مقدمه مؤلف

به نام خالق زیبایی‌ها

من و شما هدف‌های مشترکی داریم که یکی از آنها موفقیت شما در امتحانات نهایی پایهٔ دوازدهم است.
تسلط بر مفاهیم ریاضیات گسسته تنها با حل کردن مسائل متنوع و بررسی تمرین‌های مختلف میسر است. در این کتاب تلاش کردیم با طرح تعداد محدودی تمرین که هر کدام نکته و مطلبی را برای آموزش در بر دارد، شما را برای شرکت در امتحان نهایی آماده کنیم.

در این کتاب می‌خوانید:

- نمونه سؤالات مهم امتحانی:
  - سؤالات مهم کتاب درسی که در طراحی سؤالات امتحانات نهایی بسیار مورد توجه هستند.
  - سؤالاتی که در آزمون‌های سال‌های قبل بسیار مورد استفاده بوده‌اند و می‌توان آنها را به عنوان سؤالات احتمالی آزمون امسال برشمرد. بخشی از آنها عیناً و به همراه «مرجع اخذ سؤال» مطرح شده است و برخی از آنها با تغییرات در راستای اهداف و مباحث کتاب‌های درسی جدید ارائه گردیده‌اند.
- نمونه آزمون‌های ترم اول و پایانی:

  نمونه آزمون‌هایی با بودجه‌بندی مصوب آزمون طراحی، و به همراه پاسخ تشریحی ارائه شده است.
  پیشنهاد می‌شود با توجه به جدول بودجه‌بندی آزمون‌ها، بارم‌بندی هر فصل، زمان باقی‌مانده تا امتحان و نقاط ضعف و قوت خود، برنامه‌ریزی مناسبی برای مطالعه داشته باشید تا به بهترین نتیجه دست پیدا کنید.

فصل	محدودهٔ فصل	نوبت اول	نوبت دوم	شهریور و دی
۱	کل	۱۵	۳/۵	۷
۲	تا صفحهٔ ۴۲	۵	۱/۵	۶
	صفحهٔ ۴۲ به بعد		۶	
۳	کل		۹	۷
جمع نمره‌ها		۲۰	۲۰	۲۰

با آرزوی موفقیت شما

علی داودی

فهرست

آشنایی با نظریهٔ اعداد

فصل ۱

درس اول: استدلال ریاضی

۱ عبارت‌های زیر را کامل کنید.

الف) گزارهٔ «عدد $۲^{۲^n}+۱$ به ازای تمام اعداد طبیعی n، عددی اول است»، به ازای $n=۵$ برقرار نیست و $n=۵$ را یک .... برای این گزاره می‌گوییم.

ب) اگر حکم مسئله‌ای روی یک دامنهٔ متناهی تعریف شود و درستی حکم را با قرار دادن هر یک از اعضای دامنه در آن بررسی کنیم، روش اثبات مسئله .... است.

پ) سه گزارهٔ «اگر x مضرب ۳ باشد، $x(x-۳)$ مضرب ۱۸ است.»، «مجموع دو عدد گنگ، عددی گنگ است.» و «مجموع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.» را به ترتیب با استدلال‌های ....، .... و .... تأیید یا رد می‌کنیم.

پاسخ:
الف) مثال نقض
ب) در نظرگرفتن همهٔ حالت‌ها
پ) اثبات مستقیم - مثال نقض - برهان خلف (اثبات غیرمستقیم)

۲ درستی گزاره‌های زیر را با استفاده از روش برهان خلف ثابت کنید. (کاردرکلاس صفحهٔ ۶ کتاب درسی)

الف) اگر x یک عدد گنگ باشد، ثابت کنید $\frac{۱}{x}$ نیز گنگ است.

پاسخ: فرض خلف: فرض کنیم $\frac{۱}{x}$ گنگ نباشد، پس عددی گویا است. با توجه به اینکه $\frac{۱}{x}$ غیرصفر است و معکوس هر عدد گویای غیرصفر عددی گویاست، $\frac{x}{۱}=x$ گویا است و این متناقض با فرض گنگ بودن x است، پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

ب) اگر تابع f در $x=a$ پیوسته ولی تابع g در $x=a$ ناپیوسته باشد، ثابت کنید $f+g$ در $x=a$ ناپیوسته است.

پاسخ: فرض خلف: فرض کنیم تابع $f+g$ در $x=a$ پیوسته باشد، در این صورت در $x=a$ داریم:

$$g=\underbrace{f+g}_{\text{پیوسته}}-\underbrace{f}_{\text{پیوسته}}\xrightarrow{\text{قضیه‌ای در حسابان}} \text{g پیوسته است.}$$

و پیوسته بودن g در $x=a$ متناقض با فرض ناپیوسته بودن g در $x=a$ است. بنابراین فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

۳ حکم درست را با اثبات مستقیم ثابت کرده و برای حکم نادرست مثال نقض بیاورید.

الف) اگر x عددی گویا و y عددی گنگ باشد، آنگاه y^x عددی گویاست.

