فصل هشتم: توابع نمایی و لگاریتمی

اشاره!

این فصل، یکی از آسون‌ترین فصلای ریاضیاته که به راحتی می‌تونین سؤالاتش رو حل کنین. چیزی که مهمه توی این فصل بهش توجه کنین، دامنهٔ لگاریتمه. هم‌چنین یادتون باشه برای حل نامعادلات نمایی، حتماً به پایه و برای حل نامعادلات لگاریتمی حتماً به مبنا دقت کنین؛ چون ممکنه جهت نامساوی رو عوض کنن. تازه! برای حل معادلات نمایی، خیلی وقتا می‌تونین از تغییر متغیر استفاده کنین.

تابع نمایی

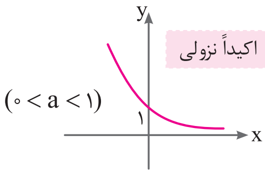
۱ قوانین مربوط به توان:

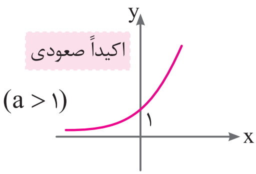
الف) $a^m \times a^n = a^{m+n}$	ب) $a^m \div a^n = a^{m-n}$
پ) $a^m \times b^m = (ab)^m$	ت) $a^m \div b^m = (\frac{a}{b})^m$
ث) $a^{-m} = \frac{۱}{a^m}$	ج) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
چ) $a^{\circ} = ۱ ، a \neq \circ$	ح) $(a^m)^n = a^{mn}$

۲ تابع نمایی: هر تابع با ضابطهٔ $f(x) = a^x$ را که $a > \circ$ و $a \neq ۱$ است، یک تابع نمایی می‌نامند.

◈ در حالت کلی هر تابع با ضابطهٔ $y = ka^{bx+c}$ $(b \neq \circ ، a \neq ۱ ، a > \circ ، k \neq \circ)$ رفتار نمایی دارد. در این حالت x باید فقط در توان باشد و پایهٔ توان و ضرایب دیگر، اعدادی ثابت هستند.

۳ نمودار تابع $y = a^x$:





◈ دامنهٔ تابع نمایی، $\mathbb{R}$ و برد آن، $(۰,+\infty)$ است.

◈ تابع نمایی یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است.

◈ تابع نمایی از نقطهٔ $(۰ , ۱)$ می‌گذرد.

◈ **در حالت $a > ۱$** : با افزایش مقدار x ، مقدار y نیز زیاد می‌شود.

◈ **در حالت $۰ < a < ۱$** : با افزایش مقدار x ، مقدار y کاهش می‌یابد.

◈ نمودار توابع با ضابطهٔ $y = a^x$ و $y = a^{-x}$ $(a \neq ۱ , a > ۰)$ نسبت به محور y ها قرینه‌اند.

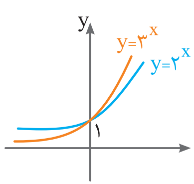
۴ تابع با ضابطهٔ $y = ka^x$ $(a \neq ۱ , a > ۰)$ یک ویژگی منحصربه‌فرد دارد. اگر x های داده‌شده به تابع تشکیل دنبالهٔ حسابی (با قدر نسبت d) دهند، y های متناظر آن‌ها تشکیل دنبالهٔ هندسی (با قدر نسبت r) خواهند داد. داریم: $r = a^d$

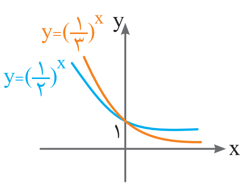
۵ در یک دوره مسابقات جام حذفی داریم: $\text{تعداد تیم‌ها} = ۲^{\text{تعداد مراحل}}$

نکته: فرمول محاسبهٔ نیمه‌عمر:

$$\text{جرم باقی‌مانده} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{\text{زمان طی‌شده}}{\text{نیمه‌عمر}}} \times \text{جرم اولیه}$$

۶ به دو شکل زیر دقت کنید:





حل معادلات و نامعادلات نمایی

۷ حل معادلات نمایی به سه دسته تبدیل می‌شوند:

الف $a^x = a^y \Rightarrow x = y$

ب **استفاده از تغییر متغیر**: به مثال زیر دقت کنید:

$$2^{2x} - 2^{x+1} + 1 = 0 \xrightarrow[2^{x+1}=2^x \cdot 2^1]{2^x = t} t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow t = 1 \Rightarrow 2^x = 1 = 2^0 \Rightarrow x = 0$$

پ **لگاریتم‌گیری**: $a^x = b \Rightarrow x = \log_a b$

مثال: $2^x - 1 = 5 \Rightarrow 2^x = 6 \Rightarrow \log_2 2^x = \log_2 6 \Rightarrow x = \log_2 6$

۸ **نامعادلات نمایی**: به دو دسته تقسیم می‌شوند:

الف $a^x \ge a^y \xrightarrow{a>1} x \ge y$ **ب** $a^x \ge a^y \xrightarrow{0<a<1} x \le y$

نکته: اگر $c > b > a > 0$ باشد، آن‌گاه:

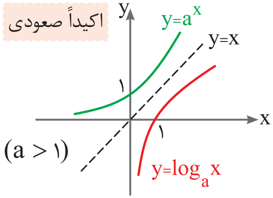
الف اگر $x > 0$: $c^x > b^x > a^x$ **ب** اگر $x < 0$: $c^x < b^x < a^x$

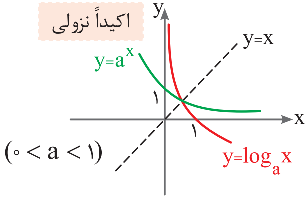
تابع لگاریتمی

۹ وارون تابع با ضابطهٔ $f(x) = a^x$ را به‌صورت $f^{-1}(x) = \log_a x$ نشان می‌دهیم و آن را لگاریتم x در مبنای a می‌نامیم. به عبارتی اگر $a > 0$ و $a \ne 1$ باشد، داریم:

$$f^{-1}(x) = \log_a x \Leftrightarrow f(x) = a^x$$

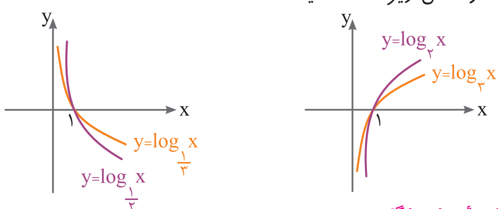
۱۰ **نمودار تابع $y = \log_a x$:**





- دامنهٔ تابع لگاریتمی، $(\circ,+\infty)$ و برد آن $\mathbb{R}$ است.
- تابع لگاریتمی یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است.
- تابع لگاریتمی از نقطهٔ $(۱,\circ)$ می‌گذرد.
- اگر $a>۱$، با افزایش مقدار x، مقدار y نیز افزایش می‌یابد.
- اگر $\circ<a<۱$، با افزایش مقدار x، مقدار y کاهش می‌یابد.

