

آزمون (۲) نوبت اول

۱/۵

 تابع $f(x) = |x+2| - 1$ را رسم کنید و مشخص کنید این تابع در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است؟ (هماهنگ‌استانی)

۱

۱/۵

با توجه به جدول زیر، مقادیر خواسته شده را در صورت امکان به دست آورید: (مشابه کار در کلاس ۱۴ کتاب درسی)

۲

-۲	-۱	۰	۱	۲	x	fog(-۲) =
۰	-۴	۱	-۲	۵	f(x)	gof(-۲) =
۵	۰	۳	-۲	۱	g(x)	fof(۰) =
						gog(۱) =

۱/۵

 دو تابع $f(x) = \frac{x-1}{x}$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ داده شده‌اند: (هماهنگ‌استانی)

۳

الف) دامنه تابع fog را با استفاده از تعریف محاسبه کنید.

ب) ضابطه تابع fog را تشکیل دهید.

۲

 نمودار توابع $y = \sin x$ و $y = 3 \sin x$ را در بازه $[\pi, \pi]$ رسم کنید. سپس دامنه و برد هر کدام را مشخص کنید.

۴

۱

 می‌دانیم تابع $f(x) = (x-5)^2$ ، $x \geq 5$ یک به یک است. ضابطه تابع وارون آن را به دست آورید.

۵

۱/۵

 مجموعه‌ای از داده‌های مربوط به موضوعی متناوب با دوره تناوب 2π داده شده است، به طوری که بیشترین و کمترین آن‌ها به ترتیب 24 و $7/5$ است. اگر تابع $y = a \cos(bx) + c$ برای این داده‌ها مناسب باشد، این تابع را به دست آورید.

۶

۱/۵

معادلات زیر را حل کنید.

۷

الف) $2 \sin x - \sqrt{3} = 0$

ب) $\sin 4x = \sin 5x$

۱/۵

 اندازه دو ضلع مثلث ۴ و ۵ سانتی‌متر است. اگر مساحت این مثلث $5\sqrt{2}$ سانتی‌متر مربع باشد، چند مثلث با این ویژگی‌ها وجود دارد؟ (مشابه تیرین ۴ صفحه ۴۸ کتاب درسی)

۸

۲

حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

۹

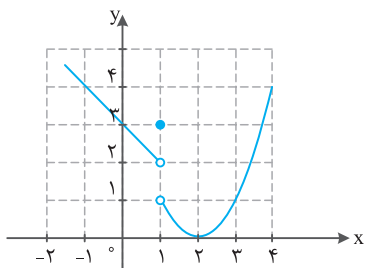
الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-4x^2}{x^2-4x} =$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x-3}{\sqrt[3]{x}-1} =$

۱

با استفاده از نمودار روبه‌رو، عبارت خواسته شده را (در صورت وجود) محاسبه کنید.

۱۰



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + 2f(1) =$$

آزمون (۴) نوبت اول (هماهنگ کشوری دی ماه سال ۱۳۹۷)

۰/۵

<input type="checkbox"/> درست	<input type="checkbox"/> نادرست
<input type="checkbox"/> درست	<input type="checkbox"/> نادرست

۱ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

 ب) تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در نقطه $x = 0$ مشتق پذیر است.

۱

۲ در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.

 الف) تابع $h(x) = (2x^2 - 5x + 1)^3$ به صورت ترکیب دو تابع $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ و $g(x) = \dots$ است.

 ب) حد تابع $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ \frac{5x^2 - 3x}{-x^2 + 1} & x \leq 0 \end{cases}$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ برابر است.

 پ) اگر $f'(2) = 3$ و $g'(2) = 5$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $(2g - f)'(2)$ برابر است.

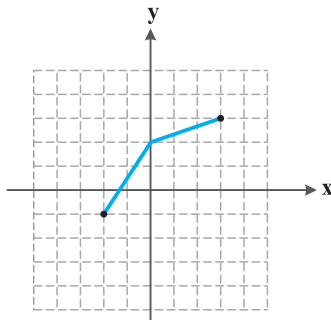
ت) شکل حاصل از دوران یک دایره حول یکی از قطرهای آن برابر است.

۱/۷۵

 ۳ الف) توابع $f(x) = \frac{x+3}{2x}$ و $g(x) = 3x - 1$ را در نظر بگیرید. دامنه $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

 ب) اگر $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ و $g(x) = x^3$ باشد، مقدار $f^{-1} \circ g^{-1}(5)$ را به دست آورید.

۰/۷۵

 ۴ با استفاده از نمودار تابع f نمودار تابع $y = f\left(\frac{x}{4}\right) - 2$ را رسم کنید.


۱

 ۵ الف) دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = 2 - 3 \sin 4x$ را به دست آورید.

۰/۵

 ب) دامنه تابع $f(x) = \tan(2x)$ را به دست آورید.

۱/۵

 ۶ معادله مثلثاتی $\sin x - \cos 2x = 0$ را حل کنید.

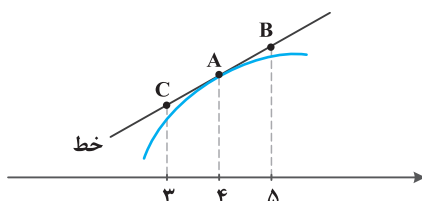
۱/۷۵

۷ حد توابع زیر را به دست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{[x] - 3}{x - 3}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+1} - 2}$

۰/۷۵

 ۸ برای تابع f در شکل زیر داریم $f(4) = 1/5$ و $f(4) = 24$ با توجه به شکل، مختصات نقاط A ، B ، و C را بیابید.


آزمون (۸) نوبت دوم

۰/۵

 نمودار تابع $y = \cos x$ را در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم کنید. سپس مشخص کنید در چه بازه‌های صعودی و در چه بازه‌های نزولی است؟

۱

۱

 با توجه به $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = \sqrt{x^2-5}$:

۲

 الف) ضابطه‌های $(f \circ g)(x)$ و $(g \circ f)(x)$ را بیابید.

