درس اول: شمارش

TEST 205 اصل ضرب

در یک کارخانهٔ تولید ماشین، اتومبیل‌هایی در ۳ مدل، ۵ رنگ و دو نوع گیربکس اتوماتیک و دنده‌ای تولید می‌شود. در این کارخانه چند نوع اتومبیل مختلف از لحاظ مدل، رنگ و نوع گیربکس تولید می‌شود؟

۱) ۱۰ ۲) ۳۰ ۳) ۶۰ ۴) ۱۵

MiniBOX

برای اینکه بتوانیم بدون شمارش بشماریم، مثلاً برای اینکه بدانیم چند عدد سه‌رقمی با ارقام متمایز وجود دارد یا مسائلی از این قبیل را حل‌وفصل کنیم، از اصولی استفاده می‌کنیم که به آن‌ها اصول شمارش گفته می‌شود. مهم‌ترین اصول شمارش عبارت‌اند از: اصل ضرب، اصل جمع و ... که به‌تدریج به بررسی آن‌ها می‌پردازیم.

اگر عملی طی دو مرحلهٔ اول و دوم انجام‌پذیر باشد، به‌طوری که مرحلهٔ اول به m طریق «و» در مرحلهٔ دوم، هرکدام از این m طریق به n روش انجام‌پذیر باشد، تعداد راه‌های انجام این عمل در کل برابر است با:

$$m \times n$$

این روش شمارش را در ریاضیات اصل ضرب می‌نامند. در واقع زمانی از اصل ضرب در محاسبه استفاده می‌کنیم که با دو عمل متوالی که کامل‌کنندهٔ هم هستند مواجه شویم، یعنی دو عمل که هیچ‌کدام باعث نفی دیگری نشود و بتوانند توأم با هم انجام شوند [اصل ضرب برای انجام چندین عمل نیز قابل تعمیم است].

برای محاسبهٔ تعداد راه‌های پوشیدن ۳ شلوار و ۴ پیراهن از اصل ضرب استفاده می‌کنیم؛ زیرا پوشیدن شلوار باعث نفی پوشیدن پیراهن نیست و کامل‌کنندهٔ آن است.

اصل ضرب در زبان فارسی، معادل کلمهٔ «و» است؛ یعنی عمل اول «و» عمل دوم هم‌زمان با هم انجام می‌شوند.

رفت و برگشت، شلوار و پیراهن، تاس و سکه و ...

ANALYSE

رنگ، مدل و نوع گیربکس باعث نفی یکدیگر نیستند (مثلاً برای رنگ قرمز، هم گیربکس اتومات امکان‌پذیر است و هم دنده‌ای و ...)، بنابراین تعداد حالت‌ها در هم ضرب می‌شود: $۳۰ = ۲ \times ۵ \times ۳ =$ تعداد اتومبیل‌های مختلف

پاسخ گزینهٔ ۲

206 TEST حالت‌های سکه و تاس

سه سکه و یک تاس را پرتاب می‌کنیم. چند حالت برای برزمین نشستن آن‌ها وجود دارد که عدد تاس زوج باشد؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۸ ۳) ۲۴ ۴) ۷۲

MiniBOX

در مسائلی که صحبت از پرتاب سکه و تاس به میان می‌آید، باید توجه داشته باشیم که هر تاس ۶ حالت برای ظاهرشدن دارد؛ یعنی $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و هر سکه نیز ۲ حالت دارد؛ یعنی $S=\{$پشت , رو$\}$، حال اگر چند سکه و تاس را با هم پرتاب کنیم:

اگر هیچ محدودیتی نداشته باشند، تعداد حالات آن‌ها در هم ضرب می‌شود.

- تعداد حالات پرتاب ۴ سکه $=۲\times۲\times۲\times۲=۱۶$
- تعداد حالات پرتاب ۲ تاس $=۶\times۶=۳۶$
- تعداد حالات پرتاب ۲ تاس و ۳ سکه $=۶\times۶\times۲\times۲\times۲=۲۸۸$

اگر بعضی تاس‌ها یا سکه‌ها دارای محدودیت باشند، باید آن محدودیت را در نظر بگیریم و سپس از اصل ضرب استفاده کنیم.

- تعداد حالات پرتاب یک تاس قرمز و یک تاس سبز به طوری‌که تاس سبز مضرب ۳ بیاید:

$$n=\underset{\{۳,۶\}}{۲}\times\underset{\{۱,۲,...,۶\}}{۶}=۱۲$$

مسائل مربوط به تعداد حالات فرزندان خانواده نیز همانند پرتاب سکه است؛ چون جنسیت هر فرزند دارای ۲ حالت است.