۱۱ به دو شکل زیر دقت کنید:



۱۲ دامنهٔ توابع لگاریتمی:

$$y=\log_B A \Rightarrow D=(A>\circ)\bigcap(B>\circ)\bigcap(B\neq ۱)$$

۱۳

$$\log_a x = y \Leftrightarrow x=a^y$$

۱۴ اگر مبنای لگاریتم، ۱۰ باشد، مبنا را نمی‌نویسیم و به آن لگاریتم اعشاری می‌گوییم:

$$\log_{۱\circ} x = \log x$$

۱۵ قوانین لگاریتم:

الف) $\log_a ۱=\circ$	ب) $\log_a a=۱$
پ) $\log_a A-\log_a B=\log_a \frac{A}{B}$	ت) $\log_a A+\log_a B=\log_a AB$
ث) $\log_{B^n} A^m=\frac{m}{n}\log_B A$	ج) $\log_B A=\frac{\log_c A}{\log_c B}$
چ) $\log_B A=\frac{۱}{\log_A B}$	ح) $A^{\log_c B}=B^{\log_c A}$
خ) $\log_b a\times\log_c b\times\log_d c=\log_d a$	

۱۶ خوب است بدانید:

$$\log ۲ = ۱ - \log ۵ \quad , \quad \log ۵ = ۱ - \log ۲$$

۱۷ بـرای تعییـن محـدودهٔ $\log_b a$، ابتدا بایـد a را بین دو تـوان صحیح و متوالی از b قرار دهید $(b^k < a < b^{k+۱})$، سـپس از طرفین نامساوی به‌دست آمده، لگاریتم در مبنای b بگیرید.

۱۸ معادلات لگاریتمی:

اگر $a > ۰$ و $a \neq ۱$ باشد، داریم:

$$\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$$

۱۹ نامعادلات لگاریتمی:

چهار حالت داریم:

الف) $\log_a x \geq \log_a y \xrightarrow{a>۱} x \geq y$

ب) $\log_a x \geq \log_a y \xrightarrow{۰<a<۱} x \leq y$

پ) $\log_a x \geq y \xrightarrow{a>۱} x \geq a^y$

ت) $\log_a x \geq y \xrightarrow{۰<a<۱} x \leq a^y$

نکته: اگر $c > b > a > ۰$ باشد، آن‌گاه:

الف) اگر $x > ۱$: $\log_c x < \log_b x < \log_a x$

ب) اگر $۰ < x < ۱$: $\log_c x > \log_b x > \log_a x$

۲۰ کاربرد لگاریتم در زلزله:

$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵ M$$

M عدد زلزله بر حسـب ریشتـر و E میزان انرژی آزادشـده بر حسـب اِرگ (Erg) است.

فصل نهم: مثلثات

اشاره!

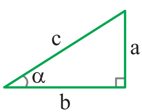
واقعیتش رو بخوام بگم و باهاتون روراست باشم، تعداد کسایی که مثلثات رو دوست ندارن، زیاده! چون ریزه‌کاری داره و درصد خطاش یه مقدار بالاست. اما اگه یه ذره دقت و مهارت داشته باشین همهٔ مشکلات حل میشه. چیزی که مهمه، دیدن سؤالای مختلف و آشنا بودن با سؤالاس.

فرمول‌های مفیدی رو که برای تستا لازمتون میشه، توی درسنامه براتون آوردیم.

برای حل سؤالا، اول سؤال رو با دقت بخونین و اطلاعاتش رو استخراج کنین. از اطلاعات هر سؤال متوجه میشین که بهتره از کدوم فرمول و رابطه استفاده کنین. اگه به سؤالای کنکور این فصل نگاه کنین، متوجه می‌شین طراحای کنکور علاقهٔ زیادی به معادلهٔ مثلثاتی دارن. پس از دستش ندین و خلاصه این‌که اگر این فصل رو جدی بگیرین، ضرر نمی‌کنین. (تازه! توی فیزیک هم استفاده میشه، چقدر به فکر تونیم آخه!☺)

دایره و نسبت‌های مثلثاتی

۱ نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه به‌صورت زیر است:



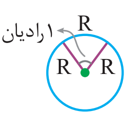
$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \;,\; \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \;,\; \cot\alpha = \frac{b}{a}$$

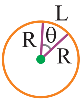
۲ **تبدیل درجه به رادیان و برعکس:**

$$\text{برحسب درجه} \rightarrow \frac{D}{۳۶۰} = \frac{R}{۲\pi} \leftarrow \text{برحسب رادیان}$$

۳ **رادیان:** یک رادیان، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی است که طول کمان روبه‌رویش برابر شعاع دایره باشد. هر رادیان تقریباً $۵۷/۵^\circ$ است.



۴ طول کمان: در دایره‌ای به شعاع R، اگر زاویه‌ای مرکزی برابر θ (برحسب رادیان) رسم کنیم، در این صورت طول کمان روبه‌روی آن زاویه برابر $R\theta$ خواهد بود.



$$\text{طول کمان}\,(L) = R\theta$$

هم‌چنین اگر S را مساحت قطاع در نظر بگیریم، داریم:

$$S = \frac{۱}{۲}R^{۲}\theta = \frac{۱}{۲}RL$$

نکته: زاویهٔ بین عقربهٔ ساعت شمار و دقیقه شمار از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$|\,۵/۵\,\text{min} - ۳۰h\,|$$

مثال: ساعت ۳ و ۴۰ دقیقه:

$$|\,۵/۵ \times ۴۰ - ۳۰ \times ۳\,| = ۱۳۰^{\circ}$$

که البته می‌توان گفت زاویهٔ بین دو عقربه برابر $۳۶۰^{\circ} - ۱۳۰^{\circ} = ۲۳۰^{\circ}$ نیز هست.