 ب) مقدار $(f \circ g)(-3)$ را به دست آورید.

 پ) نشان دهید $(g \circ f)(1) = f(5)$

۰/۷۵

دامنه و برد توابع زیر را به دست آورید.

۳

 الف) $y = 3 \sin(\pi x) - 2$

 ب) $y = -2 \cos(4\pi x) + 3$

۰/۷۵

(مشابه ترمین ۳ صفحه ۴۸ کتاب درسی)

معادلات زیر را حل کنید.

۴

 الف) $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$

 ب) $\cos 2x - \sin x = 0$

۰/۵

 چند جمله‌ای $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ را در نظر بگیرید.

۵

 الف) آیا $f(x)$ بر $(x+2)$ بخش پذیر است؟ چرا؟

ب) با انجام تقسیم، درستی ادعای خود را بررسی کنید.

۰/۵

(همانگداستانی)

حدهای زیر را محاسبه کنید.

۶

 الف) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

 ب) $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x}{x - 5}$

۱

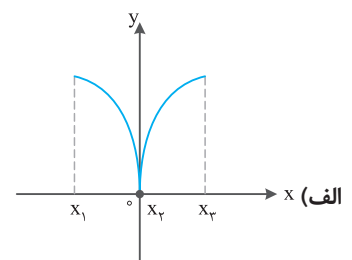
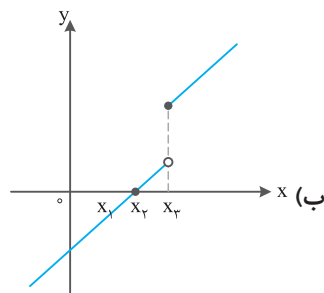
 مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را در $x = 2$ بررسی کنید، سپس معادله خط مماس بر منحنی را در نقطه $x = 2$ بنویسید.

۷

۱/۵

در شکل‌های زیر، با ذکر دلیل مشخص کنید که هر تابع در کدام نقطه یا نقاط مشخص شده مشتق پذیر نیست؟

۸



۲

 اگر f و g توابع مشتق پذیر باشند و $f(1) = 4$ ، $f'(1) = -1$ ، $g(1) = 2$ و $g'(1) = 7$ ، مقدار $(g - f)'(1)$ و $(fg)'(1)$ را به دست آورید.

۹

۱

 معادله حرکت یک متحرک روی یک خط مستقیم به صورت $f(t) = 2t^2 - 5t + 1$ است. سرعت متوسط این متحرک را در فاصله زمانی

۱۰

(همانگداستانی)

 $t_1 = 0$ و $t_2 = 3$ تعیین کنید.

۲

 الف) طول نقاط بحرانی تابع $f(x) = x^2 - 4x + 1$ را به دست آورید.

۱۱

ب) تابعی مثال بزنید که حداقل یک نقطه بحرانی داشته باشد که نقطه اکسترمم آن تابع نباشد.

آزمون (۱۱) نوبت دوم (هماهنگ کشوری خردادماه سال ۱۳۹۸)

۰/۷۵

در جاهای خالی گزینه مناسب داخل پرانتز را انتخاب کنید.

الف) تابع $y = (x+1)^3$ در دامنهٔ تعریف خود (صعودی، نزولی) است.

ب) هرچه خروج از مرکز بیضی (کوچکتر، بزرگتر) شود شکل بیضی به دایره نزدیکتر خواهد شد.

پ) دو پیشامدی که با هم رخ ندهند، دو پیشامد (مستقل، ناسازگار) هستند.

۱

۰/۷۵

درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.

الف) دو تابع $f(x) = -\frac{2x+6}{y}$ و $g(x) = \frac{-y}{y}x - 3$ وارون یکدیگرند.

ب) دورهٔ تناوب تابع $y = \tan x$ برابر 2π است.

پ) شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه به صورت مخلوط توپر می‌باشد.

نادرست درست

نادرست درست

نادرست درست

۲

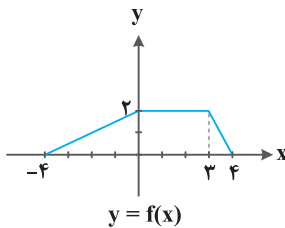
۱

دو تابع $f(x) = \sqrt{x-4}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$ را در نظر بگیرید. دامنهٔ تابع $g \circ f$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

۳

۰/۵

با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$ ، نمودار $y = \frac{1}{4}f(4x)$ را رسم کنید.



۴

۰/۵

الف) مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = 1 - 2\sin\left(\frac{-\pi}{3}x\right)$ را به دست آورید.

ب) معادلهٔ مثلثاتی $1 = \cos 2\alpha - \sin \alpha + 1$ را حل کرده، جواب‌های کلی آن را بنویسید.

۵

۱/۲۵

۱/۵

الف) حد توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

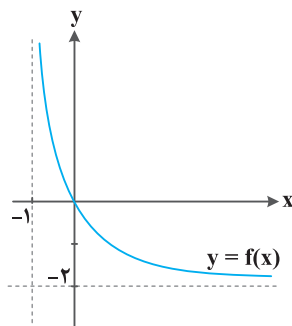
الف) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\sin x} =$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{(x-1)(x+2)} =$

۶

۰/۵

ب) با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$ ، حدهای خواسته شده را بنویسید.



الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

ب) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) =$

۷

۱

مشتق تابع $f(x) = x^3 - 2$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه‌ای به طول $x = -1$ به دست آورید.

۷

پاسخ نامه آزمون (۱۱) نوبت اول

ریاضی (۳)

و اگر از راه (ب) استفاده کند، تابع خرید محمد به صورت زیر است:

$$g(f(x)) = g(x - 250000) = \frac{85}{100}(x - 250000)$$

همانطور که مشاهده می کنید، راه (الف) به نفع محمد است؛ زیرا از قیمت خرید گوشی، مقدار بیشتری را کم می کند.