- در یک خانواده با ۵ فرزند اگر بدانیم فرزند وسط دختر است، تعداد حالت‌های ممکن برای جنسیت فرزندان این خانواده برابر است با: $n=۲\times۲\times۱\times۲\times۲=۱۶$

ANALYSE

برای سکه‌ها هیچ محدودیتی وجود ندارد، اما تاس باید عدد زوج یعنی ۲ یا ۴ یا ۶ بیاید (دارای محدودیت است)، بنابراین تعداد کل حالت‌های مطلوب برابر است با: $n=۲\times۲\times۲\times۳=۲۴$

پاسخ گزینهٔ ۳

TEST 207 — **تعداد جملات در بسط**

در بسط $(a+b)(x+y+z)$ چند جمله وجود دارد؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۵

MiniBOX

در بعضی از مسائل شمارش، تعداد جملات حاصل‌ضرب دو یا چند عبارت چندجمله‌ای را از ما می‌خواهند. در این موارد تعداد کل جملات، در صورتی که پارامترهای به‌کار رفته در دو عبارت متمایز از هم باشند، برابر است با حاصل‌ضرب تعداد جملات آن عبارت‌ها.

$(a+b)(c+d)$ ⟵ تعداد جملات $=۲\times۲=۴$

دقت کنید در مواردی که دو عبارت حداقل دارای ۲ یک‌جمله‌ای متشابه باشند، امکان دارد جواب آخر کمتر از حاصل‌ضرب تعداد جملات دو عبارت باشد.

$$(x+۲)(x+y+۵)=x^۲+xy+\underbrace{۵x+۲x}_{۷x}+۲y+۱۰=x^۲+xy+۷x+۲y+۱۰$$

انتظار داشتیم ضرب دو عبارت $۶=۳\times۲$ جمله داشته باشد اما به علت تشابه $۲x$ و $۵x$ و قابلیت جمع‌شدن آن‌ها باهم، تعداد نهایی جملات برابر ۵ شد.

یکی از نتایج مستقیم سیب قبلی این است که در عبارت‌های چندجمله‌ای توان‌دار، همواره تعداد جملات بسط، کمتر از حاصل‌ضرب تعداد جملات عبارت‌ها است.

$$(a+b)^۲=\underbrace{(a+b)(a+b)}_{\text{ظاهراً } ۴=۲\times۲ \text{ جمله}}=a^۲+ab+ba+b^۲=\underbrace{a^۲+۲ab+b^۲}_{\text{واقعاً ۳ جمله}}$$

ANALYSE

چون جملات موجود در هر دو پرانتز کاملاً متمایز هستند، بنابراین تعداد کل جملات برابر است با حاصل‌ضرب تعداد جملات دو عبارت، یعنی: $۶=۳\times۲$

پاسخ گزینهٔ ۱

NOTE

TEST 208 **اصل جمع**

طاها دارای ۳ چکمه، ۴ کفش مردانه و ۵ کتانی ورزشی است. او به چند طریق می‌تواند یکی از آن‌ها را بپوشد؟

۱) ۶۰ ۲) ۲۰ ۳) ۱۵ ۴) ۱۲

MiniBOX

اگر بتوان عملی را به m طریق و عمل دیگری را به n طریق انجام داد و نتوان این دو عمل را با هم انجام داد، در این صورت تعداد روش‌هایی که عمل اول «یا» عمل دوم انجام‌پذیر است برابر است با:

$$m+n$$

این روش شمارش را در ریاضیات اصل جمع می‌گویند. در واقع زمانی از اصل جمع در محاسبه استفاده می‌کنیم که با دو عمل موازی که نفی‌کنندهٔ یکدیگر هستند مواجه شویم، یعنی دو عملی که انجام یکی باعث لغو دیگری شود و توأم باهم نتوانند انجام شوند [اصل جمع برای چندین عمل نیز قابل تعمیم است].

تعداد راه‌های بستن ۳ پیراهن و ۲ تیشرت (یک شخص نمی‌تواند هم تیشرت ببندد و هم پیراهن !!!) برابر با ۵ است.

اصل جمع در زبان فارسی معادل کلمهٔ «یا» است؛ یعنی عمل اول انجام می‌شود «یا» عمل دوم.