پاسخ: مثال نقض: $x=۳$ عدد گویا و $y=\sqrt{۲}$ عدد گنگ است. در این صورت $y^x=(\sqrt{۲})^۳=۲\sqrt{۲}$ عددی گویا نیست و حکم نادرست است.

ب) اگر x و y دو عدد گویا باشند، xy نیز عددی گویا است.

پاسخ: اثبات مستقیم: فرض کنید $a,b\in\mathbb{Z}$ و $c,d\in\mathbb{N}$، در این صورت $x=\frac{a}{c}$ و $y=\frac{b}{d}$ دو عدد گویای دلخواه هستند. می‌دانیم مجموعهٔ اعداد صحیح و طبیعی نسبت به عمل ضرب بسته‌اند. بنابراین:

$$xy=(\frac{a}{c})\times(\frac{b}{d})=\frac{ab\to\in\mathbb{Z}}{cd\to\in\mathbb{N}}\Rightarrow xy\in\mathbb{Q}$$

۴ اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha-\beta$ و $\alpha+۲\beta$ گنگ هستند. (تمرین صفحهٔ ۸ کتاب درسی)

پاسخ: الف) نشان می‌دهیم $\alpha-\beta$ گنگ است.

فرض خلف: فرض می‌کنیم $\alpha-\beta$ گنگ نباشد، بنابراین گویا است. در نتیجه:

$$\alpha-\beta=(\alpha+\beta)-۲\beta\Rightarrow ۲\beta=\underbrace{(\alpha+\beta)}_{\text{گویا}}-\underbrace{(\alpha-\beta)}_{\text{گویا}}$$

در نتیجه ۲β گویا است و در نتیجه β نیز گویا است و این در تناقض با فرض گنگ بودن β است. بنابراین فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

ب) نشان می‌دهیم $\alpha+۲\beta$ گنگ است.

فرض خلف: فرض می‌کنیم $\alpha+۲\beta$ گنگ نباشد، بنابراین گویا است. در نتیجه:

$$\alpha+۲\beta=(\alpha+\beta)+\beta\Rightarrow\beta=\underbrace{(\alpha+۲\beta)}_{\text{گویا}}-\underbrace{(\alpha+\beta)}_{\text{گویا}}$$

بنابراین β عددی گویا است و این در تناقض با فرض گنگ بودن β است. بنابراین فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

۵ گزارهٔ درست را ثابت کرده و برای رد گزارهٔ نادرست، مثال نقض بیاورید.

الف حاصل‌جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است. (نهایی خرداد ۹۴)

پاسخ: فرض کنید r عددی گویا و x عددی گنگ باشد. ثابت می‌کنیم $r+x$ عددی گنگ است.

فرض خلف: فرض کنیم $r+x$ عددی گنگ نباشد، بنابراین برابر با عددی گویا مانند t خواهد بود. با توجه به اینکه مجموعهٔ اعداد گویا نسبت به عمل تفریق بسته است، داریم:

$$r+x=t \Rightarrow x=\underbrace{t}_{\text{گویا}}-\underbrace{r}_{\text{گویا}} \Rightarrow x\in\mathbb{Q}$$

پس x باید عددی گویا باشد و این متناقض با فرض گنگ بودن x است. پس فرض خلف باطل و $r+x$ عددی گنگ است.

ب اگر x و y دو عدد گنگ باشند، x^y نیز عددی گنگ است.

پاسخ: دو عدد گنگ $x=\sqrt{۳}$ و $y=\sqrt{۲}$ را درنظر بگیرید. اگر $x^y=\sqrt{۳}^{\sqrt{۲}}$ گویا باشد، آنگاه مثال نقضی برای رد این حکم است و اگر گنگ باشد، آن را به توان عدد گنگ $\sqrt{۲}$ می‌رسانیم:

$$(\sqrt{۳}^{\sqrt{۲}})^{\sqrt{۲}}=\sqrt{۳}^{\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}}=\sqrt{۳}^{۲}=۳$$

و باز هم مثال نقضی برای رد این حکم به دست می‌آید. یعنی x^y می‌تواند گنگ یا گویا باشد.

۶ با استفاده از برهان خلف، ثابت کنید $\sqrt{۲}$ عددی گنگ است. (نهایی خرداد ۹۲)

پاسخ: فرض خلف: فرض می‌کنیم $\sqrt{۲}$ گنگ نباشد، بنابراین عددی گویا است. در این صورت اعداد صحیح a و b وجود دارند، به‌طوری‌که $\sqrt{۲}=\frac{a}{b}$ و $(a\,,b)=۱$ (یعنی a و b عامل مشترکی به جز یک ندارند و $\frac{a}{b}$ قابل ساده‌شدن نیست). در این صورت:

$$\sqrt{۲}=\frac{a}{b}\Rightarrow ۲=\frac{a^۲}{b^۲}\Rightarrow a^۲=۲b^۲$$

یعنی $a^۲$ عددی زوج است. از طرفی می‌دانیم اگر مربع عددی زوج باشد، خود آن عدد هم زوج است؛ پس a هم باید عددی زوج باشد. در نتیجه به ازای $q\in\mathbb{Z}$ داریم:

$$a=۲q\Rightarrow ۴q^۲=a^۲=۲b^۲\Rightarrow ۲q^۲=b^۲$$

بنابراین $b^۲$ نیز عددی زوج و لذا b هم عددی زوج است. یعنی a و b هر دو مضرب ۲ هستند و کسر $\frac{a}{b}$ ساده می‌شود و این در تناقض با فرض اولیهٔ $(a\,,b)=۱$ است. پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

