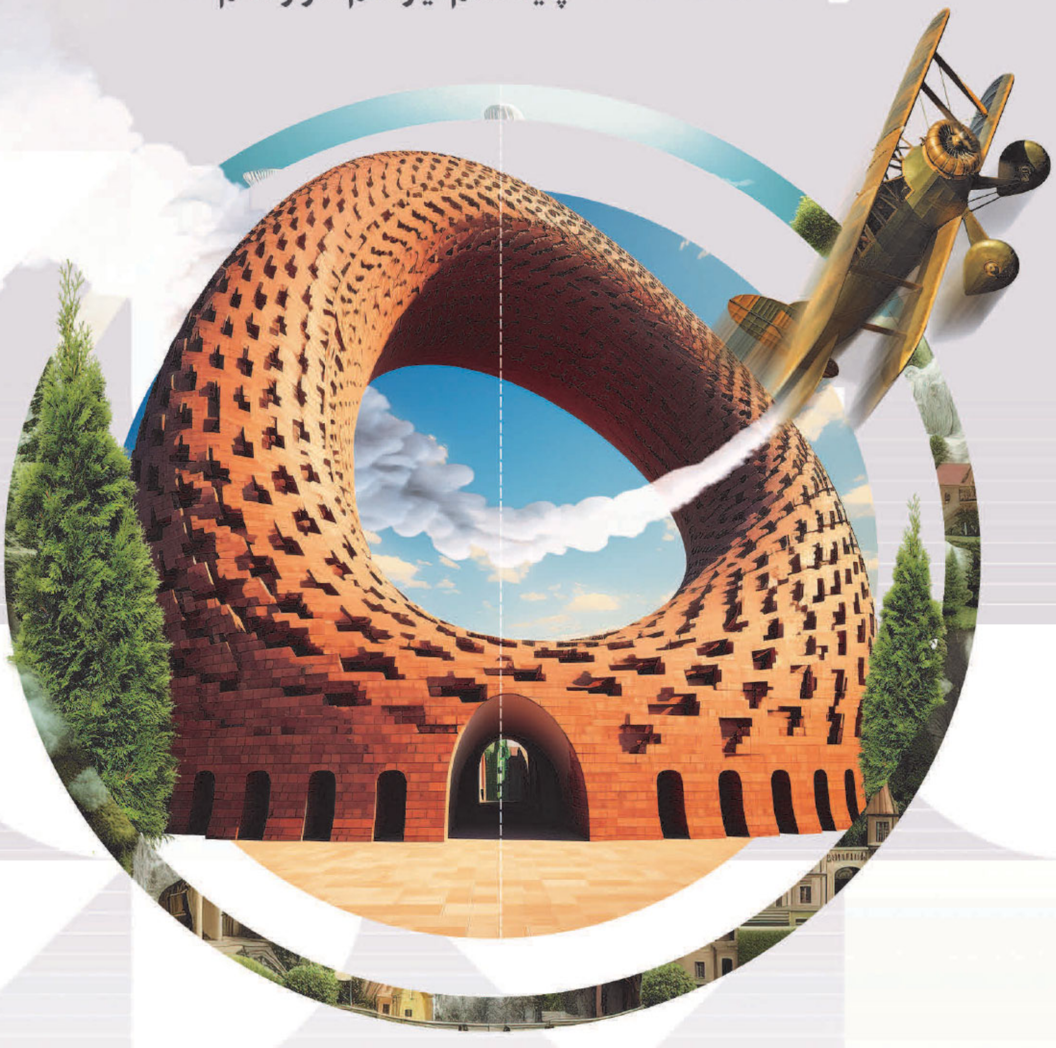
انتشارات بین‌المللی گاج

مجموعه کتاب‌های میکرو قرن جدید

حسابان جامع میکرو

• ویژه رشته ریاضی و فیزیک • کنکور

پایه دهم، یازدهم، دوازدهم



۲۷۰۰ تست جدید و متنوع برای ۱۰۰ زدن کنکور

+ ۴۲ ساعت فیلم آموزشی

مؤلفان:
مهندس حبیب شفیعی،
مهندس مجید رفعتی.

مجموعه کتاب‌های فرمول بیست
ویژه ارتقا و ترمیم معدل نهایی

9 786220 308768

فهرست مطالب

فصل

تابع

درس اول: مفهوم تابع، دامنه، تساوی دو تابع و برد

مفهوم تابع

تعریف زوج مرتب: به هر دوتایی که برای آن‌ها ترتیبی در نظر گرفته شود، زوج مرتب می‌گوییم. زوج مرتب a و b را با نماد (a,b) نشان می‌دهیم که در آن a مؤلفهٔ اول و b مؤلفهٔ دوم می‌باشد. دو زوج مرتب (a,b) و (c,d) را مساوی گوییم، هرگاه $a=c$ و $b=d$ باشد.

تعریف رابطه: به مجموعهٔ دلخواهی از زوج مرتب‌ها که مؤلفهٔ اول آن‌ها از مجموعهٔ A و مؤلفهٔ دوم آن‌ها از مجموعهٔ B انتخاب شود، رابطه‌ای از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B گفته می‌شود که به صورت $R:A\to B$ نمایش داده می‌شود.

تعریف تابع: یک تابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B را نسبت می‌دهد. به طور کلی، اگر f تابعی از مجموعهٔ A به B باشد، می‌نویسیم: $f:A\to B$.

هر تابع سه عامل مهم دارد: ۱- دامنه ۲- هم‌دامنه ۳- قانونی که نحوهٔ ارتباط بین اعضای مجموعهٔ اول و دوم، یعنی دامنه و هم‌دامنه را نشان می‌دهد.

تعریف دامنهٔ تابع: به مجموعهٔ تمام مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌های تابع $y=f(x)$ دامنهٔ تابع می‌گویند که با D_f نمایش داده می‌شود.

$$D_f=\{x\,|\,(x,y)\in f\}$$

به طور کلی در تابع $f:A\to B$ به مجموعهٔ A، دامنهٔ تابع و به مجموعهٔ B، هم‌دامنه گفته می‌شود.

تعریف برد تابع: به مجموعهٔ تمام مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌های تابع $y=f(x)$ برد تابع می‌گویند که با R_f نمایش داده می‌شود.

$$R_f=\{y\,|\,(x,y)\in f\}$$

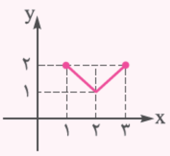
تذکر هم‌دامنهٔ تابع را می‌توان هر مجموعهٔ دلخواهی شامل برد تابع در نظر گرفت. بنابراین اگر f تابعی از A به B باشد، لزومی ندارد که برد آن مجموعهٔ B باشد. برد یک تابع، زیرمجموعه‌ای از هم‌دامنهٔ آن است و ممکن است مساوی هم‌دامنه نیز باشد.

تست برای تابع $\begin{cases} f:[۱,۳]\to[۱,+\infty) \\ f(x)=|x-۲|+۱ \end{cases}$ **کدام‌یک از نمایش‌های زیر نیز قابل قبول است؟**

الف) $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=|x-۲|+۱ \end{cases}$ ب) $\begin{cases} f:[۱,۳]\to[۱,۲] \\ f(x)=|x-۲|+۱ \end{cases}$ پ) $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to[۱,۲] \\ f(x)=|x-۲|+۱ \end{cases}$ ت) $\begin{cases} f:[۱,۳]\to\mathbb{R} \\ f(x)=|x-۲|+۱ \end{cases}$

۱) (الف) و (پ) ۲) (ب) و (ت) ۳) (الف) و (ت) ۴) (ب) و (پ)

پاسخ ابتدا نمودار تابع $f(x)=|x-۲|+۱$ با دامنهٔ $[۱,۳]$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، برد تابع بازهٔ $[۱,۲]$ است، پس نمایشی قابل قبول است که دامنهٔ آن $[۱,۳]$ باشد و هم‌دامنهٔ آن مجموعه‌ای انتخاب شود که برد تابع یعنی $[۱,۲]$ زیرمجموعهٔ آن باشد.

توابع مربوط به (الف) و (پ) دامنه‌شان برابر بازهٔ $[۱,۳]$ نمی‌باشد، پس قابل قبول نیستند. اما توابع مربوط به (ب) و (ت) علاوه بر آن‌که دامنه‌شان $[۱,۳]$ است، هم‌دامنه‌شان نیز شامل $[۱,۲]$ می‌باشد که هر دو قابل قبول‌اند. بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

انواع نمایش تابع

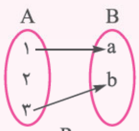
۱ نمایش پیکانی تابع: در یک تابع مانند f با دامنهٔ D و هم‌دامنهٔ R، اگر این مجموعه‌ها (R,D) متناهی و کوچک باشند، می‌توان f را به‌صورت نمودار پیکانی نشان داد.

از تعریف تابع نتیجه می‌شود که اگر تابعی از A به B با نمودار پیکانی نمایش داده شده باشد، آن‌گاه:

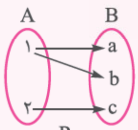
الف از هر عضو A باید دقیقاً یک پیکان خارج شود.

ب لازم نیست که به هر عضو B دقیقاً یک پیکان وارد شود. ممکن است به یک عضو B یک پیکان، یا بیش از یک پیکان وارد شود یا آن‌که اصلاً پیکانی وارد نشود.

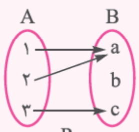
مثال **کدام‌یک از روابط زیر یک تابع است؟**



$R_۳$



$R_۲$



$R_۱$

پاسخ رابطهٔ $R_۱$ تابع است، زیرا از تمام اعضای مجموعهٔ A دقیقاً یک پیکان خارج می‌شود. رابطهٔ $R_۲$ تابع نیست، زیرا از عدد ۱ دو پیکان خارج شده است و هم‌چنین $R_۳$ نیز تابع نیست، زیرا از ۲، پیکانی خارج نشده است.

۲ نمایش زوج مرتبی تابع: تابع را می‌توان به کمک زوج مرتب‌هایی نشان داد که مؤلفهٔ اول هر زوج مرتب، یک عضو از دامنه و مؤلفهٔ دوم آن یک عضو از برد است. از تعریف تابع نتیجه می‌شود، اگر تابعی به‌صورت زوج‌های مرتب نشان داده شده باشد، هیچ دو زوج مرتب متمایزی نباید مؤلفه‌های اول یکسان داشته باشند. به عبارت دیگر اگر در یک تابع، دو زوج مرتب دارای مؤلفه‌های اول مساوی باشند، آن‌گاه مؤلفه‌های دوم آن‌ها یکسان خواهد بود. یعنی:

$$(x,y_۱)\in f\ ,\ (x,y_۲)\in f \Rightarrow y_۱=y_۲$$

تست رابطهٔ $A=\{(۳,m^۲),(۲,۱),(-۳,m),(-۲,m),(۳,m+۲),(m,۴)\}$ **به ازای کدام مقدار m، یک تابع است؟**

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) هیچ مقدار m

پاسخ برای تابع بودن یک رابطه، نباید هیچ دو زوج مرتب متمایزی مؤلفه‌های اول یکسان داشته باشند. پس:

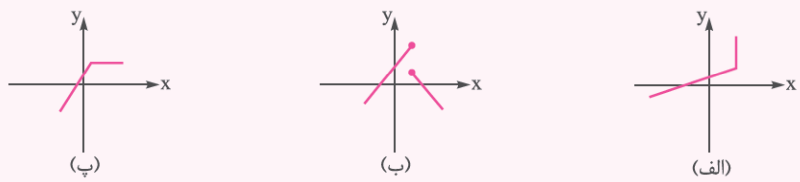
$$(۳,m^۲)=(۳,m+۲)\Rightarrow m^۲=m+۲\Rightarrow m^۲-m-۲=۰\Rightarrow m=-۱,۲$$

m های به دست آمده را در رابطه قرار می‌دهیم و تابع بودن یا تابع نبودن رابطهٔ A را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} m=-۱\Rightarrow A=\{(۳,۱),(۲,۱),(-۳,-۱),(-۲,-۱),(-۱,۴)\}\Rightarrow \text{تابع است.} \\ m=۲\Rightarrow A=\{(۳,۴),\underline{(۲,۱)},(-۳,۲),(-۲,۲),\underline{(۲,۴)}\}\Rightarrow \text{تابع نیست.} \end{cases}$$

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

۳ نمایش نموداری تابع: اگر نمودار یک رابطه رسم شده باشد، آن رابطه زمانی تابع است که خطوط موازی محور y ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کنند. به نمودارهای روبه‌رو توجه کنید:



ملاحظه می‌شود، فقط نمودار (پ) تابع است، اما (الف) و (ب) تابع نیستند.

محاسبهٔ تعداد توابع: مجموعه‌های $A=\{a_۱,a_۲,...,a_m\}$ و $B=\{b_۱,b_۲,...,b_n\}$ را در نظر بگیرید. تعداد توابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B برابر است با n^m.

دلیل رابطهٔ بالا آن است که چون دامنهٔ تابع، باید تمام اعضای مجموعهٔ A باشد، پس تابع f را به‌صورت $f=\{(a_۱,\bigcirc),(a_۲,\bigcirc),...,(a_m,\bigcirc)\}$ درنظر می‌گیریم. در هر یک از دایره‌های خالی، عضوهای مجموعهٔ B قرار می‌گیرند که برای هر دایرهٔ خالی، n انتخاب داریم. بنابراین طبق اصل ضرب، $\underbrace{n\times n\times n\times...\times n}_{m\text{تا}}=n^m$ حالت مختلف داریم.

مثال **مجموعه‌های $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{۱,۲,۳,۴\}$ را در نظر بگیرید.**

الف) تعداد توابعی که از A به B می‌توان نوشت بیشتر است یا از B به A؟ **ب) چند تابع از A به B می‌توان نوشت که $f(b)=۲$ باشد؟**

پاسخ الف) در توابع از A به B، به هر یک از عضوهای مجموعهٔ A یک عضو B را می‌توان نسبت داد:

$$f:A\to B: f=\{(a,\bigcirc),(b,\bigcirc),(c,\bigcirc)\}$$

$$\text{حالت ۴}\times\text{حالت ۴}\times\text{حالت ۴}\Rightarrow ۴^۳=۶۴$$

در توابع از B به A، به هر یک از عضوهای مجموعهٔ B یک عضو A را می‌توان نسبت داد:

$$f:B\to A: f=\{(۱,\bigcirc),(۲,\bigcirc),(۳,\bigcirc),(۴,\bigcirc)\}$$

$$\text{حالت ۳}\times\text{حالت ۳}\times\text{حالت ۳}\times\text{حالت ۳}\Rightarrow ۳^۴=۸۱$$

بنابراین ۸۱ تابع از B به A و ۶۴ تابع از A به B می‌توان نوشت که تعداد توابع از B به A، بیشتر است.

ب) در توابعی که از A به B می‌توان نوشت و $f(b)=۲$ باشد، حتماً به عضو b باید عدد ۲ را نسبت دهیم. یعنی:

$$f=\{(a,\bigcirc),(b,۲),(c,\bigcirc)\}$$

$$\text{حالت ۴}\times\text{حالت ۱}\times\text{حالت ۴}\Rightarrow ۴^۲=۱۶$$

پس ۱۶ تابع با این شرط می‌توان نوشت.

۴ نمایش ضابطه‌ای تابع: یک تابع را می‌توان به صورت یک عبارت جبری از یک متغیر نشان داد. این نوع نمایش را نمایش ضابطه‌ای تابع می‌گوییم.

معادلاتی که دارای دو متغیر مانند x و y هستند، یک رابطه را نشان می‌دهند. اما الزاماً یک معادله با دو متغیر برحسب x و y، یک تابع را مشخص نمی‌کند.

تشخیص تابع بودن یک معادله: در یک معادله بر حسب x و y اگر بتوان y را بر حسب x به صورت صریح $y=f(x)$ نمایش داد، آن ضابطه حتماً یک تابع است.

مثال بررسی کنید آیا رابطهٔ $y^3+x^2-2x=0$ تابع است؟

پاسخ y را به صورت یک تابع صریح از x می‌نویسیم:

$$y^3=2x-x^2 \Rightarrow y=\sqrt[3]{2x-x^2}$$

چون به ازای هر x، فقط یک مقدار برای y وجود دارد، پس رابطهٔ بالا یک تابع است.

مثال بررسی کنید آیا رابطهٔ $y^3+6y^2+12y+2=x$ تابع است؟

پاسخ از اتحاد مکعب دوجمله‌ای استفاده می‌کنیم:

$$y^3+6y^2+12y+8-6=x \Rightarrow (y+2)^3=x+6 \Rightarrow y+2=\sqrt[3]{x+6} \Rightarrow y=\sqrt[3]{x+6}-2$$

چون به ازای هر x فقط یک مقدار برای y وجود دارد، پس تابع است.

نکته با مثال نقض می‌توان **تابع نبودن** یک رابطه را اثبات کرد. به‌خصوص در مواردی که نوشتن رابطه‌ای صریح برحسب x دشوار باشد، استفاده از مثال نقض روش مناسبی است.

مثال بررسی کنید آیا رابطهٔ $y^3-y=x^3+x$ تابع است؟

پاسخ از مثال نقض کمک می‌گیریم. کافی است به x مقدار صفر بدهیم:

$$x=0 \Rightarrow y^3-y=0 \Rightarrow y(y^2-1)=0 \Rightarrow y=0,\pm 1$$

چون به ازای $x=0$، بیش از یک مقدار برای y به دست آمد، پس رابطهٔ بالا تابع نیست.

تست در کدام گزینه، y تابعی از x می‌باشد؟

۱) $x+\sqrt{y+2}=y$ ۲) $x=y^3-4y+1$ ۳) $x=|2y+1|+y$ ۴) $x=y^3+y+|y|$

پاسخ بهتر است از مثال نقض استفاده کنیم:

$1)\ x=-2 \Rightarrow \sqrt{y+2}=y+2 \Rightarrow y=\{-1,-2\} \Rightarrow$ تابع نیست.

$2)\ x=1 \Rightarrow y^3-4y=0 \Rightarrow y(y^2-4)=0 \Rightarrow y=\{0,\pm 2\} \Rightarrow$ تابع نیست.

$3)\ x=0 \Rightarrow |2y+1|=-y \Rightarrow 2y+1=\pm y \Rightarrow y=\{-1,\frac{-1}{3}\} \Rightarrow$ تابع نیست.