مسافرت با قطار یا هواپیما بین دو شهر مختلف

ANALYSE

چون این شخص نمی‌تواند چکمه، کفش و کتانی را با هم بپوشد [پوشیدن هر کدام باعث نفی دیگری می‌شود]، پس باید یکی از چکمه‌ها، یا یکی از کفش‌ها و یا یکی از کتانی‌ها را انتخاب کند؛ بنابراین تعداد کل راه‌های ممکن برای پوشیدن آن‌ها طبق اصل جمع برابر است با:

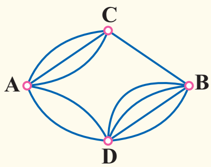
تعداد حالات پوشیدن پاپوش $=۳+۴+۵=۱۲$

پاسخ گزینهٔ ۴

NOTE

TEST 209 **تعداد مسیرهای بین دو نقطه**

چهار شهر A ، B ، C و D مطابق شکل توسط راه‌های مشخص‌شده به‌هم متصل‌اند. به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر B رفت؟



۱) ۱۲ ۲) ۱۱

۳) ۹ ۴) ۸

MiniBOX

در مسائل مربوط به مسیر (مدار)، راه‌هایی که با هم موازی هستند، تعدادشان باهم جمع می‌شود و راه‌هایی که با هم متوالی هستند، تعدادشان در هم ضرب می‌شود.

با توجه به شکل زیر مسیرهای موجود از A به C عبارت‌اند از:

$(۱+۱+۱)\times(۱+۱)=۳\times۲=۶$

در مدارها و مسیرها اگر صحبت از رفت و برگشت شد، با چند حالت کلی روبه‌رو می‌شویم:

اگر هیچ شرطی برای عبور از مسیرها وجود نداشته باشد، تعداد حالت‌های رفت و برگشت در هم ضرب می‌شود.

در شکل فوق، به $(۳\times۲)\times(۲\times۳)$ طریق می‌توان از A به C رفت و برگشت.

اگر قرار باشد از مسیر رفته، برنگردیم [یا از یک مسیر مشخص برنگردیم]، تعداد راه‌های برگشت یکی کمتر از تعداد راه‌های رفت خواهد بود.

در شکل فوق اگر بخواهیم از مسیر رفته برنگردیم تعداد راه‌ها ۶×۵ است.

اگر قرار باشد از هیچ جاده‌ای (راه بین دو نقطه) دو بار عبور نکنیم، برای مسیر برگشت از تعداد مسیرهای موجود بین هر دو شهر متوالی یک واحد کم می‌شود.

ANALYSE

برای رفتن از شهر A به شهر B دو راه اصلی وجود دارد: یا باید از A به C و از C به B رفت و یا از A به D و از D به B . در نتیجه تعداد کل مسیرها برابر است با: $(۳\times۱)+(۲\times۴)=۱۱$

پاسخ گزینهٔ ۲

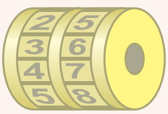
NOTE

TEST 210 — **رمزنگاری**

رمزگاوصندوق یک شرکت از ۳ کاراکترتشکیل شده است که کاراکتراول یک حرف انگلیسی صدا دار و هریک از کاراکترهای دیگر یک رقم فرد است. تعداد رمزهای متفاوتی که رئیس شرکت می‌تواند برای گاوصندوق بسازد، کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۴۵ ۳) ۷۵ ۴) ۱۲۵

MiniBOX



در مسائل مربوط به رمزنگاری و پرکردن خانه‌های تک‌کاراکتری، باید تعداد راه‌های پرکردن تمام کاراکترها را پیدا کرده و در هم ضرب کنیم، همچنین باید به موارد زیر دقت کنیم:

- اگر بخواهیم خانه‌ها را با عدد پر کنیم و هیچ شرط یا قیدی برای آن ذکر نشده باشد، می‌توانیم از همهٔ ارقام {۰ , ۱ , ۲ , ... , ۹} استفاده کنیم.
- اگر بخواهیم خانه‌ها را با حروف الفبا پر کنیم، در صورتی که حروف الفبا فارسی باشد، ۳۲ روش برای پرکردن هر خانه و اگر حروف انگلیسی باشد، ۲۶ روش برای پرکردن هر خانه وجود دارد.
- در این تیپ از مسائل به حرف «و» و «یا» در مسئله خوب دقت کنید.
- اگر برای امتحان‌کردن هر رمز، زمان هم داده شده باشد، پس از محاسبهٔ تعداد حالت‌ها، جواب را در زمان تعیین‌شده برای هر رمز ضرب می‌کنیم.