۷ می‌دانیم $\sqrt{۲}$ عددی گنگ است. به کمک برهان خلف ثابت کنید $\sqrt{\sqrt{۲}+۱}$ نیز عددی گنگ است.

پاسخ: فرض خلف: فرض می‌کنیم $\sqrt{\sqrt{۲}+۱}$ گنگ نباشد، بنابراین برابر با عددی گویا مانند x است، در این صورت:

$$\sqrt{\sqrt{۲}+۱}=x\Rightarrow\sqrt{۲}+۱=x^۲\Rightarrow\sqrt{۲}=\underbrace{x^۲}_{\text{گویا}}-\underbrace{۱}_{\text{گویا}}\Rightarrow\sqrt{۲}\in\mathbb{Q}$$

بنابراین $\sqrt{۲}$ باید عددی گویا باشد و این در تناقض با فرض مسئله است. در نتیجه فرض خلف باطل بوده و حکم برقرار است.

۸ می‌دانیم $\sqrt{۳}$ عددی گنگ است. به کمک برهان خلف ثابت کنید $\sqrt{۳}+\sqrt{۵}$ نیز عددی گنگ است.

پاسخ: فرض خلف: فرض می‌کنیم $\sqrt{۳}+\sqrt{۵}$ گنگ نباشد، بنابراین برابر با عددی گویا چون x است، در این صورت:

$$\sqrt{۳}+\sqrt{۵}=x\Rightarrow\sqrt{۵}=x-\sqrt{۳}\Rightarrow\sqrt{۵}^۲=(x-\sqrt{۳})^۲\Rightarrow ۵=x^۲-۲\sqrt{۳}x+۳\Rightarrow ۲\sqrt{۳}x=x^۲-۲\Rightarrow\sqrt{۳}=\frac{x^۲-۲}{۲x}$$

x عددی گویا است، بنابراین $x^۲$ عددی گویا و در نتیجه $x^۲-۲$ نیز عددی گویاست. از طرفی ۲x عددی گویا بوده و $\frac{x^۲-۲}{۲x}$ نیز عددی گویا خواهد بود و این یعنی $\sqrt{۳}$ عددی گویاست که متناقض با فرض مسئله است. در نتیجه فرض خلف باطل بوده و حکم برقرار خواهد بود.

۹ می‌دانیم $\sqrt{۶}$ عددی گنگ است. با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}$ نیز عددی گنگ است.

پاسخ: ابتدا به کمک گویا کردن، عبارت را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}=\frac{۳+۲+۲\sqrt{۶}}{\sqrt{۳}^۲-\sqrt{۲}^۲}=\frac{۵+۲\sqrt{۶}}{۳-۲}=۵+۲\sqrt{۶}$$

فرض خلف: فرض می‌کنیم $۵+۲\sqrt{۶}$ گنگ نباشد، بنابراین برابر با عددی گویا چون x است، در این صورت:

$$۵+۲\sqrt{۶}=x\Rightarrow ۲\sqrt{۶}=x-۵\Rightarrow\sqrt{۶}=\frac{x-۵}{۲}$$

x عددی گویاست، پس $x-۵$ نیز عددی گویا بوده و $\frac{x-۵}{۲}$ هم یک عدد گویاست. بنابراین $\sqrt{۶}$ باید عددی گویا باشد و این در تناقض با فرض مسئله است. در نتیجه فرض خلف باطل و حکم مسئله برقرار است.

۱۰ با اثبات مستقیم ثابت کنید مجموع ۳ عدد زوج متوالی همواره بر ۶ بخش‌پذیر است.

پاسخ: فرض کنیم a، b و c سه عدد زوج متوالی باشند. به ازای $k\in\mathbb{Z}$ داریم:

$$a=۲k\,,\,b=۲k+۲\,,\,c=۲k+۴\Rightarrow a+b+c=۲k+(۲k+۲)+(۲k+۴)=۶k+۶=۶(\underbrace{k+۱}_{q\in\mathbb{Z}})=۶q$$

۱۱ اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+۲$ یا $a+۴$ بر ۳ بخش‌پذیر است. (تمرین صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)

پاسخ: در تقسیم بر ۳، به ازای $k\in\mathbb{Z}$ می‌توانیم برای a سه حالت زیر را درنظر بگیریم:

حالت ۱) $a=۳k$: $a=۳k\Rightarrow$ a بر ۳ بخش‌پذیر است.