۵ نسبت‌های مثلثاتی زوایای مهم: (ت.ن = تعریف نشده)

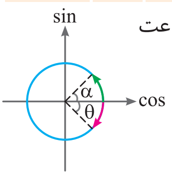
نسبت \ α	۰	$\frac{\pi}{۶}$ یا ۳۰°	$\frac{\pi}{۴}$ یا ۴۵°	$\frac{\pi}{۳}$ یا ۶۰°	$\frac{\pi}{۲}$ یا ۹۰°	π یا ۱۸۰°	$\frac{۳\pi}{۲}$ یا ۲۷۰°	۲π یا ۳۶۰°
$\sin\alpha$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	-۱	۰
$\cos\alpha$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	-۱	۰	۱
$\tan\alpha$	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	ت.ن	۰	ت.ن	۰
$\cot\alpha$	ت.ن	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	ت.ن	۰	ت.ن

۶ زاویهٔ مثبت: حرکت در خلاف جهت عقربه‌های ساعت

زاویهٔ منفی: حرکت در جهت عقربه‌های ساعت

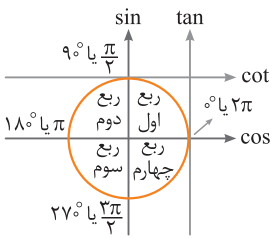
زاویه‌ای مثبت $\rightarrow \alpha$

زاویه‌ای منفی $\rightarrow \theta$



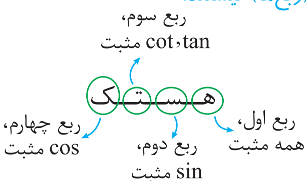
۷ دایرهٔ مثلثاتی و علامت‌ها:

$$\begin{cases} \text{ربع اول}: ۰ < \alpha < ۹۰^\circ & \text{یا} \quad ۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲} \\ \text{ربع دوم}: ۹۰^\circ < \alpha < ۱۸۰^\circ & \text{یا} \quad \frac{\pi}{۲} < \alpha < \pi \\ \text{ربع سوم}: ۱۸۰^\circ < \alpha < ۲۷۰^\circ & \text{یا} \quad \pi < \alpha < \frac{۳\pi}{۲} \\ \text{ربع چهارم}: ۲۷۰^\circ < \alpha < ۳۶۰^\circ & \text{یا} \quad \frac{۳\pi}{۲} < \alpha < ۲\pi \end{cases}$$

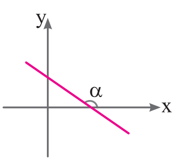


نکته: زوایای ۰، $\frac{\pi}{۲}$، π، $\frac{۳\pi}{۲}$ و ۲π مرز نواحی مثلثاتی هستند، پس جزو هیچ‌کدام از ناحیه‌ها (ربع‌ها) نیستند.

◈ **علامت‌ها:**



۸ رابطهٔ شیب خط و تانژانت:



$$(\text{شیب خط})\ m = \tan\alpha$$

نکته: شیب خطوط افقی، صفر است چون $\tan ۰^\circ = ۰$ و شیب خطوط قائم، تعریف‌نشده است چون: $\tan ۹۰^\circ =$ تعریف‌نشده

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

۹	$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha \,,\, \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$
۱۰	$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \,,\, \cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
۱۱	$\tan\alpha\,.\cot\alpha=1 \Rightarrow \tan\alpha=\dfrac{1}{\cot\alpha} \,,\, \cot\alpha=\dfrac{1}{\tan\alpha}$
۱۲	$1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$
۱۳	$1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$
۱۴	$\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
۱۵	$(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)=\cos^2\alpha$
۱۶	$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$
۱۷	$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$
۱۸	$\tan\alpha+\cot\alpha=\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$
۱۹	$(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2=1\pm2\sin\alpha\,.\cos\alpha$

روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی

۲۰ همهٔ نسبت‌های مثلثاتی، علامت منفی را از کمانِ مقابل خود به ضریب انتقال می‌دهند، به‌جز کسینوس. در واقع کسینوس منفی را می‌خورد پس:

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha \;,\; \cos(-\alpha)=\cos\alpha$$

$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha \;,\; \cot(-\alpha)=-\cot\alpha$$

۲۱ در محاسبات مربوط به زاویه‌ها، به جای ۲π و مضارب آن، صفر بگذارید.

پس داریم:

$$\sin(\overset{\circ}{\cancel{۲\pi}}-\alpha)=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\cos(\alpha-\overset{\circ}{\cancel{۴\pi}})=\cos\alpha$$

$$\tan(\frac{۱۲\pi}{۳}+\alpha)=\tan(\overset{\circ}{\cancel{۴\pi}}+\alpha)=\tan\alpha$$

۲۲ زاویه در حضور π :

دو حالت داریم:

الف نسبت‌های مثلثاتی $\pi-\alpha$ ($\pi-\alpha$ در ناحیهٔ دوم قرار دارد):

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha \text{ ، } \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$

$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha \text{ ، } \cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$$

ب نسبت‌های مثلثاتی $\pi+\alpha$ ($\pi+\alpha$ در ناحیهٔ سوم قرار دارد):

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha \text{ ، } \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$

$$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha \text{ ، } \cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$$

نکته: همـواره در کمان‌هـا به جـای مضارب فردِ π یعنـی ۳π، ۵π، ۷π و ... بگذارید π.