۶

باید ثابت کنیم ترکیب دو تابع f و g برابر تابع همانی است:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x-5}{2}\right) = 2\left(\frac{x-5}{2}\right) + 5 = x \quad (x \in D_g)$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x+5) = \frac{(2x+5)-5}{2} = x \quad (x \in D_f)$$

بنابراین دو تابع f ، g وارون یکدیگرند.

۷

می دانیم توابع $y = a \cos bx + c$ ، $y = a \sin bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

(الف) $\frac{2\pi}{4} = 8$ دوره تناوب، $-|2| + 5 = 3$ مینیمم، $|2| + 5 = 7$ ماکزیمم

(ب) $\frac{2\pi}{2} = 4\pi$ دوره تناوب، $-|3| + (-1) = -4$ مینیمم، $|3| + (-1) = 2$ ماکزیمم

۸

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$$

با توجه به این که α زاویه تند است؛ نتیجه می گیریم $\cos \alpha = +\frac{4}{5}$ است. حال کافی است در روابط زیر، مقادیر $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ را جای گذاری کنیم:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}$$

۹

$$4 \sin^2 x - 1 = 0 \Rightarrow 4 \sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{4}$$

(الف)

$$\Rightarrow \sin x = +\frac{1}{2} \text{ یا } -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \text{ یا } \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

جواب های کلی معادله $\sin x = \sin \alpha$ به صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ است که $k \in \mathbb{Z}$ بنابراین:

$$2k\pi + \frac{\pi}{6}, (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi - \frac{\pi}{6}, (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}, (2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

(ب) جواب های کلی معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ است که $k \in \mathbb{Z}$ بنابراین:

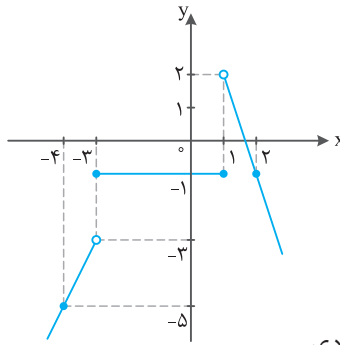
$$\cos 3x = \cos 2x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + 2x \\ 3x = 2k\pi - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ 5x = 2k\pi \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5}$$

الف) نادرست
ب) نادرست

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \xrightarrow{x^2} -2 \leq 2 \sin x \leq 2 \xrightarrow{-1} -3 \leq 2 \sin x - 1 \leq 1$$

۲

(الف) در هر بازه با داشتن دو نقطه، نمودار آن قسمت رسم می شود.



(ب) تابع در بازه $(-\infty, +1]$: صعودی
تابع در بازه $(1, +\infty)$: نزولی
تابع در بازه $[-3, 1]$: ثابت

۳

(الف) به ازای هر کدام از دامنه های ۱ و ۳ از تابع g بررسی می کنیم، آیا $f \circ g$ وجود دارد؟

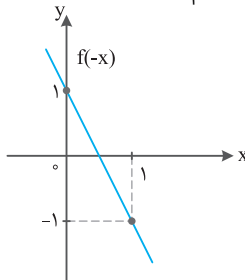
$$\left. \begin{aligned} x=1 &\Rightarrow f \circ g(1) = f(g(1)) = f(2) = 2 \\ x=3 &\Rightarrow f \circ g(3) = f(g(3)) = f(5) = 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \circ g = \{(1, 2), (3, 5)\}$$

$$g \circ f(3) = g(f(3)) = g(5) = 5 \quad (\text{ب})$$

۴

(الف) با توجه به دامنه تابع $f(x)$ ، عددی که وارد تابع f می شود، باید در بازه $[-3, 5]$ باشد؛ پس $2x$ نیز باید این گونه باشد:

$$-3 \leq 2x \leq 5 \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$$



$$f(-x) = 2(-x) + 1 = -2x + 1 \quad (\text{ب})$$

۵

تابع تخفیف نقدی به صورت $f(x) = x - 250000$ و تابع کارت تخفیف ۱۵ درصدی به صورت $g(x) = \frac{85}{100}x$ است.

اگر از راه (الف) استفاده کند، تابع خرید محمد به صورت زیر است:

$$f(g(x)) = f\left(\frac{85}{100}x\right) = \frac{85}{100}x - 250000$$

$$= \frac{85}{100}x - \frac{85}{100} \times 250000 = \frac{85}{100}x - 212500$$

۱۰

الف) می‌دانیم اگر $f(a) = 0$ باشد؛ آن‌گاه $f(x)$ بر $(x - a)$ بخش‌پذیر است. $f(x)$ بر $(x - 1)$ بخش‌پذیر است. $f(1) = 3(1)^2 + 5(1) - 8 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} & \frac{3x^2 + 5x - 8}{-(3x^2 - 3x^2)} \Big| \frac{x-1}{3x^2 + 8x + 8} \\ & \frac{\lambda x^2 - 8}{-(\lambda x^2 - 8x)} \\ & \frac{\lambda x - 8}{-(\lambda x - 8)} \\ & 0 \end{aligned}$$

$$f(x) = 3x^2 + 5x - 8 = (x - 1)(3x^2 + 8x + 8) \quad \text{پ}$$

۱۱

الف) چون مقدار صورت و مخرج به ازای $x = 2$ برابر صفرند، باید عامل $(x - 2)$ را در صورت و مخرج ظاهر کرد:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x+3} = \frac{4}{5}$$

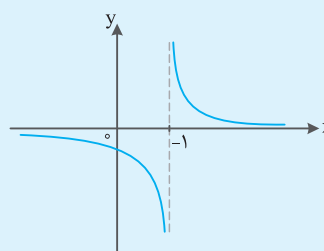
ب) در حد $+\infty$ ، مقادیر $\frac{1}{\sqrt{x}}$ و $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ به صفر نزدیک می‌شوند:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}}{2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}} = \frac{1 - 0}{2 + 0} = \frac{1}{2}$$

۱۲

الف) عبارت $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ به این معناست که می‌توان مقادیرهای

$f(x)$ را از هر عدد منفی دلخواهی کوچک‌تر کرد، به شرطی که x با مقادیر کوچک‌تر از ۱ به قدر کافی به ۱ نزدیک شود.