حالت ۲) $a=۳k+۱$: $a+۲=(۳k+۱)+۲=۳(\underbrace{k+۱}_{q\in\mathbb{Z}})=۳q\Rightarrow$ $a+۲$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

حالت ۳) $a=۳k+۲$: $a+۴=(۳k+۲)+۴=۳(\underbrace{k+۲}_{q\in\mathbb{Z}})=۳q\Rightarrow$ $a+۴$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

بنابراین a هر مقداری داشته باشد، یا a یا $a+۲$ یا $a+۴$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

۱۲ با استفاده از برهان خلف، ثابت کنید اگر $n^۲$ مضرب ۳ باشد، آنگاه n نیز مضرب ۳ است. $(n\in\mathbb{Z})$ (نهایی شهریور ۸۷)

پاسخ: فرض خلف: فرض می‌کنیم n مضرب ۳ نباشد، در این صورت باقیماندهٔ تقسیم n بر ۳ یکی از اعداد ۱ یا ۲ خواهد بود. بنابراین:

$$n\neq ۳k\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}\begin{cases}n=۳k+۱\Rightarrow n^۲=(۳k+۱)^۲=۹k^۲+۶k+۱=۳(\underbrace{۳k^۲+۲k}_{q_۱\in\mathbb{Z}})+۱=۳q_۱+۱\\ \text{یا}\\ n=۳k+۲\Rightarrow n^۲=(۳k+۲)^۲=۹k^۲+۱۲k+۴=۳(\underbrace{۳k^۲+۴k+۱}_{q_۲\in\mathbb{Z}})+۱=۳q_۲+۱\end{cases}$$

بنابراین $n^۲$ نیز مضرب ۳ نیست و این متناقض با فرض مسئله است. پس فرض خلف باطل و حکم مسئله برقرار است.

۱۳ گزارهٔ درست را ثابت کرده و برای گزارهٔ نادرست مثال نقض بیاورید.

الف اگر $n^۲$ بر ۲۰ بخش‌پذیر باشد، آنگاه n نیز بر ۲۰ بخش‌پذیر است.

پاسخ: فرض کنید $n=۱۰$ باشد، در این صورت $n^۲=۱۰۰$ یعنی $n^۲$ بر ۲۰ بخش‌پذیر است، اما n بر ۲۰ بخش‌پذیر نیست. (مثال نقض)

ب برای هر عدد طبیعی n، $n^۲-۵n+۷$ عددی فرد است.

پاسخ: عبارت را به صورت روبه‌رو می‌نویسیم: $n^۲-۵n+۷=n^۲-۵n+۶+۱=(n-۳)(n-۲)+۱$

$(n-۳)(n-۲)$ حاصل‌ضرب دو عدد صحیح متوالی می‌باشد، بنابراین عددی زوج است. پس به ازای $k\in\mathbb{Z}$ داریم $(n-۳)(n-۲)=۲k$ و در نتیجه می‌توان نوشت $n^۲-۵n+۷=۲k+۱$ و عددی فرد است.

پ اگر a و b دو عدد حقیقی و $ab=۰$ باشد، آنگاه $a=۰$ یا $b=۰$.

پاسخ: روش اول: برای a دو حالت درنظر می‌گیریم.

اگر $a=۰$ باشد، در این صورت گزارهٔ $(a=۰)\vee(b=۰)$ دارای ارزش درست بوده و حکم مسئله برقرار است.

اگر $a\neq ۰$ باشد، در این صورت: $ab=۰\Rightarrow\frac{۱}{a}(ab)=\frac{۱}{a}\times ۰\Rightarrow b=۰$

و باز هم گزارهٔ $(a=۰)\vee(b=۰)$ دارای ارزش درست بوده و حکم مسئله برقرار خواهد بود.

روش دوم: فرض خلف: فرض کنیم a و b هیچ‌کدام صفر نباشند، یعنی $(a\neq ۰)\wedge(b\neq ۰)$. در این صورت حاصل‌ضرب آنها عددی مخالف صفر خواهد بود. یعنی $ab\neq ۰$ و این متناقض با فرض مسئله است. بنابراین فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

۱۴ دو سؤال زیر را به روش اثبات مستقیم ثابت کنید.

الف مربع هر عدد فرد، به صورت $۸k+۱$ است.

پاسخ: فرض کنید a یک عدد فرد دلخواه باشد. پس عدد صحیح q وجود دارد به‌طوری‌که $a=۲q+۱$. در این صورت:

$$a^۲=(۲q+۱)^۲=۴q^۲+۴q+۱=۴q(q+۱)+۱$$

اما $q(q+۱)$ حاصل‌ضرب دو عدد صحیح متوالی بوده و عددی زوج است، پس به ازای $k\in\mathbb{Z}$ داریم $q(q+۱)=۲k$ ، بنابراین:

$$a^۲=۴(۲k)+۱=۸k+۱$$

ب اگر a و b دو عدد طبیعی فرد باشند، آنگاه a^2-b^2 بر ۸ بخش‌پذیر است. (نهایی خرداد ۸۹)