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

محاسبهٔ مقدار تابع: اگر تابع را به صورت ضابطه‌ای نمایش دهیم و عبارت بر حسب x باشد، برای تعیین مقدار تابع، کافی است به جای x، عدد یا عبارت مورد نظر را قرار دهیم.

مثال اگر $f(x)=x^4-3x^2$ و $g(x)=2x+1$ باشند، هر یک از مقادیر $f(g(-1))$ و $g(g(f(\sqrt{2})))$ را به دست آورید.

پاسخ

$$g(-1)=2(-1)+1=-1 \Rightarrow f(g(-1))=f(-1)=(-1)^4-3(-1)^2=1-3=-2$$

$$f(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^4-3(\sqrt{2})^2=4-6=-2\ ;\ g(-2)=2(-2)+1=-3 \Rightarrow g(g(f(\sqrt{2})))=g(g(-2))=g(-3)=2(-3)+1=-5$$

تست اگر $f(x)=\frac{2x+3}{2-x}$ و $g(x)=\frac{1-3x}{x+2}$ باشند، ضابطهٔ تابع $g(f(x))$ کدام است؟

۱) x ۲) $-x$ ۳) $-x-1$ ۴) $x+1$

پاسخ در تابع $g(f(x))$ به جای $f(x)$ مقدارش را قرار می‌دهیم:

$$g(f(x))=g\left(\frac{2x+3}{2-x}\right)=\frac{1-3\left(\frac{2x+3}{2-x}\right)}{\frac{2x+3}{2-x}+2}=\frac{\frac{2-x-6x-9}{\cancel{2-x}}}{\frac{\cancel{2x}+3+4-\cancel{2x}}{\cancel{2-x}}}=\frac{-7x-7}{7}=-x-1$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

تست اگر $f(x)=x^3+9x^2+27x+10$ باشد، حاصل $f(f(\sqrt[3]{16}-3))$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) -3 ۳) ۹ ۴) -9

پاسخ با استفاده از اتحاد مکعب دوجمله‌ای $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ تابع را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x)=x^3+9x^2+27x+27-17=(x+3)^3-17$$

$$f(\sqrt[3]{16}-3)=(\sqrt[3]{16}-3+3)^3-17=16-17=-1\Rightarrow f(f(\sqrt[3]{16}-3))=f(-1)=(-1+3)^3-17=8-17=-9$$

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

محاسبهٔ f(x) از روی f(g(x))

اگر $f(g(x))$ معلوم باشد، برای تعیین $f(x)$ در بعضی موارد می‌توان با تغییر متغیر $g(x)=t$، x را برحسب t به‌دست آورد، سپس $f(t)$ را برحسب t نوشته و در انتها به جای t، x را جایگزین کرد.

تست اگر $f(\frac{3x+1}{2})=\frac{2x-1}{x+1}$ باشد، ضابطهٔ $f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{6x}{3x+3}$ ۲) $\frac{4x-5}{2x+2}$ ۳) $\frac{6x}{3x-3}$ ۴) $\frac{4x-5}{2x-2}$

پاسخ **روش اول:** با تغییر متغیر $t=\frac{3x+1}{2}$ داریم:

$$\frac{3x+1}{2}=t\Rightarrow 3x+1=2t\Rightarrow x=\frac{2t-1}{3}$$

$$f(\frac{3x+1}{2})=\frac{2x-1}{x+1}\Rightarrow f(t)=\frac{2(\frac{2t-1}{3})-1}{\frac{2t-1}{3}+1}$$

صورت و مخرج کسر را در عدد ۳ ضرب می‌کنیم:

$$f(t)=\frac{2(2t-1)-3}{2t-1+3}=\frac{4t-5}{2t+2}\Rightarrow f(x)=\frac{4x-5}{2x+2}$$

روش دوم (عددگذاری): اگر در معادلهٔ $f(\frac{3x+1}{2})=\frac{2x-1}{x+1}$ به جای x عدد ۱ را قرار دهیم، آنگاه $f(2)=\frac{1}{2}$ به‌دست می‌آید. حال اگر گزینه‌ها را بررسی کنیم، تنها گزینه‌ای که این مقدار در آن صدق می‌کند، گزینهٔ (۲) می‌باشد.

نکته اگر ضوابط $f(g(x))$ و $g(x)$ معلوم باشند، اما با فرض $g(x)=t$، x را به سادگی نتوانیم برحسب t به دست آوریم، باید به کمک اتحاد و تجزیه، $f(g(x))$ را به‌صورت عبارتی از $g(x)$ درآورده و سپس $f(t)$ را به دست آوریم.

مثال اگر $f(x+\frac{1}{x})=x^3+\frac{1}{x^3}$، مقدار عددی $f(3)$ را به دست آورید.

پاسخ **روش اول:** با فرض $x+\frac{1}{x}=t$ به سادگی نمی‌توان x را برحسب t پیدا کرد. پس سعی می‌کنیم عبارت $x^3+\frac{1}{x^3}$ را به‌صورت تابعی از $x+\frac{1}{x}$ به دست آوریم، با استفاده از اتحاد $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$، داریم:

$$x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})^3-3(x+\frac{1}{x})\Rightarrow f(x+\frac{1}{x})=(x+\frac{1}{x})^3-3(x+\frac{1}{x})\Rightarrow f(t)=t^3-3t\Rightarrow f(3)=3^3-3(3)=27-9=18$$

روش دوم: ابتدا $x+\frac{1}{x}=3$ را در نظر گرفته، سپس دو سمت را به توان ۳ می‌رسانیم. با استفاده از اتحاد $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ داریم:

$$x^3+\frac{1}{x^3}+3\overbrace{(x+\frac{1}{x})}^{3}=27\Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}=27-9=18$$

محاسبهٔ f(x) از روی معادلهٔ $\alpha f(u)+bf(v)=g(x)$

معمولاً در این معادلات طوری باید از تغییر متغیر استفاده کرد که عبارات u و v به هم تبدیل شوند. در این حالت به رابطهٔ جدیدی مثل $a_1f(u)+b_1f(v)=g_1(x)$ می‌رسیم. حال این رابطه را با رابطهٔ اصلی در یک دستگاه قرار داده و به‌صورت دو معادلهٔ دو مجهولی، آن را حل می‌کنیم.

مثال اگر $2f(x)+3f(-x)=2x-1$ باشد، آن‌گاه ضابطهٔ $f(x)$ را به‌دست آورید.

پاسخ در معادلهٔ داده شده، به جای x، $-x$ قرار می‌دهیم:

$$2f(-x)+3f(x)=-2x-1\Rightarrow\begin{cases}2f(x)+3f(-x)=2x-1\\3f(x)+2f(-x)=-2x-1\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}\times 2\\\times(-3)\end{matrix}\begin{cases}4f(x)+6f(-x)=4x-2\\-9f(x)-6f(-x)=6x+3\end{cases}$$

از جمع دو معادلهٔ به‌دست آمده، داریم:

$$-5f(x)=10x+1\Rightarrow f(x)=-2x-\frac{1}{5}$$

تست اگر $f(\frac{1}{x})-2f(x)=x^2+\frac{1}{x}$، حاصل $f(2)$ کدام است؟

۱) $-\frac{45}{4}$ ۲) $\frac{45}{4}$ ۳) $\frac{15}{4}$ ۴) $-\frac{15}{4}$

پاسخ یک بار جای x عدد ۲ و یک بار $\frac{1}{2}$ را قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases}x=2\Rightarrow f(\frac{1}{2})-2f(2)=4+\frac{1}{2}\\ x=\frac{1}{2}\Rightarrow f(2)-2f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}+2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2f(2)+f(\frac{1}{2})=\frac{9}{2}\\ f(2)-2f(\frac{1}{2})=\frac{9}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4f(2)+2f(\frac{1}{2})=9 & \times 2\\ f(2)-2f(\frac{1}{2})=\frac{9}{4}\end{cases}$$

از جمع دو معادلهٔ به دست آمده، داریم:

$$-3f(2)=\frac{45}{4}\Rightarrow f(2)=-\frac{15}{4}$$

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

تست اگر $f(2\sin^2 x+3\sin x)=1-\tan^2 x$ باشد، آن‌گاه $f(2)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ

$$2\sin^2 x+3\sin x=2\Rightarrow 2\sin^2 x+3\sin x-2=0\Rightarrow \sin x=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{-3\pm 5}{4}\Rightarrow\begin{cases}\sin x=-2 \quad (\text{غ‌ق‌ق})\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{cases}$$

با فرض $\sin x=\frac{1}{2}$، مقدار $1-\tan^2 x$ را به دست می‌آوریم:

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{1-\sin^2 x}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}\Rightarrow \tan^2 x=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}\Rightarrow 1-\tan^2 x=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

توابع چندضابطه‌ای

تعریف تابع چندضابطه‌ای: تابعی که دامنهٔ آن به دو یا چند بخش تقسیم شده و هر بخش با معادلات مختلفی تعریف شود، تابع چندضابطه‌ای گویند. شکل کلی توابع چندضابطه‌ای به صورت روبه‌رو می‌باشد:

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x)\ ;\ x\in D_1\\ f_2(x)\ ;\ x\in D_2\\ \vdots \qquad\quad \vdots\\ f_n(x)\ ;\ x\in D_n\end{cases}$$

بدیهی است که هرکدام از ضابطه‌های f_1، f_2 و ... فقط در دامنهٔ خود اعتبار دارند.

در صورتی که در یک تابع چندضابطه‌ای بخواهیم مقدار تابع را به ازای یک ورودی تعیین کنیم، ابتدا باید مشخص کنیم آن ورودی متعلق به کدام محدوده از دامنه می‌باشد و سپس از ضابطهٔ متناظر با آن محدوده استفاده کنیم.

تست تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{\sqrt{1-x}}\ ;\ x<1\\ 2x-\frac{3}{4}\ ;\ x\ge 1\end{cases}$ مفروض است. $f(f(\frac{3}{4}))$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{9}{4}$

پاسخ چون $\frac{3}{4}<1$ است، پس برای محاسبهٔ $f(\frac{3}{4})$ از ضابطهٔ اول استفاده می‌کنیم:

$$f(\frac{3}{4})=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1-\frac{3}{4}}}=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4}}}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$$

چون $f(\frac{3}{4})=\frac{3}{2}>1$ است، پس برای محاسبهٔ $f(\frac{3}{2})$ از ضابطهٔ دوم استفاده می‌کنیم:

$$f(f(\frac{3}{4}))=f(\frac{3}{2})=2(\frac{3}{2})-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$$

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

نکته یک رابطهٔ چندضابطه‌ای با دو شرط زیر تابع محسوب شود:

۱ هر کدام از ضابطه‌ها در دامنهٔ خود تابع باشند.

۲ دامنهٔ ضابطه‌ها یا اشتراک نداشته باشند و یا اگر اشتراک داشته باشند، به ازای دامنه‌های مشترک، مقادیر یکسان تولید کنند.

تست **کدام‌یک از معادلات زیر، y را به صورت تابعی از x مشخص می‌کند؟**

۱) $y=\begin{cases}x+3 & ; x\le 0\\ x-1 & ; x\ge 0\end{cases}$ ۲) $y=\begin{cases}-x+1 & ; x<2\\ 2x & ; x>1\end{cases}$ ۳) $y=\begin{cases}-x+3 & ; x\le 1\\ x+1 & ; x\ge 1\end{cases}$ ۴) $y=\begin{cases}-x+1 & ; x\le 0\\ 2x & ; x>-1\end{cases}$

پاسخ روش اول: هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

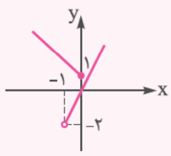
۱) دامنهٔ دو ضابطه در $x=0$ مشترک می‌باشند. با فرض $x=0$، مقدار $y=x+3$ و $y=x-1$ به ترتیب ۳ و ۱- می‌شود، چون به ازای $x=0$ دو مقدار برای y پیدا شد، پس این رابطه تابع نیست.

۲) دامنهٔ دو ضابطه در بازهٔ $(1,2)$ مشترک هستند. به ازای عددی مانند $x=1/5$ دو مقدار $-0/5$ و ۳ به دست می‌آید، پس این رابطه تابع نیست.

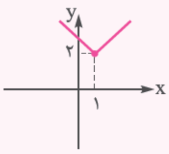
۳) هر یک از ضوابط در دامنهٔ خود تابع‌اند و دامنهٔ دو ضابطه در $x=1$ مشترک است که به ازای آن، مقدار هر دو ضابطه برابر ۲ می‌شود، پس این رابطه، تابع است.

۴) دو ضابطه در بازهٔ $(-1,0]$ مشترک هستند. به ازای عددی مانند $-0/5$ دو مقدار ۱/۵ و ۱- به دست می‌آید، پس این رابطه تابع نیست.

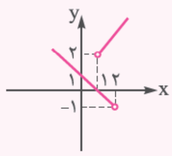
روش دوم: نمودار هر یک را رسم می‌کنیم:



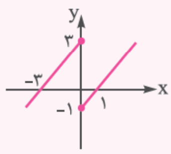
(۴)



(۳)



(۲)

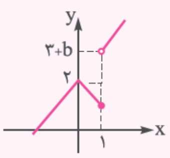


(۱)

تنها گزینه‌ای که خطوط موازی محور عرض‌ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، نمودار گزینهٔ (۳) می‌باشد. بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

تست **اگر برد تابع $f(x)=\begin{cases}3x+b & ; x>1\\ 2-|x| & ; x\le 1\end{cases}$ برابر $\mathbb{R}$ باشد، تمام مقادیر ممکن برای b کدام است؟**

۱) $b\ge 0$ ۲) $b\ge -1$ ۳) $b\le -1$ ۴) $b\le 0$



پاسخ ابتدا به کمک انتقال، نمودار $y=2-|x|$ را در بازهٔ $(-\infty,1]$ و سپس خط $y=3x+b$ را در بازهٔ $(1,+\infty)$ رسم می‌کنیم.
مقدار تابع $y=3x+b$ به ازای $x=1$ برابر $y=3+b$ است، چون با توجه به شکل، برد تابع $y=2-|x|$ به صورت بازهٔ $(-\infty,2]$ می‌باشد، پس باید $3+b\le 2$ باشد تا برد $f(x)$ تمام اعداد حقیقی را پوشش دهد و برابر $\mathbb{R}$ شود. بنابراین:

$$3+b\le 2\Rightarrow b\le -1$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

انواع تابع

شما تاکنون با توابع مختلفی مانند خطی، چندجمله‌ای، ثابت و همانی آشنا شده‌اید. در این درس، این تعاریف را یادآوری کرده و با انواع دیگری از توابع مهم و مفید آشنا می‌شوید.

تابع ثابت: هر تابعی را که برد آن تنها شامل یک عضو باشد، تابع ثابت می‌نامیم. اگر این عضو را k بنامیم، تابع ثابت را با معادلهٔ $f(x)=k$ نمایش می‌دهیم.
برای مثال، هر یک از توابع $f(x)=\frac{3}{2}$، $g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$ و $h(x)=\{(3,\sqrt{2}),(5,\sqrt{2})\}$ ثابت‌اند.

تذکر نمودار هر تابع ثابت، خطی (یا مجموعه نقاط روی خطی) موازی محور xها است.

تابع خطی: هر تابع به صورت $f(x)=ax+b$ را یک تابع خطی می‌نامیم. (اگر $a=0$ باشد، آن‌گاه تابع به صورت ثابت $f(x)=b$ درمی‌آید.)

برای مثال هر یک از توابع $f(x)=\frac{1}{2}x+2$، $g(t)=\sqrt{2}t+3$ و $r(a)=5a-3$ خطی هستند.

تابع چندجمله‌ای: هر تابعی را که نمایش جبری آن یک چندجمله‌ای جبری از یک متغیر باشد، تابع چندجمله‌ای می‌نامیم. هر تابع به صورت $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ را یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n می‌گوییم. (a_n، a_{n-1}، ...، a_0 اعدادی حقیقی، n عدد صحیح نامنفی و $a_n\ne 0$)

توابع خطی حالت خاصی از توابع چندجمله‌ای هستند. تابع خطی $f(x)=a_1x+a_0$ $(a_1\ne 0)$ یک تابع چندجمله‌ای درجه اول است.

برای مثال، هر یک از توابع روبه‌رو، چندجمله‌ای هستند:

$$f(x)=2x^2+3x+\sqrt{2}\quad,\quad g(a)=a^3-5a\quad,\quad r(t)=\frac{3}{5}t^2-\sqrt{3}t$$

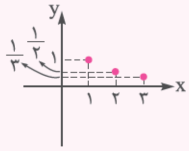
تابع همانی: اگر تابع $f(x)$ به ازای هر ورودی مجاز x، خود x را نظیر کند، تابع را همانی گوییم و آن را با $f(x)=x$ نشان می‌دهیم. با توجه به تعریف، دامنه و برد تابع همانی با هم برابرند. نمودار تابع همانی، خط $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم) یا مجموعه نقاطی روی آن می‌باشد.

توابع گویا: هر تابع به شکل $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ را که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چندجمله‌ای هستند، یک تابع گویا می‌نامیم $(Q(x)\neq 0)$.

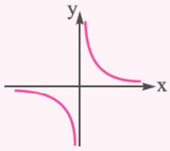
برای مثال، توابع $f(x)=\dfrac{5}{x+2}$ و $g(t)=\dfrac{\sqrt{2}t+1}{t^2-t}$ گویا هستند.

مثال نمودار توابع $\begin{cases} f:\{1,2,3\}\to\mathbb{R} \\ f(x)=\frac{1}{x}\end{cases}$ و $\begin{cases} t:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R} \\ t(x)=\frac{1}{x}\end{cases}$ را رسم کنید.

پاسخ با توجه به دامنه، نمودار توابع f و t را رسم می‌کنیم. (نمودار $y=\dfrac{1}{x}$ را از روش نقطه‌یابی می‌توانید رسم کنید. اما بهتر است نمودار آن را به خاطر بسپارید).

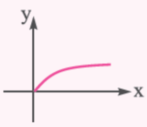


$f(x)$



$t(x)$

توابع رادیکالی: تابعی که هر عدد نامنفی را به ریشهٔ دوم نامنفی آن نسبت می‌دهد، تابع ریشهٔ دوم می‌نامند که به صورت $f(x)=\sqrt{x}$ نمایش داده می‌شود. دامنه و برد این تابع، مطابق شکل روبه‌رو، بازهٔ $[0,+\infty)$ می‌باشد. تابع $f(x)=\sqrt{x}$ یک تابع رادیکالی است.