ANALYSE

در کاراکتر اول هریک از حروف $\{a,e,i,o,u\}$ و در هر کدام از دو کاراکتر بعدی هریک از ارقام {۱,۳,۵,۷,۹} می‌توانند قرار بگیرند. پس تعداد همهٔ رمزهای ممکن برای این گاوصندوق برابر است با:

$$\underbrace{5}_{\text{حروف صدادار}}\times\underbrace{5\times5}_{\text{ارقام فرد}}=125$$

پاسخ گزینهٔ ۴

NOTE

TEST 211 | **مسائل رنگ‌آمیزی**

به چند طریق با استفاده از سه رنگ سبز، زرد و قرمز می‌توان خانه‌های جدول زیر را رنگ کرد به‌طوری‌که هیچ دو خانهٔ مجاور هم‌رنگ نباشند؟

۴	۳	۲	۱

۱) ۶

۲) ۲۴

۳) ۵۴

۴) ۸۱

MiniBOX

در بعضی مسائل مربوط به اصل ضرب که قرار است چندین خانهٔ یک جدول، چند طبقهٔ یک ساختمان، چند رأس یک چندضلعی و ... رنگ‌آمیزی شود، اگر هیچ محدودیتی برای رنگ‌آمیزی خانه‌ها، طبقه‌ها، رأس‌ها و ... قائل نشوند، می‌توان از تمام رنگ‌ها استفاده کرد، اما گاهی محدودیت‌هایی اعمال می‌کنند که باعث می‌شود نتوانیم از همهٔ رنگ‌ها برای رنگ‌آمیزی یک خانه استفاده کنیم (مثلاً می‌گویند هیچ دو خانهٔ مجاور هم‌رنگ نباشند). در این حالت، تعداد انتخاب‌ها برای هر خانه با توجه به محدودیت‌ها در نظر گرفته می‌شود.

ANALYSE

برای خانهٔ شمارهٔ «۱» می‌توان از هر سه رنگ سبز، زرد و قرمز استفاده کرد ولی در خانهٔ شمارهٔ «۲» باید از دو رنگ دیگر استفاده کنیم که هم‌رنگ با خانهٔ شمارهٔ «۱» نشود. رنگ خانهٔ شمارهٔ «۳» نیز نباید با رنگ خانهٔ شمارهٔ «۲» یکسان باشد، پس برای خانهٔ شمارهٔ «۳» هم می‌توان از دو رنگ استفاده کرد. به طریق مشابه برای خانهٔ شمارهٔ «۴» هم فقط می‌توان از دو رنگ برای رنگ‌آمیزی استفاده کرد، بنابراین تعداد کل راه‌های ممکن برابر است با: $۳\times۲\times۲\times۲=۲۴$

پاسخ گزینهٔ ۲

NOTE

212 TEST **تست‌های چندگزینه‌ای**

یک پرسش‌نامه شامل ۵ سؤال دوگزینه‌ای است. به چند طریق می‌توان به این سؤالات پاسخ داد، به طوری‌که مجاز باشیم به دو سؤال آخر پاسخ ندهیم؟

۱) ۳۲ ۲) ۲۴۳ ۳) ۱۰۸ ۴) ۷۲

MiniBOX

در این تیپ سؤالات که به تست‌های چندگزینه‌ای مشهور هستند، ممکن است با دو ادبیات متفاوت روبه‌رو شویم:

اگر قرار باشد حتماً به یک تست، پاسخ دهیم تعداد روش‌های پاسخگویی، برابر با تعداد گزینه‌های آن تست است.

اگر مجاز باشیم به یک تست، پاسخ ندهیم تعداد روش‌های پاسخگویی، یکی بیشتر از تعداد گزینه‌های آن تست است.

یک تست سه‌گزینه‌ای را در نظر بگیرید:

- اگر قرار باشد حتماً به یکی از گزینه‌ها پاسخ دهیم، تنها ۳ انتخاب داریم، گزینهٔ (۱) یا گزینهٔ (۲) یا گزینهٔ (۳).
- اگر مجاز باشیم به این تست پاسخ ندهیم ۴ انتخاب داریم، چون حالت پاسخ ندادن هم به ۳ حالت پاسخگویی اضافه می‌شود.

این مسائل یک تیپ مشابه نیز دارند و آن مسئلهٔ انتخابات است که همانند پاسخگویی به تست‌های چندگزینه‌ای است، یعنی اگر تعدادی نامزد برای انتخابات وجود داشته باشد، انگار با یک تست چندگزینه‌ای روبه‌رو شده‌ایم.