پاسخ: دو عدد فرد دلخواه $a=2k_1+1$ و $b=2k_2+1$ را به ازای $k_1, k_2\in\mathbb{Z}$ درنظر بگیرید. داریم:

$$a^2-b^2=(2k_1+1)^2-(2k_2+1)^2=4k_1^2+4k_1+1-4k_2^2-4k_2-1=4\underbrace{k_1(k_1+1)}_{\substack{\text{ضرب دو عدد متوالی}\\ \text{(زوج)}}}-4\underbrace{k_2(k_2+1)}_{\substack{\text{ضرب دو عدد متوالی}\\ \text{(زوج)}}}$$

$$\xrightarrow{q_1,\ q_2\in\mathbb{Z}} a^2-b^2=4(2q_1)-4(2q_2)=8\underbrace{(q_1-q_2)}_{k\in\mathbb{Z}}=8k$$

۱۵ اگر a و b دو عدد صحیح و ab فرد باشد، ثابت کنید a^3+b^3 عددی زوج است.

پاسخ: می‌دانیم ab زمانی فرد است که هر دو عدد a و b فرد باشند. یعنی به ازای k و $k'\in\mathbb{Z}$ داریم $a=2k+1$ و $b=2k'+1$. در این صورت:

$$a^3+b^3=(2k+1)^3+(2k'+1)^3=8k^3+12k^2+6k+1+8k'^3+12k'^2+6k'+1=2\underbrace{(4k^3+6k^2+3k+4k'^3+6k'^2+3k'+1)}_{q\in\mathbb{Z}}=2q$$

۱۶ کدام‌یک از احکام زیر، در حالت کلی برقرار است؟ آنها را به کمک اثبات مستقیم ثابت کنید.

الف اگر x و y دو عدد گویا باشند، x^y نیز عددی گویاست.

پاسخ: دو عدد گویای $x=3$ و $y=\frac{1}{2}$ را درنظر بگیرید. در این صورت $x^y=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$ عددی گویا نیست و حکم برقرار نیست.

ب مجموع سه عدد طبیعی متوالی، بر ۳ بخش‌پذیر است.

پاسخ: سه عدد طبیعی متوالی n، $n+1$ و $n+2$ را درنظر بگیرید. در این صورت:

$$n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3\underbrace{(n+1)}_{q\in\mathbb{N}}=3q$$

پ اگر عدد طبیعی x مضرب ۳ نباشد، آنگاه x^2-1 بر ۳ بخش‌پذیر است.

پاسخ: اگر x مضرب ۳ نباشد، در تقسیم x بر ۳، باقیمانده یکی از اعداد ۱ یا ۲ خواهد بود. بنابراین به ازای $k\in\mathbb{Z}$ داریم:

$$x\neq 3k\Rightarrow\begin{cases}x=3k+1\Rightarrow x^2-1=(3k+1)^2-1=9k^2+6k+1-1=3\underbrace{(3k^2+2k)}_{q_1\in\mathbb{Z}}=3q_1\\ \text{یا}\\ x=3k+2\Rightarrow x^2-1=(3k+2)^2-1=9k^2+12k+4-1=3\underbrace{(3k^2+4k+1)}_{q_2\in\mathbb{Z}}=3q_2\end{cases}$$

در هر حالت، x^2-1 مضرب ۳ و در نتیجه بر ۳ بخش‌پذیر است.

ت هر عدد اول، فرد است.

پاسخ: تنها عدد اول زوج ۲ است و به ازای آن حکم برقرار نیست.

ث مجموع دو عدد گنگ، همواره عددی گنگ است.

پاسخ: دو عدد گنگ $x=3+\sqrt{5}$ و $y=2-\sqrt{5}$ را درنظر بگیرید. در این صورت $x+y=(3+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=5$ عددی گنگ نیست و حکم برقرار نیست.

۱۷ احکام درست را ثابت کرده و برای احکام نادرست مثال نقض بیاورید.

الف برای هر دو عدد حقیقی x و y: $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

پاسخ: فرض کنید $x=1$ و $y=3$، در این صورت:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x+y}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1}+\sqrt{3}\simeq 1+1/7=2/7\end{array}\right\}\Rightarrow\sqrt{x+y}\neq\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

ب برای هر عدد طبیعی n، عدد n^3-n بر ۶ بخش‌پذیر است.

پاسخ: عبارت $n^3-n=n(n-1)(n+1)$ حاصل‌ضرب ۳ عدد متوالی است.