روش‌های به دست آوردن دامنهٔ توابع

موارد زیادی پیش می‌آید که توابع را فقط با ارائهٔ ضابطه معرفی می‌کنند و اشاره‌ای به دامنه نمی‌شود. در این موارد، طبق قرارداد، دامنهٔ تابع، بزرگ‌ترین مجموعه‌ای است که ضابطهٔ ارائه شده روی آن مجموعه تعریف شده باشد. برای مثال، اگر $f(x)=\sqrt{4-x^2}$، به عنوان تابع ارائه شده باشد، طبق قرارداد، دامنهٔ آن بازهٔ $[-2,2]$ است.

۱ **دامنهٔ توابع چندجمله‌ای:** دامنهٔ توابع چندجمله‌ای به فرم کلی $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\dots$، برابر با $\mathbb{R}$ است.

۲ **دامنهٔ توابع گویا:** دامنهٔ توابع کسری که صورت و مخرجشان چندجمله‌ای باشد (توابع گویا)، برابر با مجموعهٔ اعداد حقیقی به‌جز ریشه یا ریشه‌های مخرج خواهد بود.

۳ **دامنهٔ توابع رادیکالی:** بستگی به زوج یا فردبودن فرجه، دو حالت در نظر می‌گیریم:

الف اگر فرجهٔ رادیکال فرد باشد، دامنهٔ تابع همان دامنهٔ زیر رادیکال است:

$$y=\sqrt[2k+1]{f(x)}\Rightarrow D_y=D_f \quad ; \quad (k\in\mathbb{N})$$

ب اگر فرجهٔ رادیکال زوج باشد، باید زیر رادیکال مثبت یا صفر باشد:

$$y=\sqrt[2k]{f(x)}\Rightarrow f(x)\geq 0 \quad ; \quad (k\in\mathbb{N})$$

بنابراین در این حالت، دامنهٔ تابع محدوده‌ای است که $x\in D_f$ و $f(x)\geq 0$ باشد.

۴ **دامنهٔ توابع چندضابطه‌ای:** دامنهٔ توابع چندضابطه‌ای از **اجتماع** دامنهٔ ضابطه‌ها به دست می‌آید.

۵ **دامنهٔ توابع لگاریتمی:** برای توابع لگاریتمی داریم:

$$y=\log_{g(x)}f(x)\Rightarrow D_y=\{x\,|\,g(x)>0,\ g(x)\neq 1,\ f(x)>0\}$$

مثال **دامنهٔ توابع زیر را بیابید.**

الف) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3-x}}{x^2-16}$

ب) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-4x}}$

پ) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1} & ; \ x\geq -1 \\ \dfrac{2x}{x-2} & ; \ -2<x<-1\end{cases}$

پاسخ الف) محدوده‌ای که عبارت زیر رادیکال، بزرگ‌تر یا مساوی صفر است را به دست آورده و ریشه‌های مخرج کسر را از آن کم می‌کنیم:

$$۳-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۳\ ;\ x^{۲}-۱۶=۰\Rightarrow x=\pm ۴\Rightarrow D_f=(-\infty,۳]-\{-۴\}$$

ب) با استفاده از جدول تعیین علامت، دامنهٔ تابع را به دست می‌آوریم:

$$\frac{x^{۲}-۲x+۱}{x^{۳}-۴x}\geq ۰\Rightarrow \frac{(x-۱)^{۲}}{x(x^{۲}-۴)}\geq ۰$$

x		-۲		۰		۱		۲	
$\frac{(x-۱)^{۲}}{x(x^{۲}-۴)}$	$-$	ت.ن	$+$	ت.ن	$-$	۰	$-$	ت.ن	$+$

پس دامنهٔ تابع به صورت $(-۲,۰)\cup\{۱\}\cup(۲,+\infty)$ می‌باشد.

پ) دامنهٔ تابع از اجتماع دامنهٔ هر یک از ضابطه‌ها یعنی $[-۱,+\infty)$ و $(-۲,-۱)$ به دست می‌آید. بنابراین دامنهٔ تابع برابر بازهٔ $(-۲,+\infty)$ می‌شود.

تست دامنهٔ تابع $y=\sqrt{۴-\sqrt{۱-۲x}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۸

پاسخ باید دو شرط $۱-۲x\geq ۰$ و $۴-\sqrt{۱-۲x}\geq ۰$ برقرار باشند:

$$\begin{cases}۱-۲x\geq ۰\Rightarrow ۲x\leq ۱\Rightarrow x\leq \frac{۱}{۲}\\ ۴-\sqrt{۱-۲x}\geq ۰\Rightarrow \sqrt{۱-۲x}\leq ۴\Rightarrow ۱-۲x\leq ۱۶\Rightarrow ۲x\geq -۱۵\Rightarrow x\geq -\frac{۱۵}{۲}\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}\frac{-۱۵}{۲}\leq x\leq \frac{۱}{۲}$$

پس دامنهٔ تابع بازهٔ $[-۷/۵,۰/۵]$ می‌باشد که شامل ۸ عدد صحیح $\{-۷,-۶,...,-۱,۰\}$ است. بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح می‌باشد.

تست اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۲x+۱}{\sqrt{(m-۱)x^{۲}+۲\sqrt{۲}x+m}}$ برابر $\mathbb{R}$ باشد، تمام مقادیر ممکن برای m کدام است؟

۱) $m<-۱$ ۲) $۱<m<۲$ ۳) $m>۱$ ۴) $m>۲$

پاسخ زمانی دامنهٔ تابع برابر $\mathbb{R}$ می‌شود که همواره $(m-۱)x^{۲}+۲\sqrt{۲}x+m>۰$ باشد. می‌دانیم شرط همواره مثبت بودن عبارت درجه دوم آن است که Δ منفی وضریب $x^{۲}$ مثبت باشد. بنابراین:

$$\begin{cases}x^{۲}\text{ضریب}>۰\Rightarrow m-۱>۰\Rightarrow m>۱\\ \Delta<۰\Rightarrow (۲\sqrt{۲})^{۲}-۴(m-۱)(m)<۰\Rightarrow ۸-۴m^{۲}+۴m<۰\xrightarrow{\div(-۴)}m^{۲}-m-۲>۰\Rightarrow (m+۱)(m-۲)>۰\Rightarrow m<-۱\ \text{یا}\ m>۲\end{cases}$$

از اشتراک محدوده‌های به دست آمده، مجموعه جواب به صورت $m>۲$ حاصل می‌شود. پس گزینهٔ (۴) صحیح است.

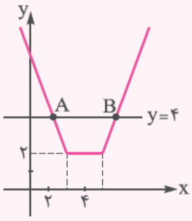
تست اگر دامنهٔ $y=\frac{\sqrt[۳]{x}-۱}{\sqrt[۴]{۴-|x-۲|-|x-۴|}}$ به صورت بازهٔ (α,β) باشد، مقدار $\alpha\beta$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۸

پاسخ روش اول: باید شرط $۴-|x-۲|-|x-۴|>۰$ برقرار باشد. با توجه به ریشه‌های عبارات درون قدرمطلق، در سه حالت زیر این نامعادله را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}x<۲:\ ۴+x-۲+x-۴>۰\Rightarrow ۲x>۲\Rightarrow x>۱\xrightarrow{x<۲}۱<x<۲\\ ۲\leq x\leq ۴:\ ۴-x+۲+x-۴>۰\Rightarrow ۲>۰\Rightarrow \text{بدیهی است.}\xrightarrow{۲\leq x\leq ۴}۲\leq x\leq ۴\\ x>۴:\ ۴-x+۲-x+۴>۰\Rightarrow ۲x<۱۰\Rightarrow x<۵\xrightarrow{x>۴}۴<x<۵\end{cases}\xrightarrow{\text{اجتماع}}۱<x<۵$$

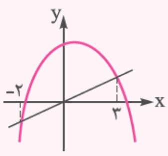
پس دامنهٔ تابع، بازهٔ $(۱,۵)$ است و در نتیجه $\alpha\beta=۵$ می‌باشد.



روش دوم: نامعادلهٔ $|x-۴|-|x-۲|-۴>۰$ را به صورت $|x-۲|+|x-۴|>۴$ نوشته و با رسم نمودارهای $y=|x-۲|+|x-۴|$ و $y=۴$ از روش هندسی مجموعه جواب را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x>۴: y=۲x-۶\,,\ y=۴ \xrightarrow{\text{تلاقی}} ۲x-۶=۴ \Rightarrow x_B=۵ \\ x<۲: y=-۲x+۶\,,\ y=۴ \xrightarrow{\text{تلاقی}} -۲x+۶=۴ \Rightarrow x_A=۱ \end{cases} \Rightarrow (\alpha,\beta)=(۱,۵) \Rightarrow \alpha\beta=۵$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.



تست شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=f(x)$ و نیمساز ناحیهٔ اول و سوم است. دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\dfrac{-x^۲+x+۱۲}{x-f(x)}}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,-۳]\cup[۴,+\infty)$ ۲) $[-۳,-۲)\cup(۳,۴]$

۳) $(-۲,۳)$ ۴) $(۳,+\infty)$

پاسخ باید دو شرط $\dfrac{-x^۲+x+۱۲}{x-f(x)}\geq ۰$ و $x-f(x)\neq ۰$ برقرار باشد. ابتدا ریشه‌های صورت و مخرج کسر را مشخص می‌کنیم:

$$-x^۲+x+۱۲=۰ \Rightarrow -(x^۲-x-۱۲)=۰ \Rightarrow -(x+۳)(x-۴)=۰ \Rightarrow x=-۳,۴$$

$$x-f(x)=۰ \Rightarrow x=f(x) \Rightarrow x=-۲,۳$$

با توجه به شکل، در بازهٔ $(-۲,۳)$ نمودار $y=f(x)$ بالاتر از خط $y=x$ و در بیرون این بازه، نمودار خط $y=x$ بالاتر یا روی نمودار $y=f(x)$ است. پس علامت عبارت $x-f(x)$ در بازهٔ $(-۲,۳)$ منفی و در بیرون این بازه نامنفی است. حال جدول تعیین علامت را برای عبارت $P=\dfrac{-x^۲+x+۱۲}{x-f(x)}$ رسم می‌کنیم:

x		-۳		-۲		-۳		۴	
$-x^۲+x+۱۲$	−	۰	+		+		+	۰	−
$x-f(x)$	+		+	۰	−	۰	+		+
P	−	۰	+	ت ن	−	ت ن	+	۰	−

با توجه به جدول تعیین علامت، دامنهٔ تابع به صورت $[-۳,-۲)\cup(۳,۴]$ می‌شود. بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

تساوی دو تابع

دو تابع زمانی با هم برابرند که نمودارهای آن‌ها بر هم منطبق باشند و هیچ نقطه‌ای پیدا نشود که روی یکی از نمودارها باشد، اما روی دیگری نباشد.

دو تابع f و g با هم مساوی‌اند، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

۱ دامنهٔ آن‌ها با هم مساوی باشند، یعنی $D_f=D_g$.

۲ به ازای هر x از دامنهٔ آن‌ها $f(x)=g(x)$ باشد. (ضابطه‌ها برابر باشند.)

اگر دو تابع به صورت مجموعهٔ زوج‌های مرتب داده شده باشند، هنگامی با هم برابرند که به عنوان دو مجموعه با هم برابر باشند.

مثال آیا دو تابع $f(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-۲}$ و $g(x)=\sqrt{x^۲-۲x}$ با هم برابرند؟

پاسخ دامنهٔ دو تابع با هم برابر نیستند، زیرا در تابع f هر یک از عبارت‌های x و $x-۲$ همواره باید نامنفی باشند، در صورتی‌که در تابع g باید ضربشان یعنی $x(x-۲)$ نامنفی باشد:

$$f(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-۲}\ : \begin{cases} x\geq ۰ \\ x-۲\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f=[۲,+\infty)$$

$$g(x)=\sqrt{x^۲-۲x}\ :\ x^۲-۲x\geq ۰ \Rightarrow x(x-۲)\geq ۰ \Rightarrow D_g=(-\infty,۰]\cup[۲,+\infty)$$

پس $D_f\neq D_g$ و در نتیجه دو تابع برابر نیستند.

تست دو تابع f و g مفروض‌اند. در کدام گزینه دو تابع مساوی‌اند؟

۱) $f(x)=\sqrt{۱-\sin^۲ x}\ ,\ g(x)=\cos x$ ۲) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^۲}}{|x|}\ ,\ g(x)=۱$

۳) $f(x)=(\sqrt{x})^۲\ ,\ g(x)=x$ ۴) $f(x)=\dfrac{x}{|x|}\ ,\ g(x)=\dfrac{|x|}{x}$

پاسخ هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$۱)\ f(x)=\sqrt{۱-\sin^۲ x}=\sqrt{\cos^۲ x}=|\cos x| \Rightarrow f(x)\neq g(x)$$

$$۲)\ f(x)=\frac{\sqrt{x^۲}}{|x|}=\frac{|x|}{|x|}=۱ \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۰\}\ ;\ g(x)=۱ \Rightarrow D_g=\mathbb{R} \Rightarrow D_f\neq D_g$$

۳) $f(x)=(\sqrt{x})^۲=x \Rightarrow D_f=[۰,+\infty)$; $g(x)=x \Rightarrow D_g=\mathbb{R} \Rightarrow D_f \neq D_g$

۴) $f(x)=\frac{x}{|x|} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$; $g(x)=\frac{|x|}{x} \Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{۰\}$; $f(x)=g(x)=\begin{cases} ۱ & ; x>۰ \\ -۱ & ; x<۰ \end{cases} \Rightarrow$ دو تابع مساوی‌اند.

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

تست **اگر دو تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{x^۳+۸}{x-a} & ; x \neq a \\ k & ; x=a \end{cases}$ و $g(x)=x^۲-۲x+۴$ برابر باشند، حاصل $a+k$ کدام است؟**

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۴

پاسخ به ازای $x \neq a$ ضابطهٔ دو تابع برابرند، بنابراین:

$$f(x)=g(x) \Rightarrow \frac{x^۳+۸}{x-a}=x^۲-۲x+۴ \Rightarrow \frac{(x+۲)(x^۲-۲x+۴)}{x-a}=x^۲-۲x+۴ \Rightarrow a=-۲$$

از این‌که $a=-۲$ است، نتیجه می‌گیریم $f(a)=f(-۲)=k$ و چون دو تابع به ازای هر x برابرند، داریم:

$$g(x)=x^۲-۲x+۴ \Rightarrow g(-۲)=۱۲ \xrightarrow{f(-۲)=g(-۲)} k=۱۲ \Rightarrow a+k=-۲+۱۲=۱۰$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

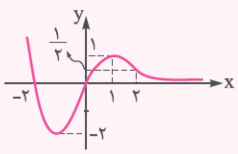
روش‌های به دست آوردن برد توابع

در این قسمت، برای پیدا کردن برد توابع به روش‌هایی اشاره می‌کنیم که برای بعضی توابع خاص کارایی دارند. برای تعیین برد یک تابع، ابتدا باید مشخص کنیم کدام‌یک از روش‌های زیر برای آن مناسب‌تر می‌باشد. بدیهی است روشی که برای یک تابع استفاده می‌کنیم، ممکن است برای یک تابع دیگر مفید نباشد. (کلی‌ترین روش برای محاسبهٔ برد، استفاده از مشتق می‌باشد که در فصل کاربرد مشتق مطالعه خواهید کرد).

۱ تعیین برد با استفاده از رسم نمودار تابع

اگر رسم نمودار یک تابع ساده باشد، برای تعیین برد، نمودار تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. تصویر نمودار بر روی محور yها محدودهٔ برد تابع را مشخص می‌کند.

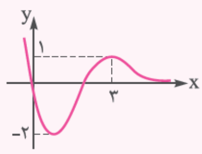
تست **اگر نمودار $y=f(x)$ به صورت روبه‌رو باشد، برد تابع $y=f(|x|-۲)$ کدام است؟**



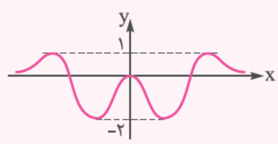
۱) $[۰,۲]$ ۲) $[۰,۱]$

۳) $[-۲,۱]$ ۴) $(۰,\frac{۱}{۲})$

پاسخ ابتدا نمودار $y=f(x-۲)$ و سپس $y=f(|x|-۲)$ را رسم می‌کنیم:



$y=f(x-۲)$

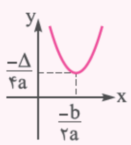


$y=f(|x|-۲)$

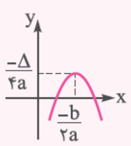
با توجه به شکل به دست‌آمده، برد تابع، بازهٔ $[-۲,۱]$ می‌باشد. بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

تذکر در تابع درجه دوم به شکل کلی $y=ax^۲+bx+c$ ، با توجه به نمودار آن، دو حالت وجود دارد:

الف اگر $a>۰$ باشد، برد تابع به صورت بازهٔ $[-\frac{\Delta}{۴a},+\infty)$ می‌باشد.



ب اگر $a<۰$ باشد، برد تابع به صورت بازهٔ $(-\infty,\frac{-\Delta}{۴a}]$ می‌باشد.



تست برد تابع $y=\sqrt{-x^2+4x+11}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) بی‌شمار

پاسخ در تابع $f(x)=-x^2+4x+11$، چون ضریب x^2 منفی است، پس برد آن به صورت بازهٔ $(-\infty,\frac{-\Delta}{4a}]$ می‌باشد:

$$\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-(16+44)}{4(-1)}=\frac{-60}{-4}=15\Rightarrow -x^2+4x+11\le 15$$

چون عبارت زیر رادیکال نمی‌تواند منفی باشد، داریم:

$$0\le\sqrt{-x^2+4x+11}\le\sqrt{15}\Rightarrow R_y=[0,\sqrt{15}]$$

پس برد تابع، شامل ۴ عدد صحیح $\{0,1,2,3\}$ می‌باشد. بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

۲ تعیین برد با استفاده از نامساوی‌های مهم

در محاسبهٔ برد بعضی از توابع، می‌توان از نامساوی‌های زیر استفاده کرد: $(n\in\mathbb{N})$

$$x^{2n}\ge 0\ ,\ \sqrt[2n]{x}\ge 0\ ,\ |x|\ge 0\ ,\ -1\le\sin^{(2n-1)}x\le 1\ ,\ -1\le\cos^{(2n-1)}x\le 1\ ,\ 0\le\frac{|x|}{|x|+1}<1\ ,\ 0\le\frac{x^2}{x^2+1}<1$$

$$a>0\Rightarrow a+\frac{1}{a}\ge 2\ ,\ a<0\Rightarrow a+\frac{1}{a}\le -2\ ,\ a,b\ge 0\Rightarrow\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}\ ,\ a,b\le 0\Rightarrow\frac{a+b}{2}\le-\sqrt{ab}$$

تذکر در نامساوی‌های $(a>0)\,a+\frac{1}{a}\ge 2$ و $(a<0)\,a+\frac{1}{a}\le -2$، حالت تساوی زمانی رخ می‌دهد که به ترتیب $a=1$ و $a=-1$ باشد.