۲۳ زاویه در حضور $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$:

چهار حالت داریم:

الف نسبت‌های مثلثاتی $\frac{\pi}{۲}-\alpha$ ($\frac{\pi}{۲}-\alpha$ در ناحیهٔ اول قرار دارد):

$$\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cos\alpha \text{ ، } \cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\sin\alpha$$

$$\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cot\alpha \text{ ، } \cot(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\tan\alpha$$

ب نسبت‌های مثلثاتی $\frac{\pi}{۲}+\alpha$ ($\frac{\pi}{۲}+\alpha$ در ناحیهٔ دوم قرار دارد):

$$\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha \text{ ، } \cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\tan(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\cot\alpha \text{ ، } \cot(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\tan\alpha$$

پ نسبت‌های مثلثاتی $\frac{۳\pi}{۲}-\alpha$ ($\frac{۳\pi}{۲}-\alpha$ در ناحیهٔ سوم قرار دارد):

$$\sin(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=-\cos\alpha \ \text{،}\ \cos(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\tan(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=\cot\alpha \ \text{،}\ \cot(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=\tan\alpha$$

ت نسبت‌های مثلثاتی $\frac{۳\pi}{۲}+\alpha$ ($\frac{۳\pi}{۲}+\alpha$ در ناحیهٔ چهارم قرار دارد):

$$\sin(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)=-\cos\alpha \ \text{،}\ \cos(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)=\sin\alpha$$

$$\tan(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)=-\cot\alpha \ \text{،}\ \cot(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)=-\tan\alpha$$

۲۴ اگر داخل پرانتزِ کمان نسبتی، زاویهٔ π دارِ منفی داشتید، کافی است آن را قرینه کرده و یک منفی بیرون آن نسبت، ضرب کنید به‌جز cos.

مثال:

$$\sin(\alpha-۷\pi)=-\sin(۷\pi-\alpha)=-\sin(\cancel{۶\pi}^{\circ}+\pi-\alpha)$$

$$=-\sin(\pi-\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\cos(\alpha-\frac{۳\pi}{۲})=\cos(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=-\sin\alpha$$

۲۵ زوایای α و $\frac{\pi}{۲}-\alpha$ متمم یکدیگرند و داریم:

$$\sin\alpha=\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha) \ \text{،}\ \tan\alpha=\cot(\frac{\pi}{۲}-\alpha)$$

مثال:

$$\Rightarrow \sin ۳۰^\circ=\cos ۶۰^\circ \ \text{،}\ \tan ۰^\circ=\cot ۹۰^\circ$$

۲۶ زوایای α و $\pi-\alpha$ مکمل یکدیگرند و داریم:

$$\sin\alpha=\sin(\pi-\alpha) \ \text{،}\ \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$

مثال:

$$\Rightarrow \sin ۴۵^\circ=\sin ۱۳۵^\circ \ \text{،}\ \cos\frac{۵\pi}{۶}=-\cos\frac{\pi}{۶}$$

نسبت‌های مثلثاتی ۲α

۲۷ $\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha \Rightarrow \sin\alpha = ۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}$

۲۸ $(\sin\alpha \pm \cos\alpha)^{۲} = ۱ \pm ۲\sin\alpha\,.\cos\alpha = ۱ \pm \sin ۲\alpha$

۲۹ $\cos ۲\alpha = \cos^{۲}\alpha - \sin^{۲}\alpha = ۲\cos^{۲}\alpha - ۱ = ۱ - ۲\sin^{۲}\alpha$

۳۰ فرمول طلایی: $۱ - \cos\alpha = ۲\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}$ ، $۱ + \cos\alpha = ۲\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}$

۳۱ $\cos ۲\alpha = \dfrac{۱ - \tan^{۲}\alpha}{۱ + \tan^{۲}\alpha}$

۳۲ $\sin ۲\alpha = \dfrac{۲\tan\alpha}{۱ + \tan^{۲}\alpha}$

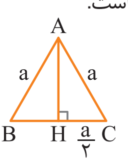
۳۳ $\tan ۲\alpha = \dfrac{۲\tan\alpha}{۱ - \tan^{۲}\alpha}$

۳۴ $\cot\alpha - \tan\alpha = ۲\cot ۲\alpha$

۳۵ $\tan\alpha + \cot\alpha = \dfrac{۱}{\sin\alpha\cos\alpha} = \dfrac{۲}{\sin ۲\alpha}$

برخی روابط در مثلث

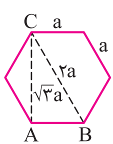
۳۶ در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰°، نصف وتر است.



۳۷ در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، مساحت S و ارتفاع AH داریم:

$$AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a \ ,\ S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$$

۳۸ در شش‌ضلعی منتظم با ضلع a و مساحت S داریم:



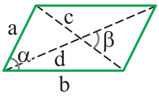
$$S = ۶ \times \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^{۲}$$

طول قطر بزرگ $(BC) = ۲a$

طول قطر کوچک $(AC) = \sqrt{۳}a$

۳۹ مساحت متوازی‌الاضلاع:

$$S = ab\sin\alpha$$



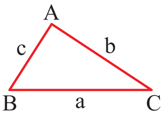
c و d قطرهای متوازی‌الاضلاع هستند:

$$S = \frac{۱}{۲} cd\sin\beta$$

نکته: مربع، مستطیل و لوزی نیز از این دو رابطه پیروی می‌کنند چون نوعی متوازی‌الاضلاع هستند.

۴۰ در هر مثلث دلخواه، مساحت برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آن‌ها:

$$\begin{cases} S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} ac\sin\hat{B} \\ S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} ab\sin\hat{C} \\ S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} bc\sin\hat{A} \end{cases}$$



۴۱ مساحت هر مثلث با سه ضلع a، b و c طبق قاعدهٔ هرون برابر است با:

$$S_{\text{مثلث}} = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} \qquad (P = \frac{a+b+c}{۲})$$

نصف محیط مثلث

۴۲ **قضیهٔ سینوس‌ها:** در هر مثلث دلخواه مانند مثلث فوق داریم:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$$

دورهٔ تناوب

۴۳ هرگاه عدد مثبت c موجود باشد به طوری‌که $f(x+c) = f(x)$ آن‌گاه f را تابعی متناوب و به کوچک‌ترین عدد c دورهٔ تناوب (T) گفته می‌شود.