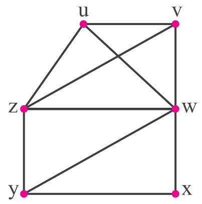
اولاً می‌دانیم حاصل‌ضرب ۲ عدد طبیعی متوالی عددی زوج است، پس $n(n-1)$ عددی زوج و در نتیجه n^3-n نیز عددی زوج است. ثانیاً باقیماندهٔ تقسیم n بر ۳، یکی از اعداد صفر، ۱ یا ۲ است. بنابراین به ازای $k\in\mathbb{Z}$ داریم:

نمره	زمان ۱۱۰ دقیقه	آزمون نوبت اول (۱)	ردیف
۱	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. الف) دو گزارهٔ «برای هر عدد طبیعی n، n^2-5n+7 عددی فرد است» و «حاصل‌ضرب دو عدد گنگ، عددی گنگ می‌شود» را به ترتیب با استدلال‌های .... و .... ثابت یا رد می‌کنیم. ب) اگر $a\|b$ در این صورت (a, b) برابر .... و $[a, b]$ برابر .... است.		۱
۱	ثابت کنید اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $4k+1$ مربع کامل است.		۲
۱	$A=\{3, 4\}$ یک زیرمجموعه از مجموعهٔ $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ است. اگر $n\in S$ و $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ یک عدد زوج باشد، ثابت کنید $n\in A$.		۳
۱	به روش بازگشتی ثابت کنید واسطهٔ حسابی دو عدد نامنفی از واسطهٔ هندسی آنها کمتر نیست.		۴
۱	اگر $a\|b$ و $b\neq 0$، در این صورت ثابت کنید $\|a\|\leq\|b\|$.		۵
۱/۵	اگر n عددی صحیح باشد، ثابت کنید $3\|n^3-n$.		۶
۱	اگر باقیماندهٔ تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقیماندهٔ تقسیم عدد a را بر ۵۶ به دست آورید.		۷
۱/۵	ویژگی درست را ثابت کرده و برای ویژگی نادرست مثال نقض بیاورید. الف) اگر $ac\overset{m}{\equiv}bc$، آنگاه $a\overset{m}{\equiv}b$. ب) اگر $a\overset{m}{\equiv}b$، آنگاه $a^n\overset{m}{\equiv}b^n$.		۸
۱	عدد $A=1358112$ را در نظر بگیرید. باقیماندهٔ تقسیم A بر هر یک از اعداد زیر را بیابید. الف) ۹ ب) ۵ پ) ۱۱ ت) ۳		۹
۱	اگر در یک سال، اول مهر شنبه باشد در این صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی از هفته است؟		۱۰
۱/۵	باقیماندهٔ تقسیم عدد $A=(2^{11}+7)\times 9$ را بر ۲۳ بیابید.		۱۱
۱	تمام اعداد صحیحی را بیابید که چهار برابر آنها منهای ۱۸، بر ۶ بخش‌پذیر باشند.		۱۲
۱/۵	به چند طریق می‌توان یک کیسهٔ ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟		۱۳
۱/۲۵	گراف G با مجموعهٔ رأس‌های $V(G)=\{a, b, c, d, e, f\}$ و مجموعهٔ یال‌های $E(G)=\{ab, ac, ad, cd, ef, db, be, df\}$ را درنظربگیرید. الف) گراف G را رسم کنید. ب) مرتبه و اندازهٔ G را مشخص کنید. پ) $N_G(f)$ را بنویسید. ت) دو رأس از درجهٔ ۳ نام ببرید.		۱۴
۱	یک گراف از مرتبهٔ ۱۰ رسم کنید که فقط دورهای به طول ۵، ۶، ۸ و ۹ داشته باشد.		۱۵
۱	فرض کنید در گراف G داشته باشیم $\delta(G)\geq 4$. نشان دهید گراف G دارای یک مسیر به طول حداقل ۴ است.		۱۶
۱	در مورد گراف G از مرتبهٔ ۱۰، مطلوب است: الف) حداقل یال لازم برای همبند کردن گراف G. ب) حداکثر تعداد یال‌ها در گراف G. پ) تعداد یال‌های گراف ۴– منتظم G. ت) حداکثر تعداد یال‌ها در گراف ناهمبند G.		۱۷

۱۸ **با توجه به گراف روبه‌رو، به سؤالات زیر پاسخ دهید.**

الف) دو $(u-v)$ مسیر به طول ۴ بنویسید.

ب) یک دور به طول ۶ بنویسید که شامل یال vw نباشد.



۰/۷۵

پاسخ آزمون نوبت اول (۱)

۱ الف) اثبات مستقیم- مثال نقض ب) $|a|-|b|$ (هر مورد (۰/۲۵))

۲ فرض کنید $k=n(n+1)\ (n\in\mathbb{N})$ حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، (۰/۲۵) در این صورت:

$4k+1=4n(n+1)+1$ (۰/۲۵) $=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$ (۰/۵)

۳ $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ یک عدد مربع کامل است و چون زوج می‌باشد، بنابراین باید بر ۴ بخش‌پذیر باشد. یعنی:

$\xrightarrow{\exists q\in\mathbb{N}} \frac{n^2(n+1)^2}{4}=4q^2$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow n^2(n+1)^2=16q^2 \Rightarrow n(n+1)=4q$ (۰/۲۵) $\xrightarrow{\exists k\in\mathbb{N}} \begin{cases} n=4k \xrightarrow{n\in S} n=4 & (۰/۲۵) \\ \text{یا} \\ n+1=4k \xrightarrow{n\in S} n=3 & (۰/۲۵) \end{cases}$