دو نفر برای ریاست اداره‌ای نامزد شده‌اند. ۵ نفر از کارمندان به چند طریق می‌توانند به آن‌ها رأی دهند به‌طوری که هر نفر حداکثر به یک نفر رأی دهد؟

هر نفر ۳ انتخاب دارد، بنابراین تعداد راه‌ها برابر با $3\times3\times3\times3\times3$ است.

ANALYSE

به سه سؤال اول باید حتماً پاسخ داد، بنابراین هر کدام از آن‌ها تنها ۲ حالت دارند، اما دو سؤال آخر که مجاز هستیم به آن‌ها پاسخ ندهیم، هر کدام ۳ حالت دارند:

$$2\times2\times2\times3\times3=72$$

پاسخ گزینهٔ ۴

TEST 213 **مسائل قرارگیری**

۵ مسافر به چند طریق می‌توانند در سه ایستگاه پیاده شوند؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۰ ۳) ۲۴۳ ۴) ۱۲۵

MiniBOX

در مسائل قرارگیری [مسائلی که قرار است چند چیز متمایز در چند جایگاه قرار گیرند]، نکتهٔ اصلی و اساسی این است که «اشیا قرارگیرنده جایگاه‌ها را انتخاب می‌کنند»، یعنی حق انتخاب فقط برای شیء قرارگیرنده وجود دارد و «جایگاه»، انتخابی ندارد. اما در عین حال این مسائل به دو دستهٔ اصلی تقسیم می‌شوند:

دستهٔ اول مسائلی هستند که جایگاه، ظرفیت نامحدود دارد، در این حالت تعداد انتخاب همهٔ اشیا به تعداد ظرف‌ها بستگی دارد و با هم برابرند.

۴ مهره را می‌خواهیم در ۶ ظرف قرار دهیم، بنابراین مهرهٔ اول ۶ انتخاب دارد و مهره‌های بعدی نیز همچنان ۶ انتخاب خواهند داشت: $6\times6\times6\times6=6^4$

دستهٔ دوم مسائلی هستند که جایگاه، فقط ظرفیت یک شیء را دارد یا مسئله این محدودیت را برای جایگاه قائل می‌شود. در این حالت شیء اول به تعداد کل جایگاه‌ها انتخاب دارد و شیءهای بعد با توجه به تعداد جایگاه‌های پرشده، حق انتخاب کمتری دارند.

فرض کنید می‌خواهیم ارقام ۱، ۲ و ۳ را در یکی از ۵ خانهٔ هم‌ردیف قرار دهیم. برای پیداکردن تعداد حالات چون در هر خانه بیش از یک رقم نمی‌توان قرار داد رقم اول ۵ انتخاب، رقم دوم ۴ انتخاب و رقم سوم ۳ انتخاب دارد: $5\times4\times3=60$

ANALYSE

مسافر اول می‌تواند در هریک از ۳ ایستگاه اول، دوم یا سوم پیاده شود و چون ایستگاه‌ها ظرفیت محدود ندارند، پس مسافرهای بعدی نیز می‌توانند در هریک از این ۳ ایستگاه پیاده شوند. بنابراین تعداد حالت‌های مختلف برای پیاده شدن این ۵ مسافر برابر است با: $3\times3\times3\times3\times3=3^5=243$

پاسخ گزینهٔ ۳

NOTE

TEST 214 — تعداد اعداد [نوع اول]

چند عدد سه‌رقمی وجود دارد که به ۳ یا ۷ ختم شوند؟

۱) ۱۲۸ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۲۲۰

MiniBOX

اگر بخواهیم تعداد اعداد n رقمی با ارقام داده‌شده را پیدا کنیم، n جای خالی در نظر می‌گیریم و خانه‌ها را طبق اصول زیر پُر می‌کنیم:

- اگر مسئله محدودیتی برای یک خانه قائل شده بود، اول آن را پُر می‌کنیم.
- خانه‌ها معمولاً از سمت چپ به راست پر می‌شوند و اگر تکرار ارقام مجاز نباشد، در هر مرحله یک واحد از تعداد ارقام کم می‌شود.
- واضح است که رقم سمت چپ هیچ عددی صفر نیست.
- اگر گفته نشود با چه رقم‌هایی باید عدد بنویسیم، بدیهی است که مجازیم از هریک از ارقام $\{0,1,2,\dots,9\}$ استفاده کنیم.
- اگر صحبتی در رابطه با مجازبودن تکرار ارقام نشد، تکرار ارقام مجاز است. البته گاهی به‌طور غیرمستقیم در مسئله تکرار را غیرمجاز می‌کنند، در این موارد از جملاتی به شکل‌های زیر استفاده می‌شود:
  - با کنار هم قرار گرفتن ارقام ...
  - تعداد جایگشت‌های موجود با ارقام ...
  - تعداد اعدادی که هیچ دو رقم آن شبیه هم نیست ...
  - با ارقام عددِ ... یک عدد می‌نویسیم ...