و عبارت $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ به

این معناست که می‌توان مقادیرهای

$f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواهی

بزرگ‌تر کرد، به شرطی که x با

مقادیر بزرگ‌تر از ۱ به اندازه کافی

به ۱ نزدیک شود.

ب) مسئله بی‌شمار جواب دارد.

۱۳

شیب	-۴	-۲	۰	۱	۲
نقطه	E	A	D	C	B

خط مماس بر منحنی در نقطه D، موازی محور x ها است؛ بنابراین شیب آن صفر است.

شیب خط مماس بر منحنی در نقاط B و C مثبت است که با توجه به

این که زاویه خط مماس در نقطه B با جهت مثبت محور x ها از زاویه در

نقطه C بیش‌تر است، پس شیب خط B از C بیش‌تر است.

شیب خط مماس بر منحنی در نقاط A و E منفی است؛ زیرا از چپ به راست به صورت سرازیری است زاویه خط مماس در نقطه A با جهت مثبت محور x ها از زاویه خط مماس در نقطه E با جهت مثبت محور x ها بیش‌تر است، پس مقدار شیب خط A از E بیش‌تر است.

۱۴

$$f(x) = 4x^2 - x + 2 \Rightarrow f(3) = 35 \quad \text{الف)}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(3+h)^2 - (3+h) + 2 - 35}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{36 + 24h + 4h^2 - 3 - h + 2 - 35}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{23h + 4h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (23 + 4h) = 23$$

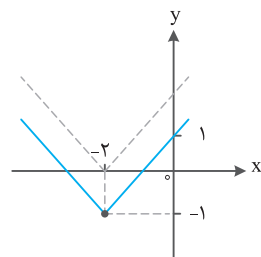
$$3 = f'(3) = 23 \Rightarrow \text{شیب خط در نقطه‌ای به طول 3}$$

$$\text{معادله: } y - 35 = 23(x - 3) \Rightarrow y = 23x - 34 \quad \text{ب)}$$

ریاضی (۳) پاسخنامه آزمون (۲) نوبت اول

۱

ابتدا نمودار $|x+2|$ را رسم کرده و سپس نمودار را ۱ واحد به سمت



پایین می‌آوریم:

تابع در بازه $(-\infty, -2]$: نزولی

تابع در بازه $[-2, +\infty)$: صعودی

۲

$$\text{تعریف نشده } f \circ g(-2) = f(g(-2)) = f(5)$$

$$g \circ f(-2) = g(f(-2)) = g(0) = 3$$

$$f \circ f(0) = f(f(0)) = f(1) = -2$$

$$g \circ g(1) = g(g(1)) = g(-2) = 5$$

۳

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\}, \quad D_g = [1, +\infty)$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x \in [1, +\infty) \mid \sqrt{x-1} \in \mathbb{R} - \{0\}\} = (1, +\infty)$$

توجه: عبارت $\sqrt{x-1} \in \mathbb{R} - \{0\}$ یعنی $\sqrt{x-1} \neq 0$ باشد. $x \neq 1$.

$$\text{ب) } (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{g(x) - 1}{g(x)} = \frac{\sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x-1}}$$

۱۴

فاصله نقطه $C(-1, 3)$ تا خط مماس $-3x + 4y - 10 = 0$ ، همان طول شعاع دایره است.

$$\text{شعاع دایره} = \frac{|-3(-1) + 4(3) - 10|}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = \frac{5}{5} = 1$$

$$(x - (-1))^2 + (y - 3)^2 = 1^2 \Rightarrow (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 1$$

۱۵

$P(\text{فوتبال | قهرمانی}) = P(\text{فوتبال}) \cdot P(\text{قهرمانی})$

$$+ P(\text{کشتی | قهرمانی}) \cdot P(\text{کشتی}) + P(\text{بسکتبال | قهرمانی}) \cdot P(\text{بسکتبال}) = (0/2)(0/3) + (0/3)(0/6) + (0/5)(0/45) = 0/465$$

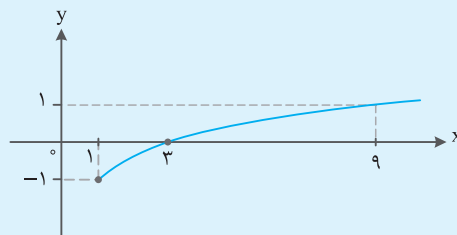
پویا به احتمال $0/465$ در این دوره مسابقات قهرمان می‌شود.

پاسخ‌نامه آزمون (۶) نوبت دوم

ریاضی (۳)

۱

تابع لگاریتمی $y = \log_3 x - 1$ مطابق شکل، یکنوا و صعودی است:



۲

$$(f \circ g)(-2) = f(g(-2)) = f(2) = 0$$

$$(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(0) = 4$$

۳

$$y = \frac{x-5}{2x+3} \Rightarrow y(2x+3) = x-5 \Rightarrow 2xy+3y = x-5 \Rightarrow 2xy-x = -5-3y \Rightarrow x(2y-1) = -5-3y$$

$$\Rightarrow x = \frac{-5-3y}{2y-1} = \frac{5+3y}{1-2y} \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{5+3y}{1-2y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{5+3x}{1-2x}$$

۴

$$\text{دوره تناوب} = \frac{2\pi}{b} = \pi \Rightarrow b = 2$$

$$-a + c = -1 \text{ مقدار مینیمم}, a + c = -1 \text{ مقدار ماکزیمم}$$

$$\Rightarrow a = \frac{(-1) - (-5)}{2} = 2, c = \frac{(-1) + (-5)}{2} = -3$$

$$\text{تابع مثلثاتی} y = 2 \sin(2x) - 3$$

۵

$$\cos 2x - 3 \cos x + 2 = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 1 - 3 \cos x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow (2 \cos x - 1)(\cos x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \text{ یا } \cos x = 1$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \text{ و } k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \cos 0 \Rightarrow x = 2k\pi \text{ و } k \in \mathbb{Z}$$

۶

الف) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$ ب) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$

پ) با توجه به مقادیر متفاوت حدهای چپ و راست در نقطه $x = 1$ ، نتیجه می‌گیریم که $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ وجود ندارد.