۴ دو عدد حقیقی $x\geq 0$ و $y\geq 0$ را درنظر بگیرید. داریم:

$\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow x+y\geq 2\sqrt{xy}$ (۰/۲۵)

$\Leftrightarrow x+y-2\sqrt{xy}\geq 0$ (۰/۲۵)

$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\geq 0$ (۰/۲۵) $\Rightarrow$ همواره برقرار است

۵ چون $a\mid b$، در این صورت عددی صحیح چون q وجود دارد به‌طوری‌که $b=aq$. (۰/۲۵)

$b=aq\Rightarrow |b|=|a||q|$ (۰/۲۵) $\xrightarrow{b\neq 0\Rightarrow q\neq 0\Rightarrow |q|\geq 1} |a|\leq|b|$ (۰/۵)

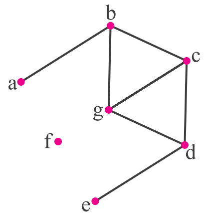
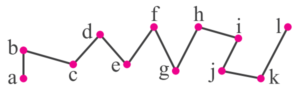
۶ می‌دانیم $n^3-n=n(n-1)(n+1)$. باقیماندهٔ تقسیم عدد صحیح n بر ۳، یکی از اعداد صفر، ۱ یا ۲ است. (۰/۷۵) بنابراین:

$\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} \begin{cases} n=3k\Rightarrow n(n-1)(n+1)=3\underbrace{k(3k-1)(3k+1)}_{q_1\in\mathbb{Z}}=3q_1 & (۰/۲۵) \\ \text{یا} \\ n=3k+1\Rightarrow n(n-1)(n+1)\Rightarrow(3k+1)(3k)(3k+2)=3\underbrace{(3k+1)k(3k+2)}_{q_2\in\mathbb{Z}}=3q_2 & (۰/۲۵) \\ \text{یا} \\ n=3k+2\Rightarrow n(n-1)(n+1)=(3k+2)(3k+1)(3k+3)=3\underbrace{(3k+2)(3k+1)(k+1)}_{q_3\in\mathbb{Z}}=3q_3 & (۰/۲۵) \end{cases}$

و در هر ۳ حالت $n^3-n=n(n-1)(n+1)$ بر ۳ بخش‌پذیر است و این یعنی $3\mid n^3-n$.

۷ با توجه به قضیهٔ تقسیم، به ازای $q_1, q_2\in\mathbb{Z}$ داریم:

$\left.\begin{array}{l} a=7q_1+5\xrightarrow{\times 8} 8a=56q_1+40 \ (۰/۲۵) \\ a=8q_2+7\xrightarrow{\times 7} 7a=56q_2+49 \ (۰/۲۵) \end{array}\right\} \Rightarrow a=56\underbrace{(q_1-q_2)}_{q'\in\mathbb{Z}}-9$ (۰/۲۵) $\Rightarrow a\overset{56}{\equiv}-9\Rightarrow a\overset{56}{\equiv}-9+56\Rightarrow a\overset{56}{\equiv}47$ (۰/۲۵)

ردیف	آزمون نوبت دوم (۳) - دی ماه ۱۳۹۷ — زمان ۱۲۰ دقیقه	نمره
۱	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $4k+1$ مربع کامل است. ب) هر دو عدد صحیح و متوالی، نسبت به هم اول‌اند. پ) گراف حاصل از مدل‌سازی پل کونیگسبرگ یک گراف ساده است. ت) گراف ۳– منتظم از مرتبهٔ ۵ قابل رسم نیست.	۱
۲	اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha+2\beta$ گنگ است.	۱/۲۵
۳	گزارهٔ زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید: (برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $x^2+y^2+1 \geq xy+x+y$)	۱
۴	اگر $a>1$ ، $a \mid 9k+4$ و $a \mid 5k+3$ ، ثابت کنید a عددی اول است.	۱
۵	پاسخ هر یک از سؤالات زیر را به دست آورده و دلیل پاسخ خود را به‌طور کامل بنویسید. الف) اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b \mid a+2$ ، در این صورت باقیماندهٔ تقسیم عدد a^2+b^2+3 را بر ۸ بیابید. ب) مطلوبست باقیماندهٔ تقسیم عدد $A=(1000)^{13}\times 12+10$ بر عدد ۷.	۲/۲۵
۶	معادلهٔ هم‌نهشتی $3x \overset{7}{\equiv} 13$ را حل و جواب عمومی آن را به دست آورید.	۱
۷	با توجه به گراف G (شکل مقابل)، به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) یک $a-c$ مسیر به طول ۳ بنویسید. ب) یک دور به طول ۴ مشخص کنید. پ) درجهٔ رأس a در گراف $\overline{G}$ را تعیین کنید. ت) آیا گراف G همبند است؟ چرا؟ ث) یک زیرگراف تهیِ ۵رأسی، از گراف G رسم کنید. 	۱/۵
۸	ثابت کنید تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.	۱
۹	گراف G با مجموعهٔ رأس‌های $V(G)=\{a , b , c , d , e\}$ و مجموعهٔ یال‌های $E(G)=\{ae , bc , bd , be , ec , ed\}$ مفروض است. بدون کشیدن نمودار آن، به قسمت‌های (الف) تا (پ) پاسخ دهید. الف) مجموعهٔ همسایگی باز رأس d را بنویسید. ب) اندازهٔ گراف را مشخص کنید. پ) مجموعِ درجات رئوس این گراف برابر چند است؟	۱
۱۰	گراف کامل K_p دارای ۳۶ یال است. در این گراف، مرتبهٔ گراف و $\Delta(G)$ را مشخص کنید.	۱
۱۱	گراف (P_{12}) در شکل مقابل رسم شده است. الف) یک γ– مجموعه از آن را مشخص کنید. ب) یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۶عضوی از آن را مشخص نمایید. 	۱