ANALYSE

چون می‌خواهیم عدد سه‌رقمی بنویسیم، سه خانهٔ خالی درنظر می‌گیریم. رقم سمت چپ صفر نمی‌تواند باشد، پس ۹ حالت دارد. رقم یکان باید ۳ یا ۷ باشد، پس ۲ حالت دارد. برای رقم وسط، هریک از ارقام $\{0,1,2,\dots,9\}$ را می‌توان قرارداد (۱۰ حالت). بنابراین تعداد کل اعداد سه رقمی با شرایط گفته شده برابر است با:

$$\underbrace{9}_{\text{صدگان}} \times \underbrace{10}_{\text{دهگان}} \times \underbrace{2}_{\text{یکان}} = 180$$

پاسخ گزینهٔ ۲

TEST 215 — تعداد اعداد [نوع دوم]

با کنار هم قرار دادن ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد سه‌رقمی زوج می‌توان ساخت؟

۱) ۵۲ ۲) ۵۸ ۳) ۳۰ ۴) ۴۲

MiniBOX

در سؤالات ساختن عدد، اگر صحبت از ویژگی‌هایی مانند فرد، زوج و مضرب ۵ و ... به میان آمده بود که برای خانهٔ سمت راست محدودیت ایجاد می‌کند، ابتدا تکلیف آن را مشخص می‌کنیم.

تعداد اعداد فرد سه رقمی برابر است با:

Loading ...

$$\square \times \square \times \underset{\{1,3,5,7,9\}}{5} \;\Rightarrow\; \underset{\text{غیرصفر}}{9} \times 10 \times 5 = 450$$

تعداد اعداد سه رقمی مضرب ۵ با ارقام $\{0,1,2,3,4,5\}$ برابر است با:

Loading ...

$$\square \times \square \times \underset{\{0,5\}}{2} \;\Rightarrow\; \underset{\text{غیرصفر}}{5} \times 6 \times 2 = 60$$

در ساختن تعداد اعداد زوج یا مضرب ۵ بدون تکرار ارقام هنگامی که صفر نیز جزو ارقام داده شده است، مسئله باید به دو قسمت تقسیم شود و جواب‌ها را جمع کنیم:

- محاسبهٔ تعداد اعدادی که رقم سمت راست آن‌ها صفر است.
- محاسبهٔ تعداد اعدادی که رقم سمت راست آن‌ها صفر نیست.

تعداد اعداد سه‌رقمی مضرب ۵ با ارقام $\{0,1,2,4,5\}$ که ارقام آن متمایز باشند، برابر است با:

$$\underbrace{\square \times \square}_{\text{Loading}} \times \underset{\{0\}}{1} + \underbrace{\square \times \square}_{\text{Loading}} \times \underset{\{5\}}{1} \;\Rightarrow\; \underset{\{1,2,4,5\}}{4} \times 3 \times \underset{\{0\}}{1} + \underset{\{1,2,4\}}{3} \times 3 \times \underset{\{5\}}{1}$$

در محاسبهٔ تعداد کُدها همواره باید به این نکته دقت کنید که کُدها می‌توانند با صفر هم شروع شوند ولی اعداد نمی‌توانند با صفر آغاز شوند.

ANALYSE

تکرار ارقام مجاز نیست و رقم صفر در میان ارقام داده شده وجود دارد، بنابراین:

$$\underbrace{\square \times \square}_{\text{Loading ...}} \times \underset{\{0\}}{1} + \underbrace{\square \times \square}_{\text{Loading ...}} \times \underset{\{2,4\}}{2} \;\Rightarrow\; \underset{\{1,2,3,4,5\}}{5} \times 4 \times 1 + \underset{\text{غیر صفر و یکان}}{4} \times \underset{\text{غیر یکان و صدگان}}{4} \times 2 = 52$$

پاسخ گزینهٔ ۳

TEST 216 — تعداد اعداد [نوع سوم]

با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد سه‌رقمی بزرگ‌تر از ۳۰۰ می‌توان نوشت؟

۱) ۹۸ ۲) ۱۰۲ ۳) ۱۰۷ ۴) ۱۱۲

MiniBOX

اگر بخواهیم تعداد اعداد بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از عددی را حساب کنیم، معمولاً روی خانهٔ سمت چپ محدودیت‌هایی به وجود می‌آید که باید آن‌ها را لحاظ کنیم.