۴۴ $y = k\sin(ax+b)+t \rightarrow T = \frac{۲\pi}{|a|}$

۴۵ $y = k\cos(ax+b)+t \rightarrow T = \dfrac{2\pi}{|a|}$

۴۶ $y = k\tan(ax+b)+t \rightarrow T = \dfrac{\pi}{|a|}$

نکته: در یافتن T، فقط ضریب x (همان a) تأثیرگذار است.

۴۷ در توابع $f(t) = a\sin(bt)+c$ و $f(t) = a\cos(bt)+c$ داریم:

$$(\text{دامنهٔ موج})\, a = \frac{\max - \min}{2} \quad , \quad c = \frac{\max + \min}{2} \quad , \quad |b| = \frac{2\pi}{T}$$

$$\max = |a| + c \quad , \quad \min = -|a| + c$$

۴۸ اگر چند نسبت مثلثاتی با یکدیگر جمع شده بود برای یافتن T، دو حالت وجود دارد:

الف بعد از جمع کردن با اتحادها و ... قابل ساده شدن هستند؛ که در این صورت ساده‌سازی را انجام داده و در نهایت به یک نسبت مثلثاتی تبدیل می‌شود و T را می‌یابیم.

ب بعد از جمع کردن با اتحادها و ... قابل ساده شدن نیستند؛ که در این صورت، برای تک تک عبارت‌ها T را محاسبه کرده و بعد میان دورهٔ تناوب‌ها ک.م.م می‌گیریم.

نکته: اگر عبارت‌های کسری داشته باشیم ک.م.م برابر است با:

$$\left[\frac{a}{b} , \frac{c}{d}\right] = \frac{[a , c]}{(b , d)}$$

[ ] نماد ک.م.م و ( ) نماد ب.م.م است.

۴۹ توان فرد تأثیری بر T ندارد اما توان زوج روی sin و cos یا وجود قدرمطلق دور آن‌ها، T را نصف می‌کند.

همه چیز در مورد تابع سینوس

۵۰ دامنهٔ $y = \sin u$ برابر $\mathbb{R}$ است مگر آن‌که u محدودیت داشته باشد (رادیکالی، کسری و ... باشد).

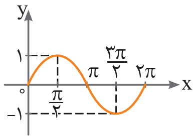
۵۱ $y = a\sin(bx+c) \xrightarrow{\text{برد}} R = [-a , a]$

۵۲ $y=\sin u$ به‌ازای $u=2k\pi+\frac{\pi}{2}$، ماکزیمم، به‌ازای $u=2k\pi-\frac{\pi}{2}$، مینیمم و به ازای $u=k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ برابر صفر است (یعنی با محور x ها تلاقی یافته است).

۵۳ شکل تابع $y=\sin x$ در بازهٔ $[0\,,\,2\pi]$:

$T=2\pi$

$-1\leq \sin x\leq 1$



همه چیز در مورد تابع کسینوس

۵۴ دامنهٔ $y=\cos u$ برابر $\mathbb{R}$ است مگر آن‌که u محدودیتی داشته باشد:

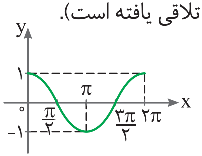
۵۵ $y=a\cos(bx+c)\xrightarrow{\text{برد}}R=[-a,a]$

۵۶ $y=\cos u$ به ازای $u=2k\pi$، ماکزیمم، به ازای $u=2k\pi+\pi$، مینیمم و به ازای $u=k\pi+\frac{\pi}{2}$ برابر صفر است (با محور x ها تلاقی یافته است).

۵۷ شکل تابع $y=\cos x$ در بازهٔ $[0\,,2\pi]$:

$T=2\pi$

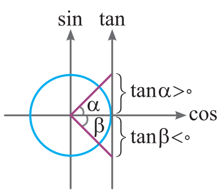
$-1\leq \cos x\leq 1$



همه چیز در مورد تابع تانژانت

۵۸ **تابع تانژانت در دایرهٔ مثلثاتی:**

$\tan\alpha$ در نواحی اول و سوم، مثبت و در نواحی دوم و چهارم، منفی است.



۵۹ دامنهٔ $y=\tan u$ برابر است با: $D=\mathbb{R}-\left\{u\mid u=k\pi+\frac{\pi}{2}\right\}$

۶۰ این تابع در نقاط $\frac{k\pi}{2}$ که k صحیح و فرد است، تعریف نشده است.

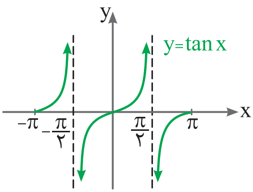
۶۱ $y=\tan u\xrightarrow{\text{برد}}R=\mathbb{R}$

۶۲ $y=\tan u$، ماکزیمم و مینیمم ندارد.

۶۳ $y=\tan u$ در $u=k\pi$ صفر می‌شود (با محور x ها تلاقی می‌یابد).

۶۴ یک تابع غیر یک‌به‌یک، وارون‌ناپذیر و غیرپیوسته است.

۶۵ شکل $y = \tan x$ در بازهٔ $[-\pi , \pi]$:



معادلهٔ مثلثاتی

۶۶ $\sin x = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi - \alpha + \pi \end{cases}$

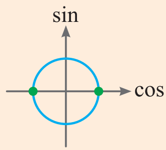
۶۷ $\cos x = \cos\alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$

۶۸ $\tan x = \tan\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$

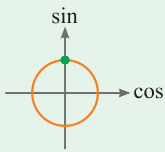
۶۹ $\cot x = \cot\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$

۷۰ حالت‌های خاص sin :

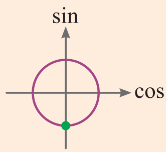
الف $\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$



ب $\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

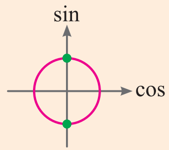


پ $\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

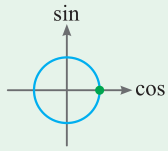


۷۱ حالت‌های خاص cos :

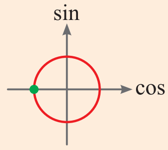
الف) $\cos x = ۰ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$