۷

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1} \times \frac{2 + \sqrt{x+3}}{2 + \sqrt{x+3}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 - (x+3)}{(x^2 - 1)(2 + \sqrt{x+3})}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{(x-1)(x+1)(2+\sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(x+1)(2+\sqrt{x+3})}$$

$$= \frac{-1}{(2)(2+\sqrt{4})} = -\frac{1}{8}$$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{2-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x(\frac{2}{x}-1)}$

$$= (\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x}) (\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{2}{x}-1}) = 0 \times \frac{1}{0-1} = 0$$

۸

خط مماس بر منحنی در نقطه E موازی محور x ها است؛ بنابراین شیب خط یا همان مشتق در نقطه E صفر است.

شیب خط مماس بر منحنی در نقاط A ، B ، D و C مثبت است که زاویه این خطها با جهت مثبت محور x ها، به ترتیب از A ، B و D از زیاد به کم تبدیل می‌شود؛ پس به ترتیب شیب خط مماس بر منحنی در این نقاط (یا همان مشتق) برابر 4 ، 3 و 1 است.

۴	۳	۱	۰	-۳	-۵	شیب
D	A	B	E	C	F	نقطه

شیب خط مماس بر منحنی در نقاط C و F منفی است که زاویه این خطها با جهت مثبت محور x ها، به ترتیب از C و F از زیاد به کم تبدیل می‌شود؛ بنابراین به ترتیب شیب خط مماس بر منحنی در این نقاط (یا همان مشتق) برابر -3 و -5 است.

۹

الف) $g(x) = \frac{3}{x^2+4x} \Rightarrow g'(x) = \frac{(3)'(x^2+4x) - (x^2+4x)'(3)}{(x^2+4x)^2}$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{(0)(x^2+4x) - (2x+4)(3)}{(x^2+4x)^2} = \frac{-6x-12}{(x^2+4x)^2}$$

ب) $k(x) = \sqrt{3x+2} \Rightarrow k'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{\sqrt{3x+2}}$

(ب) $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|6|} = \frac{\pi}{3}$ دوره تناوب

ماکزیمم $= |a| + c = |4| + (-1) = 3$

مینیمم $= -|a| + c = -|4| + (-1) = -5$

۵

$\sin 2x - \sqrt{3} \cos x = 0 \Rightarrow 2 \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos x = 0$

$\Rightarrow \cos x (2 \sin x - \sqrt{3}) = 0$

$\left\{ \begin{array}{l} \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \end{array} \right.$

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}, x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$

۶

راه اول برای محاسبه مقدار m : باقی مانده تقسیم باید ۲ شود:

$$\begin{array}{r} 2x^4 + mx + 2 \\ x+1 \\ \hline -(2x^3 + 2x^2) \\ \hline -2x^3 + mx + 2 \\ -(2x^3 - 2x^2) \\ \hline 2x^2 + mx + 2 \\ -(2x^2 + 2x) \\ \hline (m-2)x + 2 \\ -((m-2)x + m-2) \\ \hline 4-m \end{array}$$

باقی مانده تقسیم $(4-m)$ شد که همان ۲ است، پس $m = 2$ است.

راه دوم برای محاسبه مقدار m : باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x+1$ برابر

$P(-1) = 2 - m + 2 = 2 \Rightarrow m = 2$ است. $P(-1) = 2$

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 2x + 2 \\ x-1 \\ \hline -(2x^3 - 2x^2) \\ \hline 2x^3 + 2x + 2 \\ -(2x^3 - 2x^2) \\ \hline 2x^2 + 2x + 2 \\ -(2x^2 - 2x) \\ \hline 4x + 2 \\ -(4x - 4) \\ \hline 6 \end{array}$$

$یا x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow P(1)=6$

۷

(الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (7 - \frac{3}{x^2}) = 7 - 0 = 7$

(ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{15x-9}{12x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{15-\frac{9}{x}}{12+\frac{1}{x}} = \frac{15-0}{12+0} = \frac{15}{12}$

۱۶

پیشامد انتخاب ظرف‌های اول و دوم را به ترتیب با A_1 و A_2 و پیشامد خارج شدن مهره قرمز را با B نمایش می‌دهیم:

$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)$

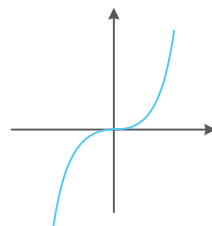
$P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{15} = \frac{11}{30}$

پاسخنامه آزمون (۱۰) نوبت دوم

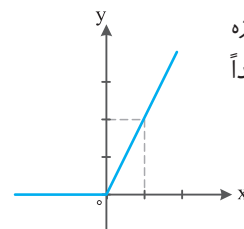
ریاضی (۳)

۱

(الف) با توجه به تبدیل روبه‌رو و نمودار رسم شده، مشخص می‌شود که تابع در همه بازه‌ها، اکیداً صعودی است.



$g(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$



(ب) با توجه به نمودار رسم شده، تابع در بازه $(-\infty, 0]$ ، تابع ثابت و در بازه $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

۲

$D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R}$ (الف)

$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid (x+1) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

(ب) $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(2 \times 1^2 - 1) = 1 + 1 = 2$

$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(1+1) = 2 \times 2^2 - 1 = 7$

$\Rightarrow (f \circ g)(1) \neq (g \circ f)(1)$

۳

(الف) $y = 2x^2 - 1 \Rightarrow y+1 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{y+1}{2} \xrightarrow{x \geq 0} x = \sqrt{\frac{y+1}{2}}$

$x = \sqrt{\frac{y+1}{2}} \Rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{y+1}{2}} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2}}$

(ب) $y = 1 - \frac{x+1}{3} \Rightarrow \frac{x+1}{3} = 1-y \Rightarrow x+1 = 3-3y \Rightarrow x = 2-3y$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = 2-3y \Rightarrow f^{-1}(x) = 2-3x$