تذکر در نامساوی‌های $(a,b\ge 0)\,a+b\ge 2\sqrt{ab}$ و $(a,b\le 0)\,a+b\le -2\sqrt{ab}$، حالت تساوی زمانی رخ می‌دهد که $a=b$ باشد.

تست برد تابع $f(x)=x^6-5x^3+\frac{1}{4}$ کدام است؟

۱) $[-\frac{1}{4},+\infty)$ ۲) $[-6,+\infty)$ ۳) $[-5,+\infty)$ ۴) $\mathbb{R}$

پاسخ تابع $f(x)=x^6-5x^3+\frac{1}{4}$ را به صورت مربع کامل می‌نویسیم:

$$x^6-5x^3+\frac{1}{4}=(x^3-\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4}+\frac{1}{4}=(x^3-\frac{5}{2})^2-6$$

می‌دانیم $(x^3-\frac{5}{2})^2\ge 0$ است. بنابراین $(x^3-\frac{5}{2})^2-6\ge -6$ و از آن‌جا برد تابع به صورت بازهٔ $[-6,+\infty)$ می‌شود. (در نامساوی $(x^3-\frac{5}{2})^2\ge 0$، حالت تساوی زمانی رخ می‌دهد که $x=\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$ باشد). بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

تست برد تابع $y=x+5+\frac{1}{x+3}$ کدام است؟

۱) $[0,4]$ ۲) $\mathbb{R}-(0,4)$ ۳) $[-2,2]$ ۴) $\mathbb{R}-(-2,2)$

پاسخ سعی می‌کنیم عبارت را به صورت $a+\frac{1}{a}$ بنویسیم:

$$y=x+5+\frac{1}{x+3}=x+3+2+\frac{1}{x+3}\Rightarrow y=(x+3)+\frac{1}{(x+3)}+2$$

می‌دانیم همواره $a+\frac{1}{a}\ge 2$ یا $a+\frac{1}{a}\le -2$ است. اگر فرض کنیم $a=x+3$، آن‌گاه داریم:

$$\begin{cases}(x+3)+\frac{1}{(x+3)}\ge 2\Rightarrow(x+3)+\frac{1}{(x+3)}+2\ge 4\Rightarrow y\ge 4\\ \text{یا}\\ (x+3)+\frac{1}{(x+3)}\le -2\Rightarrow(x+3)+\frac{1}{(x+3)}+2\le 0\Rightarrow y\le 0\end{cases}\Rightarrow R_y=(-\infty,0]\cup[4,+\infty)\Rightarrow R_y=\mathbb{R}-(0,4)$$

(در نامساوی‌های $x+3+\frac{1}{x+3}\ge 2$ و $x+3+\frac{1}{x+3}\le -2$، حالت تساوی زمانی رخ می‌دهد که به ترتیب $x=-2$ و $x=-4$ باشد.) بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

۳ تعیین برد با به دست آوردن x بر حسب y

در تابع $y=f(x)$، x را بر حسب y می‌نویسیم. سپس با توجه به مقادیر قابل قبول برای y، محدودهٔ y و در نتیجه برد تابع را به دست می‌آوریم. از این روش بیشتر در توابع کسری استفاده می‌شود.

تست برد تابع $y=\frac{x^۲-x-۱}{x^۲-x+۱}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۵　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

پاسخ طرفین وسطین کرده و معادله را برحسب توان‌های نزولی x می‌نویسیم:

$$y=\frac{x^۲-x-۱}{x^۲-x+۱}\Rightarrow x^۲y-xy+y=x^۲-x-۱\Rightarrow(y-۱)x^۲+(-y+۱)x+y+۱=۰$$

با شرط $y\neq۱$، یک عبارت درجه دوم داریم که باید دلتای معادله، مثبت یا صفر باشد. بنابراین:

$$\Delta\geq۰\Rightarrow(-y+۱)^۲-۴(y-۱)(y+۱)\geq۰\Rightarrow(y-۱)(y-۱-۴y-۴)\geq۰\Rightarrow(y-۱)(-۳y-۵)\geq۰\Rightarrow-\frac{۵}{۳}\leq y\leq۱$$

به ازای $y=۱$، معادلهٔ درجه دوم بالا به معادلهٔ درجه اول تبدیل می‌شود. پس باید شرط $y=۱$ را بررسی کرد:

$$\frac{x^۲-x-۱}{x^۲-x+۱}=۱\Rightarrow x^۲-x-۱=x^۲-x+۱\Rightarrow-۱=۱$$ تناقض

پس $y=۱$ در برد تابع قرار ندارد. بنابراین $R_y=[-\frac{۵}{۳},۱)$ که شامل دو عدد صحیح می‌باشد. بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

چون در بسیاری از مسائل به تعیین علامت یک عبارت نیاز پیدا می‌کنیم در این قسمت روش تعیین علامت را یادآوری می‌کنیم:

تعیین علامت

برای این‌که معلوم کنیم علامت یک عبارت جبری، مثبت، منفی، صفر یا تعریف‌نشده است، از جدول تعیین علامت کمک می‌گیریم.

تعیین علامت چندجمله‌ای درجه اول: چندجمله‌ای درجه اول $P(x)=ax+b\ (a\neq۰)$ به ازای $x=\frac{-b}{a}$، صفر می‌شود و جدول تعیین علامت آن به صورت روبه‌رو است:

x		$-\frac{b}{a}$	
P(x)	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

تعیین علامت چندجمله‌ای درجه دوم: جدول تعیین علامت چندجمله‌ای درجه دوم $P(x)=ax^۲+bx+c\ (a\neq۰)$، بستگی به علامت Δ، به یکی از سه حالت زیر می‌باشد:

۱ اگر $\Delta>۰$ باشد، چندجمله‌ای دو ریشهٔ سادهٔ $x_۱,x_۲=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$ دارد. با فرض $x_۲>x_۱$، جدول تعیین علامت آن به صورت زیر است:

x		$x_۱$		$x_۲$	
P(x)	موافق علامت a	۰	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

۲ اگر $\Delta=۰$ باشد، چندجمله‌ای یک ریشهٔ مضاعف $x_۰=\frac{-b}{۲a}$ دارد که جدول تعیین علامت آن به صورت زیر است:

x		$-\frac{b}{۲a}$	
P(x)	موافق علامت a	۰	موافق علامت a

۳ اگر $\Delta<۰$ باشد، چندجمله‌ای ریشه ندارد و جدول تعیین علامت آن به صورت مقابل است:

x	
P(x)	موافق علامت a

تعیین علامت عبارات به شکل کلی $y=\frac{f(x)}{g(x)}$: اگر $f(x)$ و $g(x)$ چندجمله‌ای باشند، برای تعیین علامت عبارت $\frac{f(x)}{g(x)}$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱ ریشه‌های f و g را پیدا کرده و از کوچک به بزرگ در یک جدول قرار می‌دهیم.

۲ از سمت راست، علامت اولین قسمت جدول را تعیین می‌کنیم. این علامت را می‌توان با امتحان یک عدد بزرگ‌تر از بزرگ‌ترین ریشه، تعیین کرد.

۳ در جدول از سمت راست، علامت‌ها را یک در میان عوض می‌کنیم، فقط توجه داشته باشید که علامت در ریشه‌های مکرر مرتبهٔ زوج به شکل $(x-a)^{۲n}=۰\ (n\in\mathbb{N})$ تغییر نمی‌کند.

مثال عبارت $P(x)=\frac{(x+۲)(x-۱)^۲(۳-x)^{۱۵}}{(x-۲)^۵(x+۳)}$ را تعیین علامت کنید.

پاسخ ابتدا ریشه‌ها را در جدول وارد می‌کنیم. برای تعیین علامت در بازهٔ $(۳,+\infty)$ علامت $p(۴)$ را معلوم می‌کنیم. $(p(۴)<۰)$ بنابراین داریم:

x		−۳		−۲		۱		۲		۳	
P(x)	−	ت ن	+	۰	−	۰	−	ت ن	+	۰	−

ملاحظه می‌شود که در این عبارت $x=۱$ ریشهٔ مضاعف (مکرر مرتبهٔ زوج) می‌باشد و به همین خاطر است که در اطراف آن، عبارت $P(x)$ تغییر علامت نمی‌دهد.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

مفاهیم مقدماتی تابع

۱- برای تابع $\begin{cases} f:[۰,\frac{۱}{۳}]\to[۰,+\infty) \\ f(x)=x^۲ \end{cases}$ کدام‌یک از نمایش‌های زیر نیز قابل قبول است؟ (کتاب درسی)

الف) $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=x^۲ \end{cases}$ ب) $\begin{cases} f:[۰,\frac{۱}{۳}]\to[۰,\frac{۱}{۹}] \\ f(x)=x^۲ \end{cases}$ پ) $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to[۰,\frac{۱}{۹}] \\ f(x)=x^۲ \end{cases}$ ت) $\begin{cases} f:[۰,\frac{۱}{۳}]\to\mathbb{R} \\ f(x)=x^۲ \end{cases}$

۱) (ب) و (ت) ۲) (الف) و (پ) ۳) (الف) و (ت) ۴) (ب) و (پ)

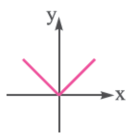
۲- در کدام تابع، مجموعه‌های هم‌دامنه و برد برابرند؟

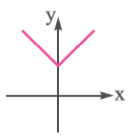
۱) $\begin{cases} f:(۰,+\infty)\to(۰,+\infty) \\ f(x)=|x+۱| \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} f:(۰,+\infty)\to[-۱,+\infty) \\ f(x)=|x+۱| \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} f:(۰,+\infty)\to(-۱,+\infty) \\ f(x)=|x-۱| \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} f:(۰,+\infty)\to[۰,+\infty) \\ f(x)=|x-۱| \end{cases}$

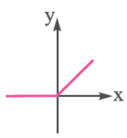
۳- اگر $\begin{cases} f:A\to[۰,۳] \\ f(x)=۲x-۱ \end{cases}$، آن‌گاه مجموعهٔ A کدام گزینه می‌تواند باشد؟

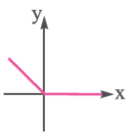
۱) $\{۰,۲\}$ ۲) $\{۱,۳\}$ ۳) $[۰,۱]$ ۴) $[۱,۲]$

۴- ماشین f به عنوان ورودی اعداد حقیقی را قبول می‌کند و پس از دریافت، خودش را با قدرمطلقش جمع می‌کند. نمودار این تابع کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۵- اگر $f=\{(۲,-۱),(a,۴),(۲,a^۲-۲a),(۱,۲b)\}$ تابع باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۶- رابطهٔ $R=\{(۱,-a^۲+a-۱),(۲,b),(۱,b^۲)\}$ به ازای چند مقدار b، تابع می‌باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۷- اگر $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{a,b,c\}$، آن‌گاه کدام‌یک از روابط زیر، تابعی از A به B را نشان می‌دهد؟

$R_۱=\{(۱,b),(۲,a)\}$; $R_۲=\{(۱,a),(۲,c),(۱,b)\}$; $R_۳=\{(۱,a),(۲,a),(۳,c)\}$; $R_۴=\{(۱,a),(۲,a),(۳,b)\}$

۱) $R_۱,R_۲$ ۲) $R_۳,R_۴$ ۳) $R_۱,R_۴$ ۴) $R_۲,R_۳$

۸- اگر f به صورت $f=\{(۲,۵),(۵,a^۲+a+۲),(c,b^۲),(۵,۴b-۳),(۲,c)\}$ معرف یک تابع باشد، b چند مقدار می‌تواند داشته باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۹- اگر $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{d,e\}$ باشد، آن‌گاه چند تابع از A به B وجود دارد؟ (کتاب درسی)

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۵

۱۰- اگر $A=\{a,b,c,d\}$ و $B=\{۱,۲,۳\}$ باشد، با فرض $f(a)=۲$، چند تابع از A به B وجود دارد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۲۷ ۴) ۵۴

۱۱- اگر $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $B=\{a,b,c\}$ باشد، با فرض $f(۱)\neq b$ و $f(۳)\neq a$، چند تابع از A به B وجود دارد؟

۱) ۵۴ ۲) ۱۰۸ ۳) ۳۶۰ ۴) ۷۲۹

۱۲- چه تعداد از عبارات زیر درست هستند؟ (کتاب درسی)

الف) اگر دامنه و برد دو تابع با یک‌دیگر برابر باشند، دو تابع برابرند.

ب) برد و هم‌دامنهٔ تابع می‌توانند یکی باشند.

پ) هم‌دامنهٔ تابع زیرمجموعه‌ای از برد آن است.

ت) بی‌شمار تابع وجود دارد که دامنهٔ آن‌ها بازهٔ $[۰,۳]$ است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳- حداقل چند عضو از مجموعهٔ $f=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{Z}, x=\frac{۷۲}{y^۲-۱}\}$ حذف شود تا f، یک تابع باشد؟ (تجربی داخل ۱۴۰۲)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۴- حداقل چند عضو از مجموعهٔ $f=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{Z}, x=\frac{۳۰}{۱+|y|}\}$ حذف شود تا f، یک تابع باشد؟ (تجربی خارج ۱۴۰۲)

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

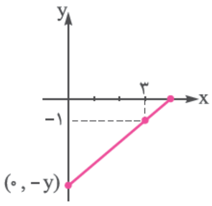
۱۵- اگر $\begin{cases} f:[۱,۵]\to B \\ f(x)=-x^۲+۴x-۳ \end{cases}$ باشد، آن‌گاه B کدام گزینهٔ زیر می‌تواند باشد؟

۱) $[-۸,۰]$ ۲) $(-\infty,۰]$ ۳) $[-۶,۳]$ ۴) $[-۹,۱]$

۱۶- کدام گزینه تابعی است که مساحت مثلث متساوی الاضلاع (S) را برحسب طول میانهٔ آن (m) نمایش می‌دهد؟

۱) $S=\frac{m^۲}{۲}$ ۲) $S=\frac{\sqrt{۳}}{۲}m^۲$ ۳) $S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}m^۲$ ۴) $S=\frac{\sqrt{۳}}{۳}m^۲$

۱۷- مطابق شکل، خطی که از نقطهٔ (۳,۱-) می‌گذرد با محورهای مختصات، مثلث قائم‌الزاویه می‌سازد. تابع مساحت این مثلث برحسب y کدام است؟ $(y>۱)$



۱) $S(y)=\frac{۲y-۲}{۳y^۲}$ ۲) $S(y)=\frac{۳y^۲}{۲y-۲}$

۳) $S(y)=\frac{۳y^۲}{y-۱}$ ۴) $S(y)=\frac{y-۱}{۳y^۲}$

۱۸- اگر S و V به‌ترتیب مساحت و حجم یک کره باشند، ضابطهٔ تابعی که V را برحسب S بیان کند، کدام است؟

۱) $V=\frac{۶}{\sqrt{\pi}}S\sqrt{S}$ ۲) $V=\frac{\sqrt{\pi}}{۶\pi}S\sqrt{S}$ ۳) $V=\frac{۱}{۶\sqrt{\pi}}\sqrt{S}$ ۴) $V=S\sqrt{\frac{S}{\pi}}$

۱۹- در درون کره‌ای به شعاع ۱۰ واحد مخروطی به ارتفاع h محاط کرده‌ایم. تابع حجم مخروط برحسب h کدام است؟

۱) $V(h)=\frac{\pi}{۳}(۲۰h^۲-h^۳)$ ۲) $V(h)=\frac{\pi}{۳}(h^۳-۱۰h^۲)$ ۳) $V(h)=\pi(۱۸h^۲-h^۳)$ ۴) $V(h)=\pi(h^۳-۲۴h)$

۲۰- اگر در دو تابع $f=\{(۲,a),(-۱,۱-b),(۲,-۲)\}$ و $g=\{(c,a^۲+۱),(۲b,۲),(۳,۵)\}$ تعداد اعضای دامنه برابر اما تعداد اعضای برد متفاوت باشد، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۴

معادلات و توابع

۲۱- کدام‌یک از معادلات زیر، y را به صورت تابعی از x مشخص می‌کند؟ (کتاب درسی)

۱) $x-y^۲=۴$ ۲) $x=|y|+۱$ ۳) $-x^۲+y=۴$ ۴) $x^۲=y^۲$

۲۲- در کدام‌یک از روابط زیر، y تابعی از x می‌باشد؟

۱) $y^۳+۳y^۲+۳y+x^۳+x=۰$ ۲) $y^۲+۲y=x-۱$ ۳) $|x|+|y-۱|=۱$ ۴) $|y|\sqrt[۳]{x}=۱$

۲۳- کدام‌یک از روابط زیر، معرف یک تابع می‌باشد؟

۱) $\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{N}, x^۲+y^۲=۵\}$ ۲) $\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{Z}, |x|+|y|=۲\}$

۳) $\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{Z}, x+y^۲=۵\}$ ۴) $\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{N}, x-|y-۳|=۰\}$

۲۴- کدام معادله، بیانگر یک تابع است؟

۱) $|y|=x+y$ ۲) $|y|=x+۲y$ ۳) $|y|=x-y$ ۴) $|y|=x+\frac{y}{۲}$

۲۵- کدام‌یک از معادلات زیر، y را به صورت تابعی از x مشخص نمی‌کند؟

۱) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-۲$ ۲) $(x-۱)^۲+(y-۲)^۲=۰$ ۳) $xy=۲x$ ۴) $y^۳+x^۳=۲x+۱$

۲۶- اگر $۲x^۲+y^۲-۴x+۶y+k=۰$ یک تابع ناتهی باشد، مقدار k کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۱۱ ۴) ۱۳