ب) $\cos x = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi$



پ) $\cos x = -۱ \Rightarrow x = ۲k\pi + \pi$



۷۲ به معادلات زیر و پاسخ آن‌ها توجه کنید:

$$\left\{\begin{array}{l} \sin^۲ x = \sin^۲ \alpha \\ \cos^۲ x = \cos^۲ \alpha \\ \tan^۲ x = \tan^۲ \alpha \\ \cot^۲ x = \cot^۲ \alpha \end{array}\right. \Rightarrow x = k\pi \pm \alpha$$

فصل ۸: توابع نمایی و لگاریتمی

۹۸ اگر $\log ۲ = k$ باشد، حاصل $\log(۶ - ۲\sqrt{۵}) + ۲\log(۱ + \sqrt{۵})$، کدام است؟ (تجربی ۹۰)

۱) $۲k$ ۲) $۴k$ ۳) $۱ + k$ ۴) $۲ + ۴k$

۹۹ اگر $\log ۵ = ۳k$ باشد، $\log \sqrt[۳]{۱/۶}$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۰)

۱) $۱ - ۴k$ ۲) $۲ - ۵k$ ۳) $۱ - ۲k$ ۴) $۱ - k$

۱۰۰ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = a.b^x ; b > ۰$ داریم $f(۰) = \frac{۳}{۲}$ و $f(-۲) = \frac{۳}{۳۲}$، مقدار $f(\frac{۳}{۲})$ کدام است؟ (تجربی ۹۱)

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

۱۰۱ تعداد باکتری‌ها در یک نوع کشت، بعد از t دقیقه به‌صورت $f(t) = Ae^{kt}$ است. اگر تعداد این باکتری‌ها در شروع کشت ۸۰۰ و در دقیقهٔ بیستم برابر ۳۲۰۰ باشد، در دقیقهٔ سی‌ام تعداد آن‌ها کدام است؟ (تجربی ۹۱)

۱) ۴۸۰۰ ۲) ۵۶۰۰ ۳) ۶۴۰۰ ۴) ۷۲۰۰

۱۰۲ از دو معادلهٔ $۴^x + ۲^x = ۷۲$ و $\log(x + ۱) + \log(۲y + x^۲) = ۲$، مقدار y کدام است؟ (تجربی خارج ۹۲)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۰۳ اگر نمودار تابع $f(x) = ab^x - ۱$، از دو نقطهٔ $A(-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲})$ و $B(۱,۱۱)$ بگذرد، $f(-۱)$ کدام است؟ (تجربی ۹۳)

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۱۰۴ از تساوی $\log_x ۵ + ۱ = \log_x(x^۲ + ۴)$، مقدار لگاریتم x در پایهٔ ۲ کدام است؟ (تجربی ۹۳)

۱) -۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۱۰۵ فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی دو منحنی به معادلات $y = 2^x$ و $y = (\sqrt{2})^{x+1} + 4$، از نقطهٔ $A(0,4)$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۳)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۰۶ از تساوی $\log_x(x-6) = 2 - \log_x(3x+8)$، مقدار لگاریتم x در پایهٔ ۴ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۳)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۱۰۷ از معادلهٔ لگاریتمی $\log_3(2x^2+1) - \log_3(x+2) = 1$، مقدار لگاریتم $(2x-1)$ در پایهٔ ۸، کدام است؟ (تجربی ۹۵)

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱۰۸ از معادلهٔ لگاریتمی $\log(x^2-x-6) - \log(x-3) = \log(2x-5)$، مقدار لگاریتم $\sqrt[3]{x+1}$ در پایهٔ ۴، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۵)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) ۱

۱۰۹ از معادلهٔ دو مجهولی $2^{x-7} \times 4^{x+y} = 1$ و $\log y = 2\log 3 + \log x$، مقدار y کدام است؟ (تجربی ۹۶)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

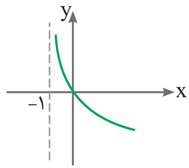
۱۱۰ از دو معادلهٔ دو مجهولی $3^{2x+y} = 9 \times 3^{x-y}$ و $\log(x+2y) = 1 + \log y$ مقدار x کدام است؟ (تجربی خارج ۹۶)

۱) ۱/۲ ۲) ۱/۴ ۳) ۱/۵ ۴) ۱/۶

۱۱۱ اگر $(\frac{125}{8})^{x^2} = (0/4)^{2x-1}$ باشد، $\log_8(9x+1)$، کدام است؟ (تجربی ۹۸)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۱۲ شکل زیر، نمودار تابع $y = \log_{۲} U(x)$ است. $U(x)$ کدام است؟ (تجربی ۹۸)



۱) $x + ۱$

۲) $(x + ۱)^{-۱}$

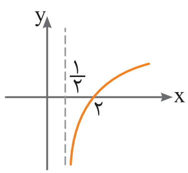
۳) $x - ۱$

۴) $۱ - x$

۱۱۳ اگر $۳^{x^۲-۲} = ۸۱^x$ باشد، $\log_{۶}(x - ۲)$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۸)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۱۴ شکل زیر، نمودار تابع $y = -۱ + \log_b(۲x + a)$ است. این منحنی خط $y = ۱$ را با کدام طول، قطع می‌کند؟ (تجربی خارج ۹۸)



۱) ۴

۲) ۵

۳) ۶

۴) ۷

فصل ۹: مثلثات

۱۱۵ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin(\pi+x)\cos(\frac{\pi}{۲}+x)-۲\sin(\pi-x)+۱=۰$، کدام است؟ (تجربی ۹۰)

۱) $۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$ ۲) $۲k\pi + \frac{\pi}{۶}$ ۳) $۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$ ۴) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۲}$

۱۱۶ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $(\sin x - \tan x)\tan(\frac{۳\pi}{۲} - x) = \cos\frac{۴\pi}{۳}$، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۰)

۱) $k\pi - \frac{\pi}{۶}$ ۲) $k\pi + \frac{\pi}{۳}$ ۳) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ ۴) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$

۱۱۷ نمودار تابع $y=-4\cos(\frac{\pi}{4}-3\pi x)$ روی بازهٔ $[-1,1]$ در چند نقطه بیش‌ترین مقدار را دارد؟ (تجربی ۹۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۸ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^2 x-\cos^2 x=\sin(\frac{3\pi}{2}+x)$، به کدام صورت است؟ (تجربی ۹۱)