در این تیپ مسائل ممکن است ریزه‌کاری‌هایی نیز وجود داشته باشد که باید آن‌ها را در هنگام محاسبه در نظر بگیریم.

تعداد اعداد سه‌رقمی بزرگ‌تر از ۲۰۱ که با ارقام $\{0,1,2,4,5\}$ می‌توان نوشت برابر است با:

$$\underbrace{3}_{\{2,4,5\}}\times 5\times 5 - 2 = 75 - 2 = 73$$

اعداد ۲۰۰ و ۲۰۱ را باید کنار بگذاریم.

در محاسبهٔ تعداد اعداد فاقد یک یا چند رقم مشخص، کافی است آن‌ها را کنار بگذاریم و با بقیهٔ رقم‌ها محاسبه را ادامه دهیم.

تعداد اعداد سه‌رقمی فرد فاقد ارقام ۴ و ۵ کدام است؟

چون می‌خواهیم رقم‌های ۴ و ۵ در عدد موردنظر نباشند، آن‌ها را کنار می‌گذاریم و از ۸ رقم $\{0,1,2,3,6,7,8,9\}$ استفاده می‌کنیم:

$$\underbrace{7}_{\text{صفر نیست}}\times \underbrace{8}_{\text{آزاد}}\times \underbrace{4}_{\{1,3,7,9\}} = 224$$

ANALYSE

چون عدد موردنظر باید بزرگ‌تر از ۳۰۰ باشد، پس رقم سمت چپ باید یکی از ارقام ۳، ۴ یا ۵ بیاید. از طرفی چون تکرار ارقام مجاز است، ممکن است رقم ۳۰۰ نیز ساخته شود، پس تعداد اعداد سه‌رقمی بزرگ‌تر مساوی ۳۰۰ را محاسبه می‌کنیم و عدد ۳۰۰ را کنار می‌گذاریم:

$$\underbrace{3}_{\{3,4,5\}}\times \underbrace{6\times 6}_{\text{آزاد}} - \underbrace{1}_{\text{عدد ۳۰۰}} = 108 - 1 = 107$$

پاسخ: گزینهٔ ۳

TEST 217 اصل تفریق

تعداد اعداد سه رقمی شامل رقم ۲ کدام است؟

۱) ۲۵۲ ۲) ۲۴۰ ۳) ۲۳۱ ۴) ۲۱۰

MiniBOX

در بعضی مسائل، محاسبهٔ تعداد حالت‌هایی که طراح نمی‌خواهد (نامطلوب)، از محاسبهٔ تعداد حالت‌های مطلوب مسئله راحت‌تر است. برای حل این نوع مسائل، ابتدا تعداد حالت‌های نامطلوب را محاسبه می‌کنیم و از تعداد کل حالت‌های ممکن کم می‌کنیم. این اصل را اصل تفریق یا متمم می‌نامند.

تعداد حالت‌های نامطلوب − تعداد کل حالت‌ها = تعداد حالت‌های مطلوب

اگر بخواهیم تعداد اعدادی را حساب کنیم که شامل رقم مشخصی باشند، ابتدا تعداد کل اعداد را حساب می‌کنیم، سپس تعداد اعداد فاقد آن رقم را از کل کم می‌کنیم.

در مسائل مربوط به شمارش اگر به کلماتی نظیر حداقل (لااقل یا دست‌کم) یا حداکثر برخورد کردیم یا از فعل‌های منفی در صورت تست استفاده شده بود، احتمالاً باید به سراغ اصل تفریق (متمم) برویم. درغیراین صورت باید چندین حالت در نظر بگیریم و تعداد راه‌ها را با هم جمع کنیم.