۲۷- کدام رابطه، یک تابع است؟

۱) $y^۳-۳y^۲+x=۰$ ۲) $y+y^۳=x^۳+۱$ ۳) $|y-۱|+x=۰$ ۴) $xy^۲-x=۱$

محاسبهٔ $f(x)$ و $f(\alpha)$

۲۸- اگر $f(x)=\sqrt{x+2|x|}$، مقدار $f(f(-144))$ کدام است؟

۱) تعریف نشده ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۲۹- اگر $f(x^3+x)=2x^2-1$ باشد، حاصل $f(2)+f(10)$ کدام است؟

۱) ۲۰۶ ۲) ۱۵۲ ۳) ۸ ۴) ۶

۳۰- اگر $f(x)=6f(x-2)+f(x-1)$، $f(1)=1$ و $f(2)=2$ باشد، آن‌گاه $f(4)$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۳۱- اگر $f(x)=x^3-6x^2+12x$ و $g(x)=x^3+9x^2+27x$ باشند، آن‌گاه حاصل $\dfrac{g(\sqrt[3]{7}-3)}{f(\sqrt[3]{2}+2)}$ کدام است؟

۱) -2 ۲) 2 ۳) 3 ۴) -3

۳۲- اگر $f(x)=|x|$ و $g(x)=x^2+2x+1$ باشند، حاصل $f(g(1-\sqrt{2}))-g(f(1-\sqrt{2}))$ کدام است؟

۱) $4(1-\sqrt{2})$ ۲) $4(\sqrt{2}-1)$ ۳) $4\sqrt{2}$ ۴) 4

۳۳- در تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^2(2-x)^2$، حاصل $f(1+x)-f(1-x)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $4x$ ۳) $2x^2$ ۴) $4x^2$

۳۴- اگر داشته باشیم $f(x^3-2)+f(6)=5x-4$، مقدار $f(-1)$ کدام است؟

۱) -2 ۲) 2 ۳) 3 ۴) -3

۳۵- اگر $f(x)=2-|x-2|$ باشد، ضابطهٔ $f(f(x))$ برابر کدام است؟

۱) x ۲) $4-x$ ۳) $f(x)$ ۴) $2-f(x)$

۳۶- اگر $f(x-3)=x^2-4x+5$ باشد، آن‌گاه $f(1-x)$ کدام است؟

۱) x^2+1 ۲) x^2+3 ۳) x^2+4x+5 ۴) x^2-4x+5

۳۷- اگر $f(x)=\dfrac{|x|}{|x|+1}$ باشد و داشته باشیم $f(x)=xf(\frac{1}{x})$، در این صورت محدودهٔ x کدام است؟

۱) $x>0$ ۲) $x<0$ ۳) $|x|<1$ ۴) $|x|>1$

۳۸- اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ و $g=\{(1,2),(5,4),(6,5),(2,3)\}$ باشد و بدانیم $g(f(a))=5$، آن‌گاه عدد a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۹- اگر $f(x)+xf(-x)=x^2+1$، آن‌گاه $f(2)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) 3 ۴) 4

۴۰- اگر $\dfrac{f(-x)}{\sin x}+\dfrac{f(x)}{\cos x}=2$، آن‌گاه $f(45^\circ)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) صفر ۴) $-\sqrt{2}$

۴۱- اگر داشته باشیم $f(\dfrac{x^2+2}{x})=x^2+\dfrac{4}{x^2}$، آن‌گاه مقدار $f(4)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۴۲- اگر $f(\dfrac{x}{x^2+1})=4+(x-\dfrac{1}{x})^2$ باشد، حاصل $f(\frac{1}{5})-f(\frac{1}{3})$ کدام است؟

۱) $\dfrac{1}{10}$ ۲) 12 ۳) 16 ۴) $\dfrac{1}{6}$

۴۳- اگر $f(1+\tan^2 x)=\dfrac{\cos^2 x-3}{1-2\cos^2 x}$ باشد، حاصل $f(3)$ کدام است؟

۱) 12 ۲) -12 ۳) -8 ۴) 8

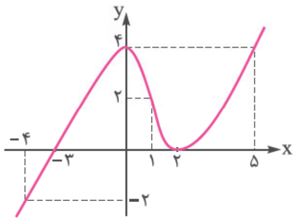
۴۴- اگر $f(\tan x)=\dfrac{3\sin x-\cos x}{2\sin x-3\cos x}$ باشد، آن‌گاه حاصل $f(2)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۵- اگر $2f(x)-f(\frac{1}{x})=3x$ و $3g(x)+4g(-x)=2x+1$ باشند، حاصل عبارت $(f+g)(-7)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) 1 ۳) -1 ۴) $\dfrac{1}{2}$

۴۶- اگر نمودار $y=f(x-3)$ به صورت روبه‌رو باشد، مقدار عددی $f(-\frac{1}{2}f(f(2)))$ کدام است؟



۱) ۴
۲) ۲
۳) -2
۴) صفر

توابع دوضابطه‌ای

۴۷- در تابع باضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x-\sqrt{x+4} & ; \quad x>3 \\ 2x+3 & ; \quad x\le 3 \end{cases}$، مقدار $f(f(5))+f(f(1))$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۴۸- تعداد صفرهای تابع دوضابطه‌ای $f(x)=\begin{cases} x^3-3a^2 & ; \ x\ge a \\ 1-3x & ; \ x\le a \end{cases}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۴۹- اگر $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2+3}+2a & ; \ |x|\le 1 \\ ax^2+5 & ; \ |x|\ge 1 \end{cases}$، ضابطه تابع f باشد، مقدار $f(a)$ کدام است؟ (تجربی داخل ۱۴۰۳ نوبت اول)

۱) ۴۶ ۲) ۳۲ ۳) ۲۵ ۴) ۱۴

۵۰- کدام‌یک از معادلات زیر y را به صورت تابعی از x مشخص می‌کند؟

۱) $y=\begin{cases} |x-1| & ; \ x\ge 0 \\ -x & ; \ x\le 0 \end{cases}$ ۲) $y=\begin{cases} -x^2+2 & ; \ x<1 \\ \frac{x}{2} & ; \ x>0 \end{cases}$ ۳) $y=\begin{cases} x-|x|+1 & ; \ x\ge 0 \\ |x|+1 & ; \ x\le 0 \end{cases}$ ۴) $y=\begin{cases} x & ; \ x<1 \\ -x+1 & ; \ x>0 \end{cases}$

۵۱- اگر $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & ; \ x>0 \\ 1 & ; \ x\le 0 \end{cases}$ باشد، مقدار $f(f(-f(x)))$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) x^2+2 ۳) ۳ ۴) $(x^2+1)^2+2$

۵۲- f تابعی است با دامنهٔ اعداد حقیقی که $f(2)=3$ و $f(-5)=-2$ می‌باشد. این تابع در بازهٔ $[0,2]$ ثابت و به هر عدد بزرگ‌تر از ۲ مربع آن را نسبت می‌دهد. هم‌چنین برای اعداد منفی، خطی است و نمودار آن محور xها را در نقطه‌ای به طول -3 قطع می‌کند. چه تعداد از مقادیر زیر صحیح است؟ (کتاب درسی)

$f(-1)=2 \ ; \ f(1)=3 \ ; \ f(3)=9 \ ; \ f(-3)=0$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

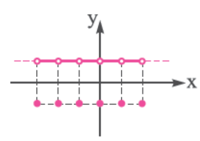
۵۳- اگر برد تابع $f(x)=\begin{cases} |x-3|+2 & ; \ x\ge 2 \\ ax+\frac{1}{2} & ; \ x<2 \end{cases}$ برابر $\mathbb{R}$ باشد، تمام مقادیر ممکن برای a کدام است؟

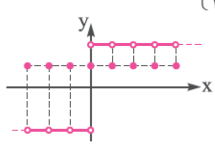
۱) $a\le \frac{3}{4}$ ۲) $a\ge \frac{3}{4}$ ۳) $a\ge \frac{5}{4}$ ۴) $a\le \frac{5}{4}$

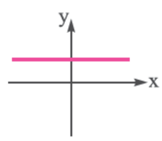
۵۴- اگر $f(x)=\begin{cases} \sqrt{2x+1} & ; \ x\in\mathbb{Q} \\ x^6+3x^4+3x^2 & ; \ x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$ باشد، حاصل $f(f(x))$ به ازای $x=\sqrt{\sqrt[3]{5}-1}$ کدام است؟

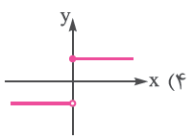
۱) ۳ ۲) ۹ ۳) ۱۵ ۴) ۱۷

۵۵- اگر $f(x)=\begin{cases} -\sqrt{2} & ; \ x\ge 0 \\ -\frac{1}{2} & ; \ x<0 \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} \frac{1}{2} & ; \ x\in\mathbb{Z} \\ \frac{3}{2} & ; \ x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$ باشند، نمودار تابع $y=f(f(x))+g(g(x))$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۵۶- اگر $f(x)=\begin{cases} x & ; \ x\in\mathbb{Q} \\ 1 & ; \ x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$ باشد، آن‌گاه حاصل $f(\sqrt{1})+f(\sqrt{2})+f(\sqrt{3})+...+f(\sqrt{100})$ کدام است؟

۱) ۹۰ ۲) ۱۳۵ ۳) ۱۴۵ ۴) ۲۰۰

انواع تابع

۵۷- کدام‌یک از خطوط زیر، نمودار $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+۲\ ;\ x>۰\\ \sqrt{x+۲}\ ;\ -۲\le x\le ۰\end{cases}$ را قطع نمی‌کند؟ (کتاب درسی)

۱) $y=\sqrt{۲}+۱$ ۲) $y=\sqrt{۲}-۱$ ۳) $y=۴-\sqrt{۵}$ ۴) $y=\sqrt{۵}-۱$

۵۸- چه تعداد از توابع زیر ثابت هستند؟

الف) $f(x)=\tan x\cot x$ ب) $g(x)=\sqrt{x-|x|}$ پ) $s(x)=[-[x]+x]$ ت) $t(x)=\frac{\sin x}{\sin x}$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۹- دو تابع $f(x)=b-۳ax$ و $g(x)=c-(۳b-۳)x$ ثابت هستند. اگر $f+g=۵$ باشد، حاصل bc چقدر است؟ (تجربی داخل ۱۴۰۱)

۱) -۶ ۲) -۴ ۳) ۴ ۴) ۶

۶۰- اگر $f(x)=(ax+۲)(b-x)-۷x^۲$ ضابطهٔ یک تابع ثابت باشد، برد تابع f کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۱)

۱) $-\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۲}{۷}$ ۳) $-\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

۶۱- کدام تابع ثابت است؟

۱) $f(x)=\left[\frac{۱}{۱+x^۲}\right]$ ۲) $g(x)=\sqrt{[x]-x}$ ۳) $h(x)=[\sin^۲ x]$ ۴) $t(x)=\cos(\pi[x])$

۶۲- اگر $f(x)$ یک تابع همانی باشد، آن‌گاه نقطهٔ تلاقی نمودار دو تابع $y_۱=f(۳x-۱)$ و $y_۲=f(۲-۲x)$ کدام است؟

۱) $(\frac{۲}{۵},\frac{۲}{۵})$ ۲) $(\frac{۳}{۵},\frac{۳}{۵})$ ۳) $(\frac{۳}{۵},\frac{۴}{۵})$ ۴) $(\frac{۲}{۵},\frac{۳}{۵})$

۶۳- معادلهٔ $|x-۱|-|x-۲|=\sqrt{x+۱}$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

محاسبهٔ دامنهٔ تابع

۶۴- اگر $f(x)=\dfrac{\frac{۱}{x-۱}-۱}{\frac{x}{x^۲-۱}+۱}$ باشد، آن‌گاه دامنهٔ تابع f شامل چند عدد حقیقی نمی‌باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۵- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\sqrt{۲x+۱}}{x^۲+(m+۳)x+n}$ به صورت $\mathbb{R}-\{\frac{۱}{۲}\}$ باشد، مقدار mn کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) -۱

۶۶- به ازای چند مقدار صحیح m، دامنهٔ تابع $y=\frac{x^۳-۲}{\sqrt{۲x^۲+(m+۲)x+\sqrt{۲}}}$ برابر $\mathbb{R}$ است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

۶۷- دامنهٔ تابع $y=\sqrt{۳-\sqrt{۱-۴x}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

۶۸- دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{-x^۲(x^۲-۴)^۲}$ چند عضو دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

۶۹- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\frac{x-۱}{x-۳}}+\sqrt{\frac{۲-x}{x}}$ کدام فاصله است؟

۱) $(۰,۱]$ ۲) $(۰,۳)$ ۳) $[۱,۲]$ ۴) $(۲,۳)$

۷۰- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x^2-1}{2x^2+(\log_2 a)x+b}$ به صورت $\mathbb{R}-\{-3,1\}$ باشد، مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{8}$ ۲) $-\frac{1}{24}$ ۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $\frac{1}{24}$

۷۱- اگر عبارت $\sqrt[3]{2x-x^2}+\sqrt[4]{\frac{2}{x^2}-\frac{9}{2}}$ عدد حقیقی باشد، مجموعهٔ مقادیر x در کدام بازه است؟ (تجربی خارج ۹۶)

۱) $[\frac{2}{3},2]$ ۲) $[-\frac{2}{3},\frac{2}{3}]$ ۳) $[-\frac{2}{3},0)\cup(0,2]$ ۴) $[-\frac{2}{3},0)\cup(0,\frac{2}{3}]$

۷۲- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{ax^2+x+a}$ برابر $\mathbb{R}$ باشد، حدود a کدام است؟

۱) $|a|\le\frac{1}{2}$ ۲) $|a|\ge\frac{1}{2}$ ۳) $a\ge\frac{1}{2}$ ۴) $a\le-\frac{1}{2}$

۷۳- دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$ با دامنهٔ کدام‌یک از توابع زیر برابر است؟

۱) $y=\log(\frac{x-1}{x+2})$ ۲) $y=\sqrt[4]{(x-1)(x+2)}$ ۳) $y=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}}$ ۴) $y=\sqrt{(x-1)(x+2)}+\frac{x+2}{x+2}$

۷۴- دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt[4]{\frac{x}{6}+4-|x|}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۹ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۸

۷۵- اگر $f(x)=\sqrt{x+|x+2|}$ باشد، دامنهٔ تابع $f(-x)$ کدام است؟

۱) $x\le-1$ ۲) $x\ge-1$ ۳) $x\le1$ ۴) $x\ge1$

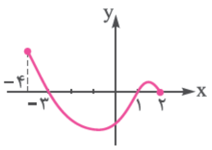
۷۶- دامنهٔ تابع $y=\sqrt{||x-1|-3|-2}$ شامل چند عدد صحیح نمی‌باشد؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۷۷- اگر $f(x)=x-1$ و $g(x)=x^2+2x$ باشند، کدام تابع، دامنه‌ای برابر $\mathbb{R}$ دارد؟

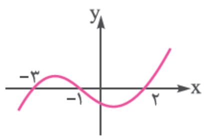
۱) $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ ۲) $y=\frac{1}{f(x)+g(x)}$ ۳) $y=\frac{g(x)}{g(x)-f(x)}$ ۴) $y=\frac{\sqrt[3]{f(x)}}{g(x)+1}$

۷۸- شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y=f(x)$ است. دامنهٔ تابع $y=\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟



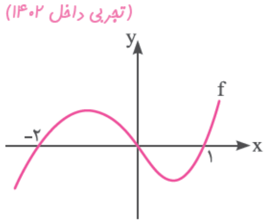
۱) $[0,2]$ ۲) $[-3,2]$ ۳) $[-4,-3]\cup[1,2]$ ۴) $[-3,0]\cup[1,2]$

۷۹- شکل روبه‌رو، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)$ است. دامنهٔ تابع غیرنقطه‌ای $\sqrt{(x+1)f(x)}$ کدام است؟



۱) $[-3,2]$ ۲) $[-1,+\infty)$ ۳) $(-\infty,-1]$ ۴) $\mathbb{R}-(-3,2)$

۸۰- نمودار زیر، تابع f را نشان می‌دهد. دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{-\frac{f(x)}{f(2+x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟ (تجربی داخل ۱۴۰۲)



۱) ۳
۲) ۶
۳) ۴
۴) ۵

۸۱- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{(a^2-4)x^2+(a+1)x+1}$ به‌صورت بازهٔ $(-\infty,b]$ باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{(b^2-4)x^2+(b+1)x+1}$ کدام است؟

۱) $[-\frac{1}{3},1]$ ۲) $[-1,\frac{1}{3}]$ ۳) $[-\frac{2}{3},1]$ ۴) $[-1,\frac{2}{3}]$

۸۲- دامنهٔ تغییرات تابع $f(x)=\log_6\frac{1}{6+\sqrt{|x|}-|x|}$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۱۴۰۰)

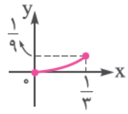
۱) $(-9,9)$ ۲) $(-4,9)$ ۳) $(4,9)$ ۴) $(-4,4)$

۸۳- دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\log_4(x^2-x-2)}{\sqrt{x^2-1}+1}$ کدام است؟ (تجربی داخل ۱۴۰۰)

۱) $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ ۲) $(-1,2)$ ۳) $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$ ۴) $(-2,1)$

پاسخ‌های تشریحی

۱ ۱ ابتدا نمودار تابع $f(x)=x^۲$ با دامنهٔ $[۰,\frac{۱}{۳}]$ را رسم می‌کنیم:



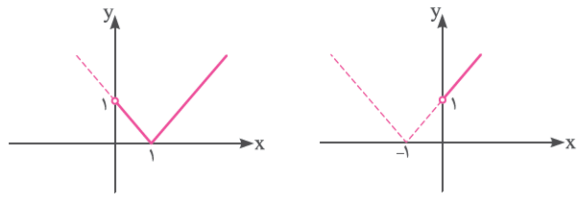
با توجه به نمودار، برد تابع بازهٔ $[۰,\frac{۱}{۹}]$ است، پس نمایشی قابل قبول است که دامنهٔ آن $[۰,\frac{۱}{۳}]$ باشد و هم‌دامنهٔ آن مجموعه‌ای انتخاب شود که برد تابع یعنی $[۰,\frac{۱}{۹}]$ زیرمجموعهٔ آن باشد.