۴

(الف) $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|\pi|} = 2$ دوره تناوب

ماکزیمم $= |a| + c = \left| -\frac{\pi}{2} \right| + \frac{2\pi}{2} = 2\pi$

مینیمم $= -|a| + c = -\left| -\frac{\pi}{2} \right| + \frac{2\pi}{2} = \pi$

x	0	4	12	+∞
V'(x)		+	-	+
V(x)				

ماکزیمم مطلق

۱۳

الف) بیضی با نقاط کانونی (۲, ۵) و (۲, ۱۱) یک بیضی قائم است.

$$\text{مركز بیضی} = (2, \frac{5+11}{2}) = (2, 8)$$

معادله قطر بزرگ بیضی به صورت $x=2$ است؛ زیرا از دو نقطه کانونی عبور می‌کند. معادله قطر کوچک بیضی که بر قطر بزرگ عمود است (یعنی معادله به صورت $y=k$ دارد) و از نقطه مرکز (۲, ۸) عبور می‌کند به صورت $y=8$ خواهد بود.

ب) $11-5=6 \Rightarrow c=6 \div 2=3$ فاصله کانونی

قطر بزرگ $10 \Rightarrow a=10 \div 2=5$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 5^2 = b^2 + 3^2 \Rightarrow b=4 \Rightarrow$ قطر کوچک $= 2 \times 4 = 8$

$\frac{c}{a} = \frac{3}{5}$ خروج از مرکز بیضی

۱۴

خط مماس بر خطی که از نقاط (۱, ۵) و (۲, ۴) عبور می‌کند عمود است؛ زیرا خط مماس در نقطه تماس بر شعاع دایره عمود است.

شیب خطی که از نقاط (۱, ۵) و (۲, ۴) عبور می‌کند $\frac{5-4}{1-(2)} = \frac{1}{-1} = -1$

\Rightarrow شیب خط مماس $= -3$

معادله خطی که از نقطه (۱, ۵) با شیب (-۳) عبور می‌کند برابر است با: $y-5 = -3(x-1) \Rightarrow y = -3x+8$

۱۵

فرض کنید کودک و نوجوان را با k ، میانسال را با M ، سالمند را با S و به بیماری مبتلا بودن را با B ، نمایش دهیم:

$$P(B) = P(K)P(B|K) + P(M).P(B|M) + P(S).P(B|S)$$

$$P(B) = (\frac{3}{100})(\frac{4}{100}) + (\frac{6}{100})(\frac{2}{100}) + (\frac{1}{100})(\frac{5}{100})$$

$$= \frac{29}{10000} = 0.0029$$

۱۶

اگر B و R به ترتیب پیشامد آبی و قرمز بودن مهره خارج شده از ظرف اول باشد و پیشامد انتخاب مهره آبی از ظرف دوم A باشد، آن‌گاه داریم:

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(R)P(A|R)$$

$$\Rightarrow \frac{6}{14} \times \frac{10}{16} + \frac{8}{14} \times \frac{9}{16} = \frac{132}{224}$$

پاسخنامه آزمون (۱۱) نوبت دوم

ریاضی (۳)

۱

ب) کوچکتر

الف) صعودی

پ) ناسازگار

۸

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x^2 + ax + a^2)}{(x-a)} \Rightarrow f'(a) = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$$

$A(1,1)$ معادله خط قائم بر نمودار در نقطه $y-1=3(x-1) \Rightarrow y=3x-2$

۹

الف) $f(x) = \frac{2x-3}{x^2-6x+5}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(2x-3)'(x^2-6x+5) - (x^2-6x+5)'(2x-3)}{(x^2-6x+5)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2(x^2-6x+5) - (2x-6)(2x-3)}{(x^2-6x+5)^2}$$

ب) $g(x) = \sqrt{x}(x-1)^2 \Rightarrow g'(x) = (\sqrt{x})'(x-1)^2 + ((x-1)^2)'(\sqrt{x})$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)^2 + 2(x-1)\sqrt{x}$$

۱۰

الف) $m(3) - m(2) = (81 + 2\sqrt{3}) - (24 + 2\sqrt{2}) = 57 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$

ب) $m(t) = 3t^2 + 2\sqrt{t} \Rightarrow m'(t) = 6t + 2 \times \frac{1}{2\sqrt{t}} = 6t + \frac{1}{\sqrt{t}}$

$t = 4$ در $m'(4) = 9(4)^2 + \frac{1}{\sqrt{4}} = 144.5$ آهنگ لحظه‌ای رشد باکتری

۱۱

$f(x) = -x^3 + 3x \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 3$

نقاط بحرانی $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm 1$

x	-∞	-1	1	+∞
f' علامت		-	+	-

ماکزیمم مینیمم

نقطه با طول $x = -1$ ، مینیمم نسبی و نقطه با طول $x = 1$ ، ماکسیمم نسبی تابع f است.

۱۲

ارتفاع مکعب حاصل x و طول عرضش $24-2x$ خواهد بود. بنابراین حجم قوطی برابر است با:

$$V(x) = x(24-2x)^2$$

$$\Rightarrow x(576 - 96x + 4x^2) = 4x^3 - 96x^2 + 576x, x \in (0, 12)$$

نقاط بحرانی $V(x)$ را مشخص می‌کنیم.

$$V'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 192x + 576 = 0 \Rightarrow 12(x^2 - 16x + 48) = 0$$

$$\Rightarrow 12(x-4)(x-12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \text{ نقطه بحرانی} \\ x=12 \notin (0, 12) \end{cases}$$

با توجه به جدول تغییرات تابع V ، مشخص می‌شود که برای $x=4$ ، حجم قوطی حداکثر مقدار ممکن می‌شود.