۱) $\frac{k\pi}{3}$ ۲) $\frac{2k\pi}{3}$ ۳) $2k\pi+\frac{\pi}{3}$ ۴) $2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$

۱۱۹ نمودار تابع $y=3\sin(\frac{\pi}{4}-2x)$، روی بازهٔ $[-\pi,\frac{3\pi}{2}]$ در چند نقطه محور x ها را قطع می‌کند؟ (تجربی خارج ۹۱)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۲۰ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\sqrt{3}$، به کدام صورت است؟ $(k\in\mathbb{Z})$ (تجربی خارج ۹۱)

۱) $\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$ ۳) $k\pi+\frac{\pi}{6}$ ۴) $k\pi-\frac{\pi}{6}$

۱۲۱ در متوازی‌الاضلاعی، اندازهٔ دو قطر ۱۲ و ۸ واحد و زاویهٔ بین دو قطر ۱۳۵ درجه است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند برابر $\sqrt{2}$ است؟ (تجربی ۹۲)

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۳۲

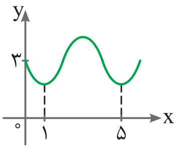
۱۲۲ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^4 x-\cos^4 x=\sin^2\frac{5\pi}{4}$، به کدام صورت است؟ $(k\in\mathbb{Z})$ (تجربی ۹۲)

۱) $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۲) $2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ ۳) $k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ ۴) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$

۱۲۳ مجموع تمام جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin 5x+\sin 4x=1+\cos\pi$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۲)

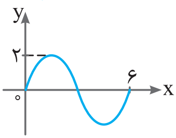
۱) 8π ۲) 9π ۳) 10π ۴) 11π

۱۲۴ شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ است. مقدار y در نقطهٔ $x = \frac{۲۵}{۳}$، کدام است؟
(تجربی ۹۳)



۱) ۲
۲) ۲/۵
۳) ۳
۴) ۳/۵

۱۲۵ شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin(b\pi x)$ است. $a + b$ کدام است؟
(تجربی خارج ۹۳)



۱) $\frac{۴}{۳}$
۲) $\frac{۵}{۳}$
۳) $\frac{۷}{۳}$
۴) $\frac{۸}{۳}$

۱۲۶ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۱ = \frac{\sin ۳x}{\cos(\frac{۳\pi}{۲} + x)}$ به کدام صورت است؟
(تجربی خارج ۹۳)

۱) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$
۲) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۴}$
۳) $۲k\pi \pm \frac{۳\pi}{۴}$
۴) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$

۱۲۷ حاصل عبارت $\frac{\cos ۲۸۵^\circ - \sin ۲۵۵^\circ}{\sin ۵۲۵^\circ - \sin ۱۰۵^\circ}$، با فرض $\tan ۱۵^\circ = ۰/۲۸$، کدام است؟
(تجربی ۹۴)

۱) $-\frac{۱۶}{۹}$
۲) $-\frac{۹}{۱۶}$
۳) $\frac{۹}{۱۶}$
۴) $\frac{۱۶}{۹}$

۱۲۸ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲\cos^۲ x + ۲\sin x \cos x = ۱$، به کدام صورت است؟
(تجربی ۹۴)

۱) $\frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۸}$
۲) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}$
۳) $k\pi - \frac{\pi}{۸}$
۴) $k\pi + \frac{\pi}{۸}$

۱۲۹ حاصل عبارت $\frac{\sin ۲۵۰^\circ + \sin ۷۰۰^\circ}{\cos ۵۶۰^\circ - \cos ۱۱۰^\circ}$، با فرض $\tan ۲۰^\circ = ۰/۴$، کدام است؟
(تجربی خارج ۹۴)

۱) $-\frac{۳}{۴}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۷}{۳}$
۴) $\frac{۵}{۸}$

۱۳۰) اگر $\tan\frac{x}{2} - \cot\frac{x}{2} = 1$ باشد، مقدار $\tan 2x$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۴)

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۳۱) جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$، با شرط $\cos x \neq 0$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۴)

۱) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ ۳) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

۱۳۲) اگر $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\cos(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha)$ کدام است؟ (تجربی ۹۵)

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۱۳۳) جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$، کدام است؟ (تجربی ۹۵)

۱) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ ۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۳) $2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$ ۴) $k\pi - \frac{\pi}{3}$

۱۳۴) اگر $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\tan(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2})$، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۵)

۱) -2 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 2

۱۳۵) اگر $\tan x = \frac{4}{3}$ باشد، مقدار $\tan\frac{x}{2} - \cot\frac{x}{2}$، کدام است؟ (تجربی ۹۶)

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۳۶) جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2x + 2\cos^2 x = 0$، کدام است؟ (تجربی ۹۶)

۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۲) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ ۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

۱۳۷) اندازهٔ دو قطر از متوازی‌الاضلاعی ۱۲ و $8\sqrt{3}$ است. این دو قطر با زاویهٔ ۶۰ درجه متقاطع هستند. مساحت این متوازی‌الاضلاع کدام است؟ (تجربی خارج ۹۶)

۱) ۴۸ ۲) ۵۴ ۳) ۶۴ ۴) ۷۲

۱۳۸) مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin ۲x + \cos(\frac{\pi}{۲} - x) = ۰$، در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۶)

۱) $\frac{۱۴\pi}{۳}$ ۲) ۴π ۳) $\frac{۹\pi}{۲}$ ۴) ۵π

۱۳۹) جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\tan x \tan ۳x = ۱$، کدام است؟ (تجربی ۹۷)

۱) $\frac{k\pi}{۴}$ ۲) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}$ ۳) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{۳\pi}{۸}$ ۴) $\frac{k\pi}{۴} + \frac{\pi}{۸}$

۱۴۰) مساحت مثلثی با طول اضلاع ۸، ۶ و ۴ واحد، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۷)

۱) $۶\sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۱۵}$ ۳) $۶\sqrt{۵}$ ۴) $۴\sqrt{۱۵}$

۱۴۱) جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{\sin ۳x + \sin ۲x}{۱ + \cos x} = ۰$، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۷)