توابع مربوط به (الف) و (پ) دامنه‌شان برابر بازهٔ $[۰,\frac{۱}{۳}]$ نمی‌باشد، پس قابل قبول نیستند. اما توابع مربوط به (ب) و (ت) دامنه‌شان $[۰,\frac{۱}{۳}]$ است و هم‌دامنه‌شان به گونه‌ای است که $[۰,\frac{۱}{۹}]$ زیرمجموعهٔ آن است. بنابراین هر دو قابل قبول‌اند.

به جای این‌که نمودار تابع رو واسه پیدا کردن برد رسم کنی، این‌طوری هم میشه برد رو حساب کرد:

$$۰\le x\le\frac{۱}{۳}\Rightarrow ۰\le x^۲\le\frac{۱}{۹}\Rightarrow R_f=[۰,\frac{۱}{۹}]$$

۲ ۴ توابع $f(x)=|x-۱|$ و $f(x)=|x+۱|$ را در $x>۰$ رسم می‌کنیم:



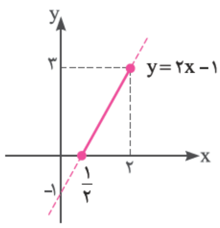
$f(x)=|x-۱|$ $f(x)=|x+۱|$

ملاحظه می‌شود برد تابع $f(x)=|x+۱|$، بازهٔ $(۱,+\infty)$ و برد تابع $f(x)=|x-۱|$، بازهٔ $[۰,+\infty)$ می‌باشد. بین گزینه‌ها، فقط در گزینهٔ (۴) برد و هم دامنه با هم برابرند.

۳ ۴ ابتدا معلوم می‌کنیم به ازای چه عددی مقدار تابع برابر صفر و ۳ می‌شود:

$$۲x-۱=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\ ;\ ۲x-۱=۳\Rightarrow x=۲$$

حال نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



می‌دانیم هم دامنهٔ تابع هر مجموعهٔ دلخواهی شامل برد است. یعنی برد تابع باید زیرمجموعهٔ هم دامنه باشد، بنابراین با توجه به شکل، A می‌تواند بازهٔ $[\frac{۱}{۲},۲]$ یا هر زیرمجموعه‌ای از آن باشد. در بین گزینه‌ها فقط گزینهٔ (۴) این شرط را دارد.

۴ ۳ با توجه به فرض سؤال، نمایش تابع به صورت $f(x)=x+|x|$ است. اگر دو حالت $x\ge ۰$ و $x<۰$ را برای آن در نظر بگیریم، تابع به صورت دو ضابطه‌ای $f(x)=\begin{cases}۲x & ;\ x\ge ۰\\ ۰ & ;\ x<۰\end{cases}$ در می‌آید و در نتیجه نمودار آن به صورت گزینهٔ (۳) می‌باشد.

۵ ۲ برای تابع بودن یک رابطه، نباید هیچ دو زوج مرتب متمایزی مؤلفه‌های اول یکسان داشته باشد، پس:

$$(۲,-۱)=(۲,a^۲-۲a)\Rightarrow a^۲-۲a=-۱\Rightarrow a^۲-۲a+۱=۰$$

$$\Rightarrow (a-۱)^۲=۰\Rightarrow a=۱\Rightarrow f=\{(۲,-۱),(۱,۴),(۱,۲b)\}$$

$$(۱,۴)=(۱,۲b)\Rightarrow ۲b=۴\Rightarrow b=۲\Rightarrow a+b=۳$$

۶ ۱ چون دو زوج مرتب با مؤلفهٔ اول ۱ وجود دارد، پس زمانی تابع است که مؤلفهٔ دوم آن‌ها برابر باشد، یعنی $-a^۲+a-۱=b^۲$. از طرفی در عبارت $-a^۲+a-۱$، ضریب $a^۲$ و علامت Δ هر دو منفی‌اند، پس همواره $-a^۲+a-۱<۰$ می‌باشد. حال چون $b^۲\ge ۰$، بنابراین معادلهٔ $-a^۲+a-۱=b^۲$ هیچ‌گاه ریشه ندارد.

۷ ۲ رابطه‌ای تابع است که به **هر** عضو A **دقیقاً** یک عضو از B را نسبت دهد. بنابراین رابطهٔ $R_۱$ تابع نیست، زیرا زوج مرتبی با مؤلفهٔ اول ۳ وجود ندارد. در $R_۲$ دو زوج مرتب با مؤلفهٔ اول یکسان وجود دارد ($(۱,a),(۱,b)$)، پس $R_۲$ نیز تابع نیست. اما روابط $R_۳$ و $R_۴$ تابع هستند.

۸ ۲ با استفاده از تعریف تابع داریم:

$$\begin{cases}(۲,۵)\in f\\ (۲,c)\in f\end{cases}\Rightarrow c=۵\Rightarrow f=\{(۲,۵),(۵,a^۲+a+۲),(۵,b^۲),(۵,۴b-۳)\}$$

$$\begin{cases}(۵,b^۲)\in f\\ (۵,۴b-۳)\in f\end{cases}\Rightarrow b^۲=۴b-۳\Rightarrow b^۲-۴b+۳=۰\Rightarrow b=۱ \text{ یا } b=۳$$

$$\begin{cases}b=۱\Rightarrow f=\{(۲,۵),(۵,a^۲+a+۲),(۵,۱)\}\Rightarrow a^۲+a+۲=۱\\ \Rightarrow a^۲+a+۱=۰ \xrightarrow{\Delta<۰} \text{برای a عدد حقیقی وجود ندارد.}\\ b=۳\Rightarrow f=\{(۲,۵),(۵,a^۲+a+۲),(۵,۹)\}\Rightarrow a^۲+a+۲=۹\\ \Rightarrow a^۲+a-۷=۰ \xrightarrow{\Delta>۰} \text{می‌تواند برقرار باشد.}\end{cases}$$

پس فقط یک مقدار $b=۳$ وجود دارد.

۹ ۲ **روش اول (مفهومی):** در توابع از A به B، به هر یک از عضوهای مجموعهٔ A یک عضو B را می‌توان نسبت داد:

$$f:A\to B\ :\ f=\{(a,\underset{\text{۲حالت}}{\bigcirc}),(b,\underset{\text{۲حالت}}{\bigcirc}),(c,\underset{\text{۲حالت}}{\bigcirc})\}$$

در هر یک از دایره‌های خالی یکی از دو عضو مجموعهٔ B می‌تواند قرار گیرد. یعنی در هر دایرهٔ خالی ۲ انتخاب داریم، پس طبق اصل ضرب داریم:

۲حالت × ۲حالت × ۲حالت $=۲^۳=۸$ حالت

روش دوم (فرمولی): طبق مطالب درسنامه اگر A، m عضو و B، n عضو داشته باشد، تعداد توابع از مجموعهٔ A به B برابر است با: n^m، پس $۸=۲^۳$ حالت وجود دارد.

۱۰ ۳ چون $f(a)=۲$ است، پس برای $f(a)$ فقط یک حالت وجود دارد. اما برای $f(b)$، $f(c)$ و $f(d)$ سه حالت (۱ یا ۲ یا ۳) امکان دارد، بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

$$f:A\to B\ :\ f=\{(a,\underset{\text{۱ حالت}}{۲}),(b,\underset{\text{۳حالت}}{\bigcirc}),(c,\underset{\text{۳حالت}}{\bigcirc}),(d,\underset{\text{۳ حالت}}{\bigcirc})\}$$

۱ حالت × ۳حالت × ۳حالت × ۳ حالت $=۳^۳=۲۷$

۱۱ ۲ چون $f(۱)\ne b$ است، پس برای $f(۱)$ دو حالت وجود دارد ($f(۱)=a$ یا $f(۱)=c$). همچنین $f(۳)\ne a$ می‌باشد، پس برای $f(۳)$ نیز دو حالت وجود دارد. ($f(۳)=c$ یا $f(۳)=b$)، اما برای $f(۲)$، $f(۴)$ و $f(۵)$ سه حالت (a یا b یا c) امکان دارد. بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

$$f:A\to B\ :\ f=\{(۱,\bigcirc),(۲,\bigcirc),(۳,\bigcirc),(۴,\bigcirc),(۵,\bigcirc)\}$$

۲حالت × ۳حالت × ۲ حالت × ۳ حالت × ۳ حالت $=۱۰۸$

پس ۱۰۸ تابع از A به B می‌توان نوشت.

۱۲ **۲** ممکن است دامنه و برد دو تابع برابر باشند اما دو تابع برابر نباشند. برای مثال اگر $f(x)=x^۲$ و $g(x)=۲x^۲$ را در نظر بگیریم، آن‌گاه $D_f=D_g=\mathbb{R}$ و $R_f=R_g=[۰,+\infty)$، اما چون ضابطه‌های یکسان ندارند، پس برابر نیستند و در نتیجه عبارت (الف) درست نیست.

طبق تعریف، برد یک تابع، زیرمجموعهٔ هم‌دامنه است، بنابراین برد و هم‌دامنهٔ تابع می‌توانند برابر باشند، اما هم‌دامنه زیرمجموعهٔ برد نیست، پس عبارت (ب) درست و عبارت (پ) نادرست است. هم‌چنین به ازای هر دامنهٔ مشخص غیرتهی، بی‌شمار تابع می‌توان مشخص کرد. برای مثال توابع $f_۱(x)=\sqrt{x(۳-x)}$، $f_۲=۲\sqrt{x(۳-x)}$ و $f_۳(x)=۳\sqrt{x(۳-x)}$ و ... همگی دارای دامنهٔ $[۰,۳]$ هستند. بنابراین عبارت (ت) هم درست است.

۱۳ **۲** ابتدا اعضای مجموعه را می‌نویسیم. چون در این معادله، x برحسب y نوشته شده، پس به جای y، یک عدد صحیح قرار می‌دهیم طوری که مقدار x به‌دست آمده، صحیح شود. با توجه به $x=\frac{۷۲}{y^۲-۱}$ داریم:

$$y=۰\Rightarrow x=-۷۲ \quad ; \quad y=\pm۱\Rightarrow x=\text{تعریف‌نشده}$$
$$y=\pm۲\Rightarrow x=۲۴ \quad ; \quad y=\pm۳\Rightarrow x=۹$$
$$y=\pm۴\Rightarrow x\notin\mathbb{Z} \quad ; \quad y=\pm۵\Rightarrow x=۳$$

به ازای بقیهٔ مقادیر صحیح y، عدد صحیحی برای x یافت نمی‌شود. بنابراین اعضای مجموعه به‌صورت زیر می‌باشد:

$$f=\{(-۷۲,۰),\underline{(۲۴,۲)},\underline{(۲۴,-۲)},\underline{\underline{(۹,۳)}},\underline{\underline{(۹,-۳)}},\underline{\underline{\underline{(۳,۵)}}},\underline{\underline{\underline{(۳,-۵)}}}\}$$

می‌دانیم یک رابطه زمانی تابع است که به ازای هر x از دامنه، فقط یک مقدار برای y وجود داشته باشد. پس حداقل یکی از زوج‌مرتب‌هایی که مؤلفهٔ اول آن‌ها یکسان است باید حذف شود، در نتیجه از این مجموعه حداقل سه عضو باید حذف شود.

می‌دونی اگر در صورت سؤال به کلمهٔ حداقل اشاره نمی‌شد، چه اتفاقی می‌افتاد؟ اون‌وقت جواب منحصر به فردی برای این تست نداشتیم. مثلاً اگر به جای سه عضو، چهار عضو یا پنج عضو حذف می‌کردیم، باز هم f، تابع می‌شد.

۱۴ **۱** ابتدای اعضای مجموعه را می‌نویسیم. برای این کار به جای y، یک عدد صحیح قرار می‌دهیم طوری که مقدار x به‌دست آمده، صحیح شود. با توجه به $x=\frac{۳۰}{۱+|y|}$ داریم:

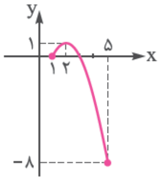
$$y=۰\Rightarrow x=۳۰ \quad ; \quad y=\pm۱\Rightarrow x=۱۵$$
$$y=\pm۲\Rightarrow x=۱۰ \quad ; \quad y=\pm۴\Rightarrow x=۶$$
$$y=\pm۵\Rightarrow x=۵ \quad ; \quad y=\pm۹\Rightarrow x=۳$$
$$y=\pm۱۴\Rightarrow x=۲ \quad ; \quad y=\pm۲۹\Rightarrow x=۱$$

به ازای بقیهٔ مقادیر صحیح y، عدد صحیحی برای x یافت نمی‌شود. بنابراین اعضای مجموعه به‌صورت زیر می باشد:

$$f=\{(۳۰,۰),(۱۵,\pm۱),(۱۰,\pm۲),(۶,\pm۴),(۵,\pm۵),(۳,\pm۹),(۲,\pm۱۴),(۱,\pm۲۹)\}$$

می دانیم یک رابطه زمانی تابع است که به ازای هر x از دامنه، فقط یک مقدار برای y وجود داشته باشد، پس حداقل یکی از زوج مرتب‌هایی که مؤلفهٔ اول آن‌ها یکسان است باید حذف شود، در نتیجه در مجموعهٔ f با حذف حداقل ۷ عضو می‌توان به یک تابع رسید.

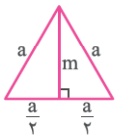
۱۵ **۴** بازه‌ای را باید انتخاب کنیم که برد تابع، زیرمجموعهٔ آن باشد. برای تعیین برد سهمی، چون دامنهٔ آن به صورت بازهٔ $[۱,۵]$ محدود شده، بهتر است نمودار آن را رسم کنیم. برای این کار مختصات رأس سهمی و نقاط سر و ته آن را مشخص می‌کنیم:



$$x_S=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۴}{-۲}=۲\Rightarrow y_S=۱$$

با توجه به نمودار، برد تابع، بازهٔ $[-۸,۱]$ است. چون این بازه، زیرمجموعهٔ $[-۹,۱]$ می‌باشد، پس گزینهٔ (۴) صحیح است.

۱۶ **۴** در مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع و میانه روی هم قرار دارند، پس داریم:



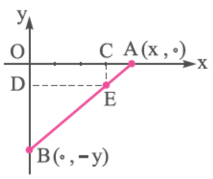
$$S=\frac{۱}{۲}ma$$

از طرفی با توجه به رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$m^۲+(\frac{a}{۲})^۲=a^۲\Rightarrow\frac{۳a^۲}{۴}=m^۲\Rightarrow a=\frac{۲m}{\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}\times m\times\frac{۲m}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}m^۲$$

۱۷ **۲** مساحت مثلث به صورت $S=\frac{۱}{۲}xy$ می‌باشد. در مثلث ABO، پاره‌خط CE با OB موازی است، با توجه به قضیهٔ تالس، x را برحسب y به دست می‌آوریم:



$$\frac{CE}{OB}=\frac{AC}{AO}\Rightarrow\frac{۱}{y}=\frac{x-۳}{x}$$
$$\Rightarrow\frac{۱}{y}=۱-\frac{۳}{x}\Rightarrow\frac{۳}{x}=\frac{y-۱}{y}\Rightarrow x=\frac{۳y}{y-۱}$$
$$S=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳y}{y-۱}\times y\Rightarrow S=\frac{۳y^۲}{۲y-۲}$$

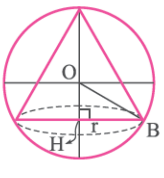
۱۸ **۲**

$$V=\frac{۴}{۳}\pi r^۳ : \text{حجم کره}$$

$$S=۴\pi r^۲\Rightarrow r^۲=\frac{S}{۴\pi}\Rightarrow r=\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{S}{\pi}}\Rightarrow V=\frac{۴\pi}{۳}(r^۲)r : \text{مساحت کره}$$

$$=\frac{۴\pi}{۳}\times\frac{S}{۴\pi}\times\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{S}{\pi}}\Rightarrow V=\frac{\sqrt{\pi}}{۶\pi}S\sqrt{S}$$

۱۹ **۱** اگر r شعاع مخروط و h ارتفاع مخروط باشد، در مثلث OHB طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:



$$OB^۲=OH^۲+HB^۲\Rightarrow۱۰^۲=(h-۱۰)^۲+r^۲$$
$$\Rightarrow r^۲=۱۰۰-(h^۲+۱۰۰-۲۰h)\Rightarrow r^۲=۲۰h-h^۲$$

حجم مخروط برابر $V=\frac{۱}{۳}\pi r^۲.h$ می‌باشد که با جای‌گذاری $r^۲=۲۰h-h^۲$ داریم:

$$V(h)=\frac{\pi}{۳}(۲۰h^۲-h^۳)$$

۲۰ **۴** در تابع f چون دو زوج مرتب $(۲,a)$ و $(۲,-۲)$ وجود دارند، پس باید $a=-۲$ باشد. بنابراین داریم:

$$f=\{(۲,-۲),(-۱,۱-b)\}\ ,\ g=\{(c,۵),(۲b,۲),(۳,۵)\}$$

برد تابع g شامل دو عضو $\{۲,۵\}$ می‌باشد. چون طبق فرض، تعداد اعضای برد f و g متفاوت است، پس با توجه به تابع f باید تعداد اعضای برد f برابر ۱ باشد و در نتیجه داریم:

$$۱-b=-۲\Rightarrow b=۳\Rightarrow g=\{(c,۵),(۶,۲),(۳,۵)\}$$

در آخر این‌که چون تعداد اعضای دامنهٔ f و g برابر است، پس $c=۳$ و در نتیجه $a+b+c=-۲+۳+۳=۴$ می‌شود.

۲۱ **۳** هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) در معادلهٔ $x-y^۲=۴$، به‌ازای $x=۵$ داریم: $y=\pm۱$. پس این معادله تابع نیست.

۲) در معادلهٔ $x=|y|+۱$، به‌ازای $x=۲$ داریم: $y=\pm۱$. بنابراین این معادله تابع نیست.

۳) از معادلهٔ $-x^۲+y=۴$ نتیجه می‌گیریم $y=۴+x^۲$. چون این معادله به صورت صریح $y=f(x)$ نمایش داده شده، پس به‌ازای هر x فقط یک مقدار برای y وجود دارد. پس معادله تابع است.

۴) در معادلهٔ $x^۲=y^۲$، به‌ازای $x=۱$ داریم $y=\pm۱$. بنابراین این معادله تابع نیست.