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-x) - (-1)\sqrt{x}}{(1-x)^2} \quad (ب)$$

۱۰

توسط آهنگ $\frac{f(f) - f(0)}{f - 0} = \frac{28 - 0}{4} = 7$ ، $f'(t) = 4t - 1$
 $\Rightarrow 4t - 1 = 7 \rightarrow t = 2$

۱۱

$$f'(x) = 2ax + b \Rightarrow 0 = 2a + b \Rightarrow b = -2a$$

$$f(1) = 7 \Rightarrow 7 = a + b \Rightarrow a = -7, b = 14$$

۱۲

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 \Rightarrow f'(x) = 6(x^2 + x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2 \notin [-1, 3] \\ x = 1 \end{cases}$$

$$f(1) = -7, f(-1) = 13, f(3) = 45$$

(۱۰-۷) مینیمم مطلق و نقطه (۳، ۴۵) ماکزیمم مطلق

۱۳

جعبه‌ای به طور $1-2x$ ، عرض $1-2x$ و ارتفاع x ایجاد می‌شود:

$$v(x) = (1-2x)^2 \times x = x - 4x^2 + 4x^3$$

$$v'(x) = 1 - 8x + 12x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{6}$$

$x = \frac{1}{6}$ قابل قبول است.

(مقدار $x = \frac{1}{6}$ باعث می‌شود طول و عرض جعبه صفر شوند و حجم جعبه نیز صفر شود.)

۱۴

دو دایره متخارج هستند.

$$o_1 = (-1, 2), r_1 = 1, o_2 = \begin{cases} -\frac{a}{2} = 1 \\ -\frac{b}{2} = -2 \end{cases}, r_2 = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = 2$$

$$d = \sqrt{(-1-1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{20} \Rightarrow \sqrt{20} > 1+2 = 3$$

۱۵

$$2a = 8 \Rightarrow a = 4, 2b = 6 \Rightarrow b = 3$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 16 - 9 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

فاصله کانونی $2c = 2\sqrt{7}$

۱۶

$$p(A) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{10} + \frac{1}{3} \times 0 = \frac{67}{270}$$

پاسخ‌نامه آزمون (۱۲) نوبت دوم

ریاضی (۳)

۱

(ب) درست

(الف) نادرست

(ج) نادرست

۲

(ب) استوانه

(الف) $-\infty$

۲

(ب) نادرست

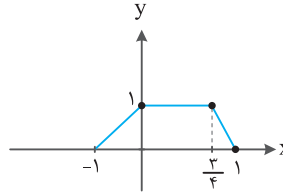
(الف) درست

(پ) درست

۳

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \geq 4 \mid \sqrt{x-4} \neq \pm 1\} = [4, 5) \cup (5, +\infty)$$

۴



۵

(الف) صفحات: ۴۰ و ۴۸

$$\max = |-2| + 1 = 3, \quad \min = -|-2| + 1 = -1$$

(ب)

$$1 - 2\sin^2 \alpha - \sin \alpha + 1 = 1 \Rightarrow 2\sin^2 \alpha + \sin \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = -1 \\ \sin \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, \alpha = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$$

۶

(الف)

$$\frac{-1}{0} = +\infty$$

(ب) (ضرب صورت و مخرج در $(x + \sqrt{x})$)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{(x+2)(x-1)(x+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)(x+\sqrt{x})} = +\frac{1}{6}$$

(ب) $+\infty$

(آ) -2

۷

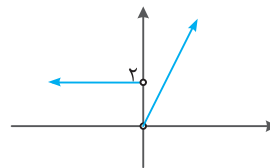
$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} = 3$$

۸

(الف) شکل تابع در $x = 0$ گوشه‌ای و مشتق ناپذیر است.

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & ; x < 0 \\ 2x & ; x > 0 \end{cases} \quad (ب)$$



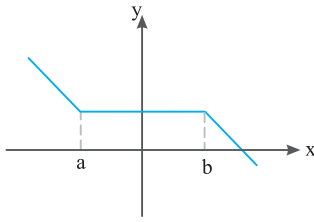
(ج)

۹

$$f'(x) = 5(x^2 - 3x)^4 (4x^2 - 3)$$

(الف)

نکته به نمودار شکل زیر دقت کنید.



این تابع در بازه‌های $(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$ اکیداً نزولی و در بازه $[a, b]$ ثابت است و درجا می‌زند. به این گونه توابع، نزولی می‌گوییم و به زبان ریاضی می‌نویسیم:

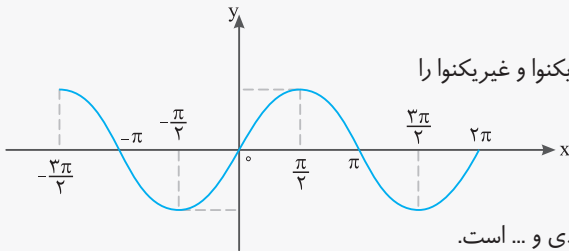
$$x_1, x_2 \in D_f, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

و اگر رابطه‌ای به صورت زیر تعریف شود به آن تابع صعودی می‌گوییم:

$$x_1, x_2 \in D_f, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

◆ تابع f را در یک بازه ثابت می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر x در این بازه، مقدار f ثابت باشد. باتوجه به تعاریف بالا، تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

◆ توابع یکنوا و غیریکنوا:



ابتدا به نمودار زیر دقت کنید که بعد با توضیح کامل این نمودار مفهوم توابع یکنوا و غیریکنوا را درک می‌کنیم:

این تابع در بازه $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ اکیداً نزولی و در بازه $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ اکیداً صعودی و ... است.

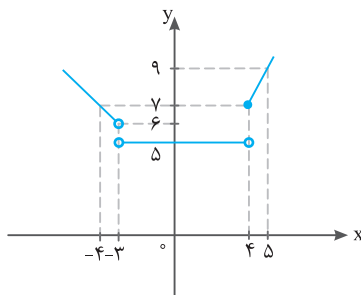
به این توابع که گاهی صعودی و گاهی نزولی‌اند، نه صعودی و نه نزولی یا غیریکنوا می‌گوییم.

به توابعی که در دامنه‌شان همواره صعودی یا همواره نزولی باشند، یکنوا می‌گویند.

◆ برای تشخیص صعودی یا نزولی بودن یک تابع در بازه‌های مختلف، ساده‌ترین کار رسم شکل است.