۱) $\frac{k\pi}{۵}$ ۲) $\frac{۲k\pi}{۵}$ ۳) $k\pi + \frac{\pi}{۵}$ ۴) $\frac{(۲k+۱)\pi}{۵}$

۱۴۲) اگر $\pi < x < \frac{۳\pi}{۲}$ باشد، حاصل $\sqrt{۱ + \tan^۲ x}\,(۲\sin^۲ \frac{\pi}{۴} - \sin^۲ x)$، کدام است؟ (تجربی ۹۸)

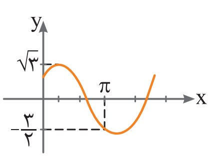
۱) $\sin x$ ۲) $\cos x$ ۳) $-\sin x$ ۴) $-\cos x$

۱۴۳) حاصل عبارت $\sin(\frac{۱۷\pi}{۳})\cos(-\frac{۱۷\pi}{۶}) + \tan(\frac{۱۹\pi}{۴})\sin(-\frac{۱۱\pi}{۶})$، کدام است؟ (تجربی ۹۸)

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۴۴) شکل زیر، قسمتی از تابع $y = a + b\sin(x + \frac{\pi}{۳})$ است. b کدام است؟ (تجربی ۹۸)

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۲



۱۴۵ مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $۴\sin x \sin(\frac{۳\pi}{۲} - x) = ۱$، در بازهٔ $[۰,۲\pi]$، کدام است؟ (تجربی ۹۸)

۱) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۲) ۳π ۳) ۴π ۴) ۵π

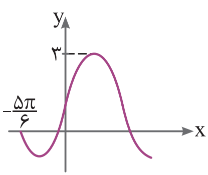
۱۴۶ اگر $\frac{\pi}{۲} < x < \pi$ باشد، حاصل $(\frac{۱}{\sin x} - \sin x)\frac{\tan x}{\sqrt{۱+\tan^۲ x}}$، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۸)

۱) $-\cos^۲ x$ ۲) $-\cos x$ ۳) $\cos^۲ x$ ۴) $\cos x$

۱۴۷ اگر $\tan\alpha = \frac{۴}{۳}$ و انتهای کمان α در ربع سوم باشد، حاصل عبارت زیر کدام است؟ $\sin(\frac{۹\pi}{۲} + \alpha)\cos(\frac{۷\pi}{۲} - \alpha) - \tan(\alpha - \frac{۳\pi}{۲})$ (تجربی خارج ۹۸)

۱) $-۱/۲۳$ ۲) $-۰/۵۲$ ۳) $۰/۲۷$ ۴) $۰/۴۸$

۱۴۸ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b\cos(\frac{\pi}{۲} - x)$ است. مقدار تابع در $x = \frac{\pi}{۶}$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۸)



۱) $۱/۵$
۲) ۲
۳) $۲/۵$
۴) $۱+\sqrt{۳}$

۱۴۹ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۳x + \cos x = ۰$، با شرط $\cos x \neq ۰$، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۸)

۱) $k\frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۳}$ ۲) $k\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$ ۳) $k\pi - \frac{\pi}{۴}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$

۹۷ ۴

$$(g^{-1}of^{-1})(۸) = g^{-1}(f^{-1}(۸))$$

برای محاسبهٔ $f^{-1}(۸)$، مقدار $f(x)$ را برابر ۸ قرار می‌دهیم:

$$f(x) = ۸ \Rightarrow \frac{۲}{۵}x - ۴ = ۸ \Rightarrow x = ۳۰$$

برای محاسبهٔ $g^{-1}(۳۰)$ هم، مقدار $g(x)$ را برابر ۳۰ قرار می‌دهیم:

$$x^{۳} + x = ۳۰ \xrightarrow{\text{جای‌گذاری گزینه‌ها}} x = ۳$$

۹۸ ۲

$$\log(۶ - ۲\sqrt{۵}) + \log(۱ + \sqrt{۵})^{۲} = \log(۶ - ۲\sqrt{۵})(۱ + \sqrt{۵})^{۲}$$

$$= \log(۶ - ۲\sqrt{۵})(۶ + ۲\sqrt{۵}) = \log(۳۶ - ۲۰) = \log ۱۶ = \log ۲^{۴}$$

$$= ۴\log ۲ \overset{\log ۲ = k}{=\!=\!=} ۴k$$

۹۹ ۱

$$\log \sqrt[۳]{۱/۶} = \log \sqrt[۳]{\frac{۸}{۵}} = \log \frac{۲}{\sqrt[۳]{۵}} = \log ۲ - \frac{۱}{۳}\log ۵$$

$$\overset{\log ۲ = ۱ - \log ۵}{=\!=\!=} ۱ - \log ۵ - \frac{۱}{۳}\log ۵ \overset{\log ۵ = ۳k}{=\!=\!=} ۱ - ۳k - \frac{۱}{۳}(۳k) = ۱ - ۴k$$

۱۰۰ ۳

$$f(۰) = \frac{۳}{۲} \Rightarrow ab^{۰} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow a = \frac{۳}{۲} \Rightarrow f(x) = \frac{۳}{۲}b^{x}$$

$$f(-۲) = \frac{۳}{۳۲} \Rightarrow \frac{۳}{۲}(b^{-۲}) = \frac{۳}{۳۲} \Rightarrow b^{۲} = ۱۶ \Rightarrow b = \pm ۴$$

چون در صورت سؤال گفته شده که $b > ۰$، پس $b = ۴$ صحیح است.

$$f(x) = \frac{۳}{۲} \times ۴^{x} \Rightarrow f(\frac{۳}{۲}) = \frac{۳}{۲} \times ۴^{\frac{۳}{۲}} = \frac{۳}{۲}(۲^{۲})^{\frac{۳}{۲}} = \frac{۳}{۲} \times ۸ = ۱۲$$

۱۰۱ ۳

تعداد باکتری‌ها در شروع کشت یعنی $t = ۰$ برابر ۸۰۰ است، پس:

$$t = ۰ \Rightarrow f(۰) = ۸۰۰ \Rightarrow Ae^{۰ \times k} = ۸۰۰ \Rightarrow A = ۸۰۰$$