۲۲ **۱** رابطه‌ای که تابع است را بررسی می‌کنیم و برای اثبات تابع نبودن بقیهٔ گزینه‌ها مثال نقض می‌آوریم:

$$۱)\ y^۳+۳y^۲+۳y+۱-۱+x^۳+x=۰\Rightarrow(y+۱)^۳-۱+x^۳+x=۰$$

$$\Rightarrow(y+۱)^۳=-x^۳-x+۱\xRightarrow{\sqrt[۳]{\ }}y+۱=\sqrt[۳]{-x^۳-x+۱}$$

$$\Rightarrow y=\sqrt[۳]{-x^۳-x+۱}-۱$$

چون معادله به صورت $y=f(x)$ بیان شده و به ازای هر x فقط یک مقدار برای y وجود دارد، پس این معادله تابع است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) $x=۱\Rightarrow y^۲+۲y=۰\Rightarrow y(y+۲)=۰\Rightarrow y=۰$ یا $y=-۲\Rightarrow$ تابع نیست.

۳) $x=۰\Rightarrow|y-۱|=۱\Rightarrow y-۱=\pm۱\Rightarrow y=۰$ یا $y=۲\Rightarrow$ تابع نیست.

۴) $x=۱\Rightarrow|y|=۱\Rightarrow y=\pm۱\Rightarrow$ تابع نیست.

۲۳ **۱** *توی این روابط حتماً باید به این‌که x و y متعلق به چه مجموعه‌هایی هستن توجه کرد.*

اگر x و y طبیعی باشند، معادلهٔ $x^۲+y^۲=۵$ فقط شامل دو زوج مرتب $\{(۲,۱),(۱,۲)\}$ می‌باشد که تابع است. حال برای بقیهٔ گزینه‌ها مثال نقض می‌آوریم:

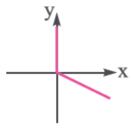
۲) $x=۰\Rightarrow y=\pm۲$

۳) $x=۱\Rightarrow y=\pm۲$

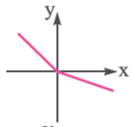
۴) $x=۱\Rightarrow y=۲$ یا $y=۴$

۲۴ **۲** **روش اول:** هر یک از معادلات را در دو حالت $y\geq۰$ و $y<۰$ به صورت ساده‌تر نوشته و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

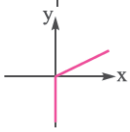
$$۱)\ |y|=x+y:\begin{cases}y\geq۰\Rightarrow y=x+y\Rightarrow x=۰\\ y<۰\Rightarrow -y=x+y\\ \Rightarrow -۲y=x\Rightarrow y=-\dfrac{x}{۲}\end{cases}$$



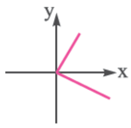
$$۲)\ |y|=x+۲y:\begin{cases}y\geq۰\Rightarrow y=x+۲y\Rightarrow y=-x\\ y<۰\Rightarrow -y=x+۲y\Rightarrow y=-\dfrac{x}{۳}\end{cases}$$



$$۳)\ |y|=x-y:\begin{cases}y\geq۰\Rightarrow y=x-y\Rightarrow y=\dfrac{x}{۲}\\ y<۰\Rightarrow -y=x-y\Rightarrow x=۰\end{cases}$$



$$۴)\ |y|=x+\frac{y}{۲}:\begin{cases}y\geq۰\Rightarrow y=x+\dfrac{y}{۲}\Rightarrow\dfrac{y}{۲}=x\Rightarrow y=۲x\\ y<۰\Rightarrow -y=x+\dfrac{y}{۲}\\ \Rightarrow\dfrac{-۳y}{۲}=x\Rightarrow y=\dfrac{-۲x}{۳}\end{cases}$$



همان‌طور که می‌بینید تنها در گزینهٔ (۲) هر خط موازی محور yها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

روش دوم (مثال نقض): برای هر یک از گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) مثال نقض می‌آوریم:

$$۱)\ x=۰\Rightarrow|y|=y\Rightarrow y\geq۰\Rightarrow y\in[۰,+\infty)$$

$$۳)\ x=۰\Rightarrow|y|=-y\Rightarrow y\leq۰\Rightarrow y\in(-\infty,۰]$$

$$۴)\ x=۱\Rightarrow|y|=۱+\frac{y}{۲}:\begin{cases}y\geq۰\Rightarrow y=۱+\dfrac{y}{۲}\Rightarrow۲y=۲+y\Rightarrow y=۲\\ y<۰\Rightarrow -y=۱+\dfrac{y}{۲}\Rightarrow-۲y=۲+y\Rightarrow y=\dfrac{-۲}{۳}\end{cases}$$

۲۵ **۳** **بررسی گزینه‌ها:**

۱) y را بر حسب x به دست می‌آوریم:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-۲\Rightarrow\frac{x^۲+y^۲}{xy}=-۲\Rightarrow x^۲+y^۲=-۲xy$$

$$\Rightarrow x^۲+y^۲+۲xy=۰\Rightarrow(x+y)^۲=۰\Rightarrow y=-x$$

در رابطهٔ $y=-x$، به ازای هر x فقط یک y وجود دارد، پس تابع است.

۲) می‌دانیم مجموع دو عبارت نامنفی زمانی صفر است که تک‌تک آن‌ها هم‌زمان صفر باشند. پس جواب معادلهٔ $(x-۱)^۲+(y-۲)^۲=۰$ فقط نقطهٔ $(۱,۲)$ می‌باشد که تابع است.

۳) معادلهٔ $xy=۲x$ را حل می‌کنیم:

$$xy-۲x=۰\Rightarrow x(y-۲)=۰\Rightarrow x=۰\ \text{ یا }\ y=۲$$

خط $x=۰$ یک خط عمودی است، پس این رابطه، تابع نیست.

۴) y را بر حسب x به دست می‌آوریم:

$$y^۳+x^۳=۲x+۱\Rightarrow y^۳=-x^۳+۲x+۱\Rightarrow y=\sqrt[۳]{-x^۳+۲x+۱}$$

در این رابطه نیز به ازای هر x فقط یک y وجود دارد، پس تابع است.

۲۶ ۳ عبارت را به صورت مربع کامل می‌نویسیم:

$$2x^2+y^2-4x+6y+k=0 \Rightarrow 2(x^2-2x)+(y^2+6y)+k=0$$

$$\Rightarrow 2((x-1)^2-1)+(y+3)^2-9+k=0 \Rightarrow 2(x-1)^2+(y+3)^2=11-k$$

اگر $11-k>0$ باشد، به ازای مقادیری از x دو جواب برای y به دست می‌آید، پس تابع نیست.

اگر $11-k<0$ باشد، معادله جواب ندارد و در نتیجه تابع تهی می‌باشد.

اگر $11-k=0$ باشد، تنها جواب معادله، زوج مرتب $(1,-3)$ می‌باشد که تابعی ناتهی است، پس $k=11$ می‌شود.

۲۷ ۲ می‌دانیم با مثال نقض می‌توان تابع نبودن یک رابطه را اثبات کرد. بنابراین داریم:

۱) $x=0 \Rightarrow y^3-3y^2=0 \Rightarrow y^2(y-3)=0 \Rightarrow y=0$ یا $y=3 \Rightarrow$ تابع نیست.

۳) $x=-1 \Rightarrow |y-1|=1 \Rightarrow y-1=\pm 1 \Rightarrow y=0$ یا $y=2 \Rightarrow$ تابع نیست.

۴) $x=1 \Rightarrow y^2-1=1 \Rightarrow y^2=2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{2} \Rightarrow$ تابع نیست.

در نتیجه، رابطهٔ گزینهٔ (۲) تابع می‌باشد.

چون فهمیدیم گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) تابع نیستند، دیگه نیازی به اثبات تابع بودن گزینهٔ (۲) نیست. کتاب درسی هم اشاره‌ای به تابع بودن این نوع معادلات نداشته. روش‌های مختلفی برای بررسی این معادلات داریم که بهترینش استفاده از مشتقه که در فصل مشتق می‌خونید.

۲۸ ۲

$$f(x)=\sqrt{x+2|x|} \Rightarrow f(-144)=\sqrt{-144+2|-144|}$$

$$=\sqrt{-144+2\times 144}=\sqrt{144}=12$$

$$f(f(-144))=f(12)=\sqrt{12+2\times 12}=\sqrt{36}=6$$

۲۹ ۳ در رابطهٔ $f(x^3+x)=2x^2-1$ برای محاسبهٔ $f(2)$ به جای x عدد ۱ و برای محاسبهٔ $f(10)$ به جای x عدد ۲ را می‌گذاریم، پس:

$$\begin{cases} x=1 \Rightarrow f(2)=2-1=1 \\ x=2 \Rightarrow f(10)=8-1=7 \end{cases} \Rightarrow f(2)+f(10)=1+7=8$$

۳۰ ۲ در رابطهٔ $f(x)=6f(x-2)+f(x-1)$ به جای x عدد ۴ را قرار می‌دهیم:

$$f(4)=6f(2)+f(3)$$

حال در رابطهٔ قبل به جای x عدد ۳ را قرار می‌دهیم:

$$f(3)=6f(1)+f(2)=6(1)+2=8$$

$$\Rightarrow f(4)=6f(2)+f(3)=6(2)+8=20$$

۳۱ ۱ با توجه به اتحاد مکعب دوجمله‌ای سعی می‌کنیم عبارات f و g را به صورت ساده‌تری بنویسیم:

$$\begin{cases} f(x)=x^3-6x^2+12x-8+8 \Rightarrow f(x)=(x-2)^3+8 \\ \Rightarrow f(\sqrt[3]{2}+2)=(\sqrt[3]{2}+2-2)^3+8=2+8=10 \\ g(x)=x^3+9x^2+27x+27-27 \Rightarrow g(x)=(x+3)^3-27 \\ \Rightarrow g(\sqrt[3]{7}-3)=(\sqrt[3]{7}-3+3)^3-27=7-27=-20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{g(\sqrt[3]{7}-3)}{f(\sqrt[3]{2}+2)}=\frac{-20}{10}=-2$$

۳۲ ۱ باتوجه‌به توابع $f(x)=|x|$ و $g(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$ داریم:

$$g(1-\sqrt{2})=(1-\sqrt{2}+1)^2=(2-\sqrt{2})^2=4-4\sqrt{2}+2=6-4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow f(g(1-\sqrt{2}))=f(6-4\sqrt{2})=|6-4\sqrt{2}|=|6-\sqrt{16\times 2}|$$

$$=|6-\sqrt{32}| \xrightarrow[\sqrt{32}\simeq 5/...]{6-\sqrt{32}>0} 6-\sqrt{32}=6-4\sqrt{2}$$

$$f(1-\sqrt{2})=|1-\sqrt{2}| \xrightarrow[\sqrt{2}\simeq 1/4]{1-\sqrt{2}<0} -(1-\sqrt{2})=\sqrt{2}-1$$

$$\Rightarrow g(f(1-\sqrt{2}))=g(\sqrt{2}-1)=(\sqrt{2}-1+1)^2=2$$

$$\Rightarrow f(g(1-\sqrt{2}))-g(f(1-\sqrt{2}))=6-4\sqrt{2}-2=4-4\sqrt{2}=4(1-\sqrt{2})$$

۳۳ ۱ با توجه به تابع $f(x)=x^2(2-x)^2$ داریم:

$$\begin{cases} f(1+x)=(1+x)^2(2-(1+x))^2=(1+x)^2(1-x)^2 \\ f(1-x)=(1-x)^2(2-(1-x))^2=(1-x)^2(1+x)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(1+x)=f(1-x) \Rightarrow f(1+x)-f(1-x)=0$$

۳۴ ۱ ابتدا باید $f(6)$ را تعیین کنیم. برای این منظور کافی است جای x عددی قرار دهیم تا مقدار x^3-2 هم ۶ شود. بنابراین:

$$f(x^3-2)+f(6)=5x-4 \xrightarrow{x=2} f(6)+f(6)=10-4$$

$$\Rightarrow 2f(6)=6 \Rightarrow f(6)=3$$

حال معادله را به صورت ساده‌تر نوشته و برای محاسبهٔ $f(-1)$ به جای x عدد ۱ را قرار می‌دهیم:

$$f(x^3-2)+3=5x-4 \Rightarrow f(x^3-2)=5x-7 \xrightarrow{x=1} f(-1)=-2$$

۳۵ ۳ با توجه به تابع $f(x)=2-|x-2|$ داریم:

$$f(f(x))=f(2-|x-2|)=2-|(2-|x-2|)-2|=2-|-|x-2||$$

$$=2-|x-2|=f(x)$$

۳۶ ۴ برای محاسبهٔ $f(1-x)$ دو بار از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم:

$$x-3=t \Rightarrow x=t+3 \Rightarrow f(t)=(t+3)^2-4(t+3)+5$$

$$t=1-x \Rightarrow f(1-x)=(1-x+3)^2-4(1-x+3)+5$$

$$=(4-x)^2-4(4-x)+5=x^2-8x+16-16+4x+5=x^2-4x+5$$

۳۷ ۱ عبارت $xf(\frac{1}{x})$ را به دست آورده و برابر $f(x)$ قرار می‌دهیم:

$$xf(\frac{1}{x})=x\frac{|\frac{1}{x}|}{|\frac{1}{x}|+1}=\frac{x(\frac{1}{|x|})}{\frac{1}{|x|}+1}=\frac{\frac{x}{\cancel{|x|}}}{\frac{1+|x|}{\cancel{|x|}}}\overset{x\neq 0}{=\!=}\frac{x}{1+|x|}$$

$$f(x)=xf(\frac{1}{x}) \Rightarrow \frac{|x|}{|x|+1}=\frac{x}{|x|+1} \Rightarrow |x|=x \Rightarrow x>0$$

۳۸ ۴ با توجه به تابع g، $g(6)=5$ است، بنابراین:

$$g(f(a))=5 \xrightarrow{g(6)=5} f(a)=6 \Rightarrow a+\sqrt{a}=6$$

با تغییر متغیر $\sqrt{a}=t$، معادله را حل می‌کنیم:

$$t^{۲}+t-۶=۰\Rightarrow(t+۳)(t-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}t=-۳\Rightarrow\sqrt{a}=-۳\ (\text{غ‌ق‌ق})\\ t=۲\Rightarrow\sqrt{a}=۲\Rightarrow a=۴\end{cases}$$

۳۹ ۱ در معادلهٔ داده‌شده به جای x اعداد ۲ و ۲- را قرار می‌دهیم:

$$f(x)+xf(-x)=x^{۲}+۱\Rightarrow\begin{cases}x=۲\Rightarrow f(۲)+۲f(-۲)=۵\\ x=-۲\Rightarrow f(-۲)-۲f(۲)=۵\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\times(-۲)}\begin{cases}f(۲)+۲f(-۲)=۵\\ -۲f(-۲)+۴f(۲)=-۱۰\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع}}۵f(۲)=-۵\Rightarrow f(۲)=-۱$$

۴۰ ۳ در معادلهٔ $\frac{f(x)}{\cos x}+\frac{f(-x)}{\sin x}=۲$ به جای x یک بار ۴۵° و یک بار -۴۵° را قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases}x=۴۵^\circ\Rightarrow\dfrac{f(۴۵^\circ)}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}+\dfrac{f(-۴۵^\circ)}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=۲\xrightarrow{\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}}f(۴۵^\circ)+f(-۴۵^\circ)=\sqrt{۲}\\ x=-۴۵^\circ\Rightarrow\dfrac{f(-۴۵^\circ)}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}+\dfrac{f(۴۵^\circ)}{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=۲\xrightarrow{\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}}f(-۴۵^\circ)-f(۴۵^\circ)=\sqrt{۲}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفریق}}۲f(۴۵^\circ)=۰\Rightarrow f(۴۵^\circ)=۰$$

۴۱ ۴ به‌کمک اتحاد $a^{۲}+b^{۲}=(a+b)^{۲}-۲ab$ عبارت $x^{۲}+\frac{۴}{x^{۲}}$ را برحسب $\frac{x^{۲}+۲}{x}$ می‌نویسیم:

$$f(\frac{x^{۲}+۲}{x})=x^{۲}+\frac{۴}{x^{۲}}\Rightarrow f(\frac{x^{۲}}{x}+\frac{۲}{x})=x^{۲}+(\frac{۲}{x})^{۲}$$

$$\Rightarrow f(x+\frac{۲}{x})=(x+\frac{۲}{x})^{۲}-۴$$

با فرض $x+\frac{۲}{x}=t$ داریم:

$$f(t)=t^{۲}-۴\Rightarrow f(۴)=۱۶-۴=۱۲$$

۴۲ ۳ ابتدا عبارت را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(\frac{x}{x^{۲}+۱})=۴+(x-\frac{۱}{x})^{۲}=۴+(x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}-۲)=x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}+۲$$

$$=(x+\frac{۱}{x})^{۲}=(\frac{x^{۲}+۱}{x})^{۲}\Rightarrow f(\frac{x}{x^{۲}+۱})=(\frac{x^{۲}+۱}{x})^{۲}$$

حال با فرض $t=\frac{x}{x^{۲}+۱}$، نتیجه می‌گیریم $f(t)=(\frac{۱}{t})^{۲}$، بنابراین داریم:

$$f(x)=(\frac{۱}{x})^{۲}\Rightarrow f(\frac{۱}{۵})-f(\frac{۱}{۳})=۵^{۲}-۳^{۲}=۲۵-۹=۱۶$$