در چند عدد سه‌رقمی حداقل دو رقم مثل هم وجود دارد؟

تعداد اعداد سه‌رقمی با رقم‌های متمایز را محاسبه کرده و از تعداد کل اعداد سه‌رقمی کم می‌کنیم:

$$\underbrace{9\times10\times10}_{\text{تعداد کل اعداد سه رقمی}} - \underbrace{9\times9\times8}_{\text{تعداد کل اعداد سه رقمی متمایز}} = ۹۰۰-۶۴۸=۲۵۲$$

صفر نیست   صفر نیست

ANALYSE

تعداد اعداد سه‌رقمی فاقد رقم ۲ را محاسبه کرده و آن را از تعداد کل اعداد سه رقمی کم می‌کنیم:

تعداد ارقام سه‌رقمی فاقد رقم ۲ − تعداد کل اعداد سه‌رقمی = تعداد اعداد سه‌رقمی شامل رقم ۲

$$9\times10\times10 - 8\times9\times9 = ۲۵۲$$

صفر نیست   ۰ یا ۲ نیست   ۲ نیست

پاسخ گزینهٔ ۱

TEST 218 مفهوم فاکتوریل

اگر $\frac{n!}{(n-2)!}=72$ باشد، حاصل $((\frac{n-3}{2})!)!$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۲۰ ۳) ۷۲۰ ۴) ۶

MiniBOX

اگر n یک عدد طبیعی باشد، حاصل ضرب اعداد طبیعی از ۱ تا n را به‌صورت $n!$ نشان می‌دهند و می‌خوانند «n فاکتوریل»:

$$\boxed{n!=1\times2\times3\times\cdots\times(n-1)\times n}$$

ریاضی‌دان‌ها قرارداد کرده‌اند که $0!=1$ است و $1!=1$.

$5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

$3!=3\times2\times1=6$

$\frac{8!}{6!}=\frac{8\times7\times6!}{6!}=56$

$\frac{6!}{5!}=\frac{6\times5!}{5!}=6$

حاصل ضرب هر تعداد عدد متوالی را می‌توان به‌صورت تقسیم دو عدد فاکتوریل‌دار نوشت:

$$6\times5=\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1}=\frac{6!}{4!}$$

$$n(n-1)(n-2)=\frac{n(n-1)(n-2)\times(n-3)\times\ldots\times2\times1}{(n-3)(n-4)\times\ldots\times2\times1}=\frac{n!}{(n-3)!}$$

ANALYSE

کسر $\frac{n!}{(n-2)!}$ را با بازکردن صورت، ساده می‌کنیم:

$$\frac{n!}{(n-2)!}=\frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}}=72\Rightarrow n(n-1)=72=9\times8\Rightarrow n=9$$

[دقت کنید حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی برابر ۷۲ شده است، پس $n(n-1)=9\times8$ بوده، یعنی $n=9$.]

بنابراین در عبارت $((\frac{n-3}{2})!)!$ به‌جای n عدد ۹ را قرار می‌دهیم:

$$((\frac{n-3}{2})!)!=((\frac{9-3}{2})!)!=(3!)!=6!=720$$

پاسخ گزینهٔ ۳

TEST 219 **جایگشت**

۵ نفر به نام‌های A، B، C، D و E به چند طریق می‌توانند برای تهیهٔ بلیط تئاتر «در انتظار گودو» نوشتهٔ ساموئل بِکت در یک صف باشند؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۵ ۴) $۵^۵$

MiniBOX

اگر چند شیء متمایز داشته باشیم به هر حالتِ چیدن آن‌ها در کنار هم، یک جایگشت از آن اشیا می‌گوییم.

جایگشت‌های سه حرف A ، B و C به‌صورت زیر است:

ABC , BAC , CAB
ACB , BCA , CBA

برای محاسبهٔ تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز، n خانه در نظر می‌گیریم. خانهٔ اول را به n طریق، خانهٔ بعدی را به $n-۱$ طریق و ... و خانهٔ آخر را به یک طریق می‌توان پُر کرد. بنابراین طبق اصل ضرب تعداد جایگشت‌های n شیء برابر است با:

$$\boxed{n\times(n-۱)\times\cdots\times۲\times۱=n!}$$

وقتی صحبت از جایگشت چند شیء به میان می‌آید که تکرار غیرمجاز باشد.

ANALYSE

می‌دانیم که آدم‌ها تکرار نمی‌شوند (یعنی یک آدم امکان ندارد در یک صف در همان لحظه که در مکان اول قرار دارد، در مکان دوم هم باشد)، بنابراین باید جایگشت‌های این ۵ نفر را حساب کنیم که برابر است با:

$$۵!=۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۱۲۰$$

پاسخ گزینهٔ ۱

NOTE