۱۲	اگر داشته باشیم $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{۵,۶,۷,۸,۹\}$، در این صورت چند کد یا رمز ۵رقمی می‌توان نوشت که هر یک شامل دو رقمِ (متمایز) از A و سه رقمِ (متمایز) از B باشد؟	۱
۱۳	به چند طریق می‌توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد، هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟	۱
۱۴	دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۳ بنویسید و متعامد بودن آنها را نشان دهید.	۱/۵
۱۵	به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین سه نفر توزیع کرد، به شرط آنکه به هر نفر حداقل ۱ خودکار داده باشیم؟ (راه حل نوشته شود.)	۲
۱۶	حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقهٔ کشتی باشند، تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان یکسان است؟ (سال را غیر کبیسه درنظر بگیرید.)	۱/۵

پاسخ آزمون نوبت دوم (۳) - دی ماه ۱۳۹۷

۱

الف) درست (۰/۲۵) ب) درست (۰/۲۵) پ) نادرست (۰/۲۵) ت) درست (۰/۲۵)

۲

اگر $\alpha+۲\beta$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس عددی گویا است. (۰/۲۵)

از طرفی طبق فرض، $\alpha+\beta$ نیز عددی گویا است. (۰/۲۵)

می‌دانیم تفاضل دو عدد گویا، عددی گویاست در نتیجه: $(\alpha+۲\beta)-(\alpha+\beta)=\beta\in\mathbb{Q}$ (۰/۲۵)

اما با توجه به فرض مسئله β گنگ است. (۰/۲۵)

با توجه به تناقض ایجادشده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. (۰/۲۵)

۳

$$\underbrace{۲x^۲+۲y^۲+۲\geq ۲xy+۲x+۲y}_{(۰/۲۵)} \Leftrightarrow \underbrace{(x^۲-۲x+۱)+(y^۲-۲y+۱)+(x^۲-۲xy+y^۲)\geq ۰}_{(۰/۲۵)}$$

$$\Leftrightarrow (x-۱)^۲+(y-۱)^۲+(x-y)^۲\geq ۰ \ (۰/۲۵)$$

$$\Leftrightarrow (x-۱)^۲\geq ۰, (y-۱)^۲\geq ۰, (x-y)^۲\geq ۰ \ (۰/۲۵)$$

۴

$$\left.\begin{array}{l} a|۹k+۴ \Rightarrow a|۴۵k+۲۰ \ (۰/۲۵) \\ a|۵k+۳ \Rightarrow a|۴۵k+۲۷ \ (۰/۲۵)\end{array}\right\} \Rightarrow a|(۴۵k+۲۷)-(۴۵k+۲۰) \Rightarrow a|۷ \ (۰/۲۵) \xrightarrow{a>۱} a=۷ \ (۰/۲۵)$$

۵

الف) a عددی فرد است، بنابراین $a+۲$ عددی فرد است و $b|a+۲$ ، بنابراین b نیز عددی فرد خواهد بود. (۰/۲۵)

می‌دانیم مربع هر عدد فرد، مضربی از ۸ به‌علاوهٔ یک است. (۰/۲۵)

$$a^۲+b^۲+۳=(۸m+۱)+(۸n+۱)+۳ \ (۰/۲۵) =۸(m+n)+۵ \ (۰/۲۵) \Rightarrow r=۵ \ (۰/۲۵)$$

ب)

$$۱۰۰۰\overset{۷}{\equiv}۶\overset{۷}{\equiv}-۱ \ (۰/۲۵) \Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳}\times ۱۲+۱۰\overset{۷}{\equiv}-۱۲+۱۰ \ (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳}\times ۱۲+۱۰\overset{۷}{\equiv}-۲\overset{۷}{\equiv}۵ \ (۰/۲۵) \Rightarrow r=۵ \ (۰/۲۵)$$

۶

$$۳x\overset{۷}{\equiv}۱۳ \Rightarrow ۳x\overset{۷}{\equiv}۶ \ (۰/۲۵) \xrightarrow{(۳,۷)=۱ \ (۰/۲۵)} x\overset{۷}{\equiv}۲ \ (۰/۲۵) \Rightarrow x=۷k+۲ \ (۰/۲۵)$$