۴۳ ۳ اگر فرض کنیم $۱+\tan^{۲}x=t$ آن‌گاه به کمک اتحاد مثلثاتی $۱+\tan^{۲}x=\frac{۱}{\cos^{۲}x}$، عبارت را بر حسب t می‌نویسیم:

$$۱+\tan^{۲}x=\frac{۱}{\cos^{۲}x}=t\Rightarrow\cos^{۲}x=\frac{۱}{t}$$

$$f(۱+\tan^{۲}x)=\frac{\cos^{۲}x-۳}{۱-۲\cos^{۲}x}\Rightarrow f(t)=\frac{\frac{۱}{t}-۳}{۱-\frac{۲}{t}}=\frac{\frac{۱-۳t}{\cancel{t}}}{\frac{t-۲}{\cancel{t}}}\overset{t\neq ۰}{=}\frac{۱-۳t}{t-۲}$$

$$\Rightarrow f(۳)=\frac{۱-۹}{۳-۲}=-۸$$

۴۴ ۱ صورت و مخرج کسر را بر $\cos x\neq ۰$ تقسیم می‌کنیم:

$$f(\tan x)=\frac{\frac{۳\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\cos x}}{\frac{۲\sin x}{\cos x}-\frac{۳\cos x}{\cos x}}\Rightarrow f(\tan x)=\frac{۳\tan x-۱}{۲\tan x-۳}$$

$$\xrightarrow{\tan x=۲}f(۲)=\frac{۳(۲)-۱}{۲(۲)-۳}=\frac{۵}{۱}=۵$$

۴۵ ۱ در رابطهٔ $۲f(x)-f(\frac{۱}{x})=۳x$ به جـــای x، $\frac{۱}{x}$ قرار می‌دهیم و دستگاه را حل می‌کنیم:

$$\times۲\begin{cases}۲f(x)-f(\frac{۱}{x})=۳x\\ ۲f(\frac{۱}{x})-f(x)=\frac{۳}{x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۴f(x)-۲f(\frac{۱}{x})=۶x\\ ۲f(\frac{۱}{x})-f(x)=\frac{۳}{x}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع}}۳f(x)=۶x+\frac{۳}{x}\Rightarrow f(x)=۲x+\frac{۱}{x}\quad(*)$$

در رابطهٔ $۳g(x)+۴g(-x)=۲x+۱$ به جای x، x- قرار می‌دهیم و دستگاه را حل می‌کنیم:

$$\begin{matrix}\times۳\\ \times(-۴)\end{matrix}\begin{cases}۳g(x)+۴g(-x)=۲x+۱\\ ۳g(-x)+۴g(x)=-۲x+۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۹g(x)+۱۲g(-x)=۶x+۳\\ -۱۲g(-x)-۱۶g(x)=۸x-۴\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع}}-۷g(x)=۱۴x-۱\Rightarrow g(x)=-۲x+\frac{۱}{۷}\quad(**)$$

$$(*),(**)\Rightarrow(f+g)(x)=\frac{۱}{x}+\frac{۱}{۷}\Rightarrow(f+g)(-۷)=\frac{-۱}{۷}+\frac{۱}{۷}=۰$$

۴۶ ۲ اگـــر فرض کنیم نمـــودار داده‌شـــده، نمودار $g(x)=f(x-۳)$ باشـــد، آن‌گاه برای محاســـبهٔ $f(۲)$ کافی اســـت $g(۵)$ را به دســـت آوریم. زیـــرا $g(۵)=f(۵-۳)=f(۲)$. بـــا توجه بـــه نمودار $g(۵)=۴$ اســـت، بنابرایـــن داریم:

$$g(۵)=۴\Rightarrow f(۲)=۴\Rightarrow f(-\frac{۱}{۲}f(۲))=f(-\frac{۱}{۲}\times۴)=f(-۲)$$

هم‌چنین برای محاسبهٔ $f(-۲)$ داریم:

$$\begin{cases}g(x)=f(x-۳)\xrightarrow{x=۱}g(۱)=f(-۲)\\ g(۱)=۲:\text{با توجه به نمودار داده‌شده}\end{cases}\Rightarrow f(-۲)=۲$$

۴۷ ۴ با توجه به شرط هر ضابطه، مقادیر خواسته شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}f(۵)=۵-\sqrt{۵+۴}=۵-۳=۲\Rightarrow f(f(۵))=f(۲)=۲(۲)+۳=۷\\ f(۱)=۲(۱)+۳=۵\Rightarrow f(f(۱))=f(۵)=۵-\sqrt{۵+۴}=۵-۳=۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(f(۵))+f(f(۱))=۷+۲=۹$$

۴۸ ۲ چون طبق صورت سؤال رابطهٔ داده شده تابع است، پس باید به ازای $x=a$ مقدار دو ضابطه با هم برابر باشد. بنابراین:

$$\begin{cases}x^{۳}-۳a^{۲}\overset{x=a}{=\!=}a^{۳}-۳a^{۲}\\ ۱-۳x\overset{x=a}{=\!=}۱-۳a\end{cases}$$

$$\Rightarrow a^{۳}-۳a^{۲}=۱-۳a\Rightarrow a^{۳}-۳a^{۲}+۳a-۱=۰\Rightarrow(a-۱)^{۳}=۰\Rightarrow a=۱$$

حال تابع را با $a=1$ بازنویسی کرده و ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\begin{cases}x^3-3 & ; \ x\geq 1\\ 1-3x & ; \ x\leq 1\end{cases}$$

$$\xrightarrow{f(x)=0}\begin{cases} x^3-3=0\Rightarrow x^3=3\Rightarrow x=\sqrt[3]{3}\xrightarrow{\sqrt[3]{3}>1} \text{قابل قبول}\\ 1-3x=0\Rightarrow x=\frac{1}{3} \xrightarrow{\frac{1}{3}<1}\text{قابل قبول}\end{cases}$$

پس معادلهٔ $f(x)=0$ دو ریشهٔ $x=\sqrt[3]{3}$ و $x=\frac{1}{3}$ دارد.

۴۹ ۲ تابع f را در نظر بگیرید:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+3}+2a & ; \ -1\leq x\leq 1\\ ax^2+5 & ; \ x\leq -1 \text{ یا } x\geq 1\end{cases}$$

باید به ازای هر x فقط یک y داشته باشیم. نقاط مرزی $x=1$ و $x=-1$ در شرط هر دو ضابطه قرار دارند پس برای تعیین a یکی از این اعداد را در ضابطه‌ها قرار داده و برابر هم می‌گیریم:

$$x=1: \sqrt{1^2+3}+2a=a(1)^2+5\Rightarrow 2+2a=a+5\Rightarrow a=3$$

برای محاسبهٔ $f(a)=f(3)$، از ضابطهٔ دوم استفاده می‌کنیم:

$$f(3)=3(3)^2+5=32$$

۵۰ ۳ **روش اول:** می‌دانیم در توابع چندضابطه‌ای یا دامنهٔ ضوابط اشتراک ندارند و یا اگر اشتراک داشته باشند به ازای دامنهٔ مشترک، مقدارشان برابر است. حال هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

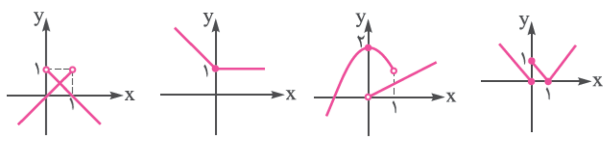
۱) دامنهٔ دو ضابطه در $x=0$ مشترک می‌باشد، با فرض $x=0$ مقدار $y=|x-1|$ و $y=-x$ به ترتیب برابر ۱ و صفر می‌شود. حال چون به ازای $x=0$ دو مقدار برای y پیدا شد، پس این رابطه تابع نیست.

۲) دامنهٔ دو ضابطه در بازهٔ $(0,1)$ مشترک هستند. به ازای عددی مانند $x=\frac{1}{2}$، دو مقدار $\frac{7}{4}$ و $\frac{1}{4}$ برای y به دست می‌آید، پس این رابطه تابع نیست.

۳) هر یک از ضوابط تابع‌اند و دامنهٔ دو ضابطه در $x=0$ مشترک می‌باشد که به ازای آن، مقدار هر دو ضابطه برابر ۱ می‌شود، پس این رابطه تابع است.

۴) دامنهٔ دو ضابطه در بازهٔ $(0,1)$ مشترک هستند. به ازای عددی مانند $\frac{1}{3}$ دو مقدار $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ به دست می‌آید، پس این رابطه تابع نیست.

روش دوم: نمودار هر یک از گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:



گزینهٔ (۱) گزینهٔ (۲) گزینهٔ (۳) گزینهٔ (۴)

تنها نموداری که خطوط موازی محور عرض‌ها، آن را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، نمودار گزینهٔ (۳) است.

۵۱ ۳ به ازای هر x، مقدار $f(x)$ همواره مثبت می‌باشد، پس حاصل $-f(x)$ همواره منفی است و برای تشکیل عبارت $f(-f(x))$ باید از ضابطهٔ دوم استفاده کنیم:

$$f(\underbrace{-f(x)}_{\text{منفی}})=1\Rightarrow f(f(-f(x)))=f(1)=1+2=3$$

۵۲ ۴ تابع f را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم. چون $f(2)=3$ و در بازهٔ $[0,2]$ تابع ثابت است، پس در این بازه $f(x)=3$ می‌باشد. از طرفی برای اعداد منفی، خطی است که از نقاط $(-3,0)$ و $(-5,-2)$ می‌گذرد، حال معادلهٔ این خط را به دست می‌آوریم:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-2-(0)}{-5-(-3)}=\frac{-2}{-2}=1$$

$$\xrightarrow{y-y_1=m(x-x_1)} y-0=1(x+3)\Rightarrow y=x+3$$

بنابراین داریم:

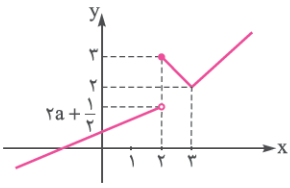
$$f(x)=\begin{cases}x^2 & ; \ x>2\\ 3 & ; \ 0\leq x\leq 2\\ x+3 & ; \ x<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(-1)=2 \ ; \ f(1)=3 \ ; \ f(3)=9 \ ; \ f(-3)=0$$

یعنی هر چهار مقدار صحیح است.

۵۳ ۲ ابتدا به کمک انتقال، نمودار $y=|x-3|+2$ را در بازهٔ $[2,+\infty)$ و سپس خط $y=ax+\frac{1}{2}$ را در بازهٔ $(-\infty,2)$ رسم می‌کنیم.

توجه داشته باشید که اگر شیب خط $y=ax+\frac{1}{2}$ منفی یا صفر باشد، برد تابع نمی‌تواند $\mathbb{R}$ بشود. مقدار تابع $y=ax+\frac{1}{2}$ به ازای $x=2$ برابر $y=2a+\frac{1}{2}$ است، چون با توجه به شکل، برد تابع $y=|x-3|+2$ به صورت بازهٔ $[2,+\infty)$ می‌باشد، پس باید $2a+\frac{1}{2}\geq 2$ باشد تا برد $f(x)$ تمام مقادیر اعداد حقیقی را پوشش دهد و برابر $\mathbb{R}$ شود. بنابراین:



$$2a+\frac{1}{2}\geq 2\Rightarrow 2a\geq\frac{3}{2}\Rightarrow a\geq\frac{3}{4}$$

۵۴ ۱ ابتدا با استفاده از اتحاد مکعب دوجمله‌ای، ضابطهٔ دوم را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$x^6+3x^4+3x^2=(x^6+3x^4+3x^2+1)-1=(x^2+1)^3-1$$

چون عدد $\sqrt{\sqrt[3]{5}-1}$ گنگ است، پس برای محاسبهٔ مقدار آن از ضابطهٔ دوم استفاده می‌کنیم:

$$f(\underbrace{\sqrt{\sqrt[3]{5}-1}}_{\text{گنگ}})=((\sqrt{\sqrt[3]{5}-1})^2+1)^3-1=(\sqrt[3]{5}-1+1)^3-1$$

$$=(\sqrt[3]{5})^3-1=5-1=4$$

$$\Rightarrow f(f(\sqrt{\sqrt[3]{5}-1}))=f(\underbrace{4}_{\text{گویا}})\overset{\text{ضابطهٔ اول}}{=}\sqrt{2(4)+1}=3$$

۵۵ ۳ برای تعیین ضابطهٔ $f(f(x))$ به جای $f(x)$ درون پرانتز به ازای $x\geq 0$، $-\sqrt{2}$ و به ازای $x<0$، $-\frac{1}{2}$ را قرار می‌دهیم:

$$f(f(x))=\begin{cases}f(-\sqrt{2}) & ; x\geq 0\\ f(-\frac{1}{2}) & ; x<0\end{cases}\Rightarrow f(f(x))=\begin{cases}-\frac{1}{2} & ; x\geq 0\\ -\frac{1}{2} & ; x<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(f(x))=-\frac{1}{2}$$

برای تعیین ضابطهٔ $g(g(x))$ به جای $g(x)$ درون پرانتز به ازای $x\in\mathbb{Z}$، $\frac{1}{2}$ و به ازای $x\notin\mathbb{Z}$، $\frac{3}{2}$ را قرار می‌دهیم:

$$g(g(x))=\begin{cases}g(\frac{1}{2}) & ; x\in\mathbb{Z}\\ g(\frac{3}{2}) & ; x\notin\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow g(g(x))=\begin{cases}\frac{3}{2} & ; x\in\mathbb{Z}\\ \frac{3}{2} & ; x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Rightarrow g(g(x))=\frac{3}{2}\Rightarrow f(f(x))+g(g(x))=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1$$

پس نمودار تابع، خط افقی $y=1$ می‌باشد.

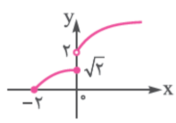
۵۶ ۳ تابع $f(x)$ به ازای xهای گویا برابر خودش (x) و به ازای xهای گنگ برابر ۱ است. می‌دانیم از $\sqrt{1}$ تا $\sqrt{100}$، ۱۰ عدد گویای $\sqrt{1}$، $\sqrt{4}$، $\sqrt{9}$، ...، $\sqrt{81}$، $\sqrt{100}$ وجود دارد که حاصل تابع به ازای آن‌ها برابر خودشان، یعنی ۱، ۲، ۳، ...، ۹ و ۱۰ می‌شود. همچنین از $\sqrt{1}$ تا $\sqrt{100}$، ۹۰ عدد گنگ وجود دارد که حاصل تابع به ازای آن‌ها برابر ۱ می‌شود. بنابراین داریم:

$$f(\sqrt{1})+f(\sqrt{2})+...+f(\sqrt{100})=(1+2+3+...+9+10)+(90\times 1)$$

$$=\frac{10\times 11}{2}+90=55+90=145$$

رابطهٔ $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ از دنبالهٔ حسابی رو که هنوز یادت نرفته!

۵۷ ۳ به‌کمک انتقال، نمودارهای $y=\sqrt{x}+2$ و $y=\sqrt{x+2}$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، برد تابع به صورت $[0,\sqrt{2}]\cup(2,+\infty)$ می‌باشد. پس خط $y=k$، اگر k منفی یا $\sqrt{2}<k\leq 2$ باشد، نمودار را قطع نمی‌کند. با فرض $\sqrt{2}\simeq 1/4$ و $\sqrt{5}\simeq 2/2$، هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $\sqrt{2}+1\simeq 1/4+1=2/4$ ۲) $\sqrt{2}-1\simeq 1/4-1=0/4$

۳) $4-\sqrt{5}\simeq 4-2/2=1/8$ ۴) $\sqrt{5}-1\simeq 2/2-1=1/2$

چون $\sqrt{2}<4-\sqrt{5}\leq 2$ است، پس خط $y=4-\sqrt{5}$ نمودار را قطع نمی‌کند.

۵۸ ۴ تابع $f(x)=\tan x\cot x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{\frac{k\pi}{2}|k\in\mathbb{Z}\}$، همواره برابر یک می‌باشد، پس تابع ثابت است.

در تابع $g(x)=\sqrt{x-|x|}$، دامنه به صورت بازهٔ $[0,+\infty)$ است که در این بازه همواره برابر صفر می‌باشد، بنابراین تابع ثابت است.

در تابع $s(x)=[x-[x]]$، چون $0\leq x-[x]<1$، پس $s(x)=0$ و تابع ثابت می‌باشد.

تابع $t(x)=\frac{\sin x}{\sin x}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$، همواره برابر یک می‌باشد، پس تابع ثابت است.

۵۹ ۳ چون توابع f و g ثابت هستند پس ضریب x در آن‌ها باید صفر باشد:

$$f(x)=b-3ax\Rightarrow -3a=0\Rightarrow a=0$$

$$g(x)=c-(3b-3)x\Rightarrow 3b-3=0\Rightarrow b=1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f(x)=1\\ g(x)=c\end{cases}\Rightarrow(f+g)(x)=1+c$$

در فرض سؤال داریم $f+g=5$، بنابراین:

$$1+c=5\Rightarrow c=4\Rightarrow bc=4$$

۶۰ ۳ چون تابع ثابت است پس باید ضریب x و x^2 صفر باشد. برای این منظور تابع را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم. (یعنی برحسب توان‌های نزولی x مرتب می‌کنیم.)

$$f(x)=(ax+2)(b-x)-7x^2=abx-ax^2+2b-2x-7x^2$$

$$\Rightarrow f(x)=(-a-7)x^2+(ab-2)x+2b$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-a-7=0\Rightarrow a=-7\\ ab-2=0\xrightarrow{a=-7}-7b-2=0\Rightarrow b=-\frac{2}{7}\end{cases}$$

بنابراین تابع ثابت، به‌صورت $f(x)=2b=-\frac{4}{7}$ حاصل می‌شود که برد آن $R_f=\{-\frac{4}{7}\}$ است.

۶۱ ۲ تابعی ثابت است که برد آن یک عضو داشته باشد.

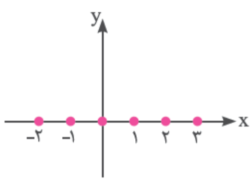
هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

(۱) $f(0)=1\,,\,f(1)=0\Rightarrow$ $f(x)$ ثابت نیست.

(۲) $0\leq x-[x]<1\Rightarrow -1<[x]-x\leq 0\xrightarrow{\text{زیر رادیکال نامنفی است.}}[x]-x=0$

$[x]-x$ زمانی برابر صفر می‌شود که $x\in\mathbb{Z}$ باشد. بنابراین:

$g(x)=0\ ;\ x\in\mathbb{Z}$



پس $g(x)$ یک تابع ثابت است.

(۳) $h(0)=0\ ,\ h(\frac{\pi}{2})=1\Rightarrow$ $h(x)$ ثابت نیست.

(۴) $t(0)=1\ ,\ t(1)=-1\Rightarrow$ $t(x)$ ثابت نیست.

۶۲ ۳ چون تابع $f(x)$ تابع همانی است، پس $f(3x-1)=3x-1$ و $f(2-2x)=2-2x$ می‌باشد. حال نقطهٔ تلاقی y_1 و y_2 را می‌یابیم.

$3x-1=2-2x\Rightarrow 5x=3\Rightarrow x=\frac{3}{5}\Rightarrow y=\frac{4}{5}\Rightarrow$ نقطهٔ تلاقی $(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ می‌باشد.