

برای مشخص کردن سرعت متوسط در ثانیه سوم ($t_1 = 2 \text{ s}$ تا $t_2 = 3 \text{ s}$)، کافی است ابتدا مکان جسم در دو لحظه مشخص شده را حساب کنیم:

$$x = 2t^2 + 4t \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \text{ s} \Rightarrow x_1 = 2(2)^2 + 4(2) = 16 \text{ m} \\ t_2 = 3 \text{ s} \Rightarrow x_2 = 2(3)^2 + 4(3) = 30 \text{ m} \end{cases}$$

اکنون با استفاده از رابطه محاسبه سرعت متوسط داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{30 - 16}{3 - 2} = 14 \text{ m/s}$$

به دلیل آن که جهت حرکت جسم تغییر نمی‌کند، تندی متوسط و اندازه سرعت متوسط باهم برابر هستند. در این صورت برای محاسبه تندی متوسط می‌توان اندازه سرعت متوسط متحرک را در ۳ ثانیه اول حرکت حساب کرد، بنابراین:

$$t_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$t_2 = 3 \text{ s} \Rightarrow x_2 = 2(3)^2 + 4(3) = 30 \text{ m}$$

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{30 - 0}{3 - 0} = 10 \text{ m/s}$$

بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{v_{av}}{s_{av}} = \frac{14}{10} = 1/4$$

حالا مسافت و جابه‌جایی کل متحرک را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x_{\text{کل}} = d_1 + d_2 + d_3 = 40 + 30 + 5 = 75 \text{ m}$$

$$l_{\text{کل}} = d_1 + d_2 + |d_3| = 40 + 30 + 5 = 75 \text{ m}$$

و در نهایت سرعت متوسط و تندی متوسط آن را محاسبه می‌کنیم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x_{\text{کل}}}{\Delta t_{\text{کل}}} = \frac{75}{25} = 3 \text{ m/s}$$

$$s_{av} = \frac{l_{\text{کل}}}{\Delta t_{\text{کل}}} = \frac{75}{25} = 3 \text{ m/s}$$

ابتدا جابه‌جایی انجام شده توسط متحرک بین دو لحظه $t_1 = 2 \text{ s}$ تا $t_2 = 4 \text{ s}$ را حساب می‌کنیم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow -4 = \frac{\Delta x}{4 - 2} \Rightarrow \Delta x = -8 \text{ m}$$

$$\Rightarrow x_4 - x_2 = -8 \text{ m}$$

جابه‌جایی انجام شده توسط متحرک بین دو لحظه $t_2 = 4 \text{ s}$ و $t_3 = 7 \text{ s}$ را نیز حساب می‌کنیم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x'}{\Delta t} \Rightarrow 10 = \frac{\Delta x'}{3} \Rightarrow \Delta x' = 30 \text{ m}$$

$$\Rightarrow x_7 - x_4 = 30 \text{ m}$$

اکنون جابه‌جایی بین دو لحظه $t_1 = 2 \text{ s}$ و $t_3 = 7 \text{ s}$ را حساب می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} x_7 - x_4 &= 30 \\ x_4 - x_2 &= -8 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{+} x_7 - x_2 = 22 \Rightarrow \Delta x = 22 \text{ m}$$

پس سرعت متوسط در این بازه زمانی برابر است با:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{22}{5} = 4/4 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{av} = (4/4 \text{ m/s}) \vec{i}$$

علامت سرعت متوسط، مثبت است و سرعت متوسط همواره در جهت جابه‌جایی است، پس علامت جابه‌جایی نیز مثبت بوده و متحرک در جهت محور جابه‌جا شده است. ابتدا جابه‌جایی‌های انجام شده توسط متحرک در دو راستای x و y را مشخص می‌کنیم:

در راستای محور x :

$$v_{av} = 20 \text{ m/s} \text{ و } v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow 20 = \frac{\Delta x}{10} \Rightarrow \Delta x = 200 \text{ m}$$

در راستای محور y :

$$v_{av} = 20 \text{ m/s} \text{ و } v_{av} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \Rightarrow 20 = \frac{\Delta y}{10} \Rightarrow \Delta y = 100 \text{ m}$$