مثال نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آن‌ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -x+3 & x < -3 \\ 5 & -3 \leq x < 4 \\ 2x-1 & x \geq 4 \end{cases}$$



پاسخ: برای هر ضابطه، نمودار تابع را مطابق شکل می‌کشیم و مشخص می‌شود که:

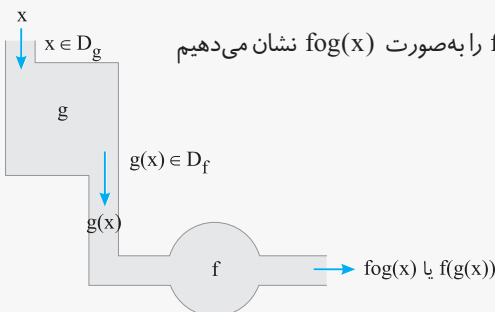
در بازه $x < 4$: تابع نزولی، در بازه $-3 \leq x < 4$ تابع ثابت و در بازه $x \geq 4$: تابع

صعودی است.

درس دوم: ترکیب توابع

اگر f و g دو تابع باشند، به طوری که اشتراک برد g و دامنه f غیرتهی باشد، تابع $f(g(x))$ را به صورت $f \circ g(x)$ نشان می‌دهیم و آن را ترکیب f با g می‌نامیم.

مراحل ساخت تابع مرکب $f \circ g$ را می‌توان به صورت روبه‌رو نمایش داد:



مثال اگر $g = \{(2, 1), (3, -2), (10, 0), (-20, 5), (40, -6)\}$ و $f = \{(0, -2), (3, 4), (4, 1), (-10, 5)\}$ باشند، تابع $g \circ f$ را در صورت امکان بنویسید.

پاسخ: به ازای هر کدام از مقادیر دامنه f به جای x ، تابع مرکب را می‌نویسیم:

$$\left. \begin{aligned} g \circ f(0) &= g(f(0)) = g(-2) = 5 \\ g \circ f(3) &= g(f(3)) = g(4) = -6 \\ g \circ f(4) &= g(f(4)) = g(1) = 0 \\ g \circ f(-1) &= g(f(-1)) = g(-1) = \text{تعریف نشده} \end{aligned} \right\} \Rightarrow g \circ f = \{(0, 5), (3, -6), (4, 0)\}$$

◆ **دامنه تابع مرکب:** $1 -$ دامنه تابع مرکب $g \circ f$ مجموعه x هایی است که در دامنه f قرار داشته باشند، به شرطی که $f(x)$ در دامنه g قرار داشته باشد؛ به بیان دیگر:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$2 -$ دامنه تابع مرکب $f \circ g$ مجموعه x هایی است که در دامنه g قرار داشته باشند به شرطی که $g(x)$ در دامنه f قرار داشته باشد؛ به بیان دیگر:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

مثال اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = x^2 - 1$ باشد، دامنه و ضابطه تابع $g \circ f$ را بنویسید.

پاسخ: ابتدا دامنه f و g را به دست می‌آوریم تا بتوانیم دامنه $g \circ f$ را بنویسیم.

$$D_f = [1, +\infty), D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$= \{x \in [1, +\infty) \mid \sqrt{x-1} \in \mathbb{R}\} = [1, +\infty)$$

دقت کنید که عبارت $\sqrt{x-1} \in \mathbb{R}$ به ازای $x-1 \geq 0$ یعنی $x \geq 1$ درست است.

تذکره دامنه توابع مرکب را همیشه با توجه به تعاریف آن به دست می‌آوریم، (نه از روی ضابطه!) زیرا از روی ضابطه ممکن است دامنه نادرست به دست آید (مانند همین مثال!) اما محاسبه ضابطه:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 - 1 = (\sqrt{x-1})^2 - 1 = x - 1 - 1 = x - 2$$

دامنه \mathbb{R} به دست آمده که نادرست است.

تذکره اگر $(f \circ g)(x)$ و $f(x)$ را بدهند و $g(x)$ را بخواهند، به ترتیب مراحل زیر را طی می‌کنیم.

(۱) به جای x ، عبارت $g(x)$ را در تابع f قرار می‌دهیم تا $f \circ g(x)$ به دست آید.

(۲) با مقایسه $(f \circ g)(x)$ به دست آمده با $(f \circ g)(x)$ داده شده در مسئله، $g(x)$ مشخص می‌شود.

مثال اگر $f(x) = \frac{x}{x+1}$ و $(f \circ g)(x) = \frac{2}{x-1}$ باشد، ضابطه تابع $g(x)$ را بیابید.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)}{g(x)+1} \stackrel{\text{طبق فرض}}{=} \frac{2}{x-1} \Rightarrow (x-1)(g(x)) = 2(g(x)+1)$$

$$\Rightarrow xg(x) - g(x) = 2g(x) + 2 \Rightarrow xg(x) - 3g(x) = 2 \Rightarrow g(x)(x-3) = 2 \Rightarrow g(x) = \frac{2}{x-3}$$

تذکره اگر $(f \circ g)(x)$ و $g(x)$ را بدهند و $f(x)$ را بخواهند، به ترتیب مراحل زیر را طی می‌کنیم:

(۱) ضابطه $g(x)$ را به جای آن در $f(g(x))$ را جایگذاری می‌کنیم.

(۲) عبارت داخل پرانتز را t فرض می‌کنیم.

(۳) x را برحسب t پیدا می‌کنیم.

(۴) به جای همه x ها در عبارت مقدار آن برحسب t را جایگذاری می‌کنیم.

مثال ضابطه تابع وارون توابع $y = -2x + 1$ و $y = \sqrt{x-1}$ را به دست آورید.

$$y = -2x + 1 \rightarrow 2x = 1 - y \Rightarrow x = \frac{1-y}{2} \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{1-y}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1-x}{2}$$

پاسخ:

$$y = \sqrt{x-1} \Rightarrow y^2 = x-1 \Rightarrow x = y^2 + 1 \Rightarrow f^{-1}(y) = y^2 + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 + 1$$

$$D_f = R_{f^{-1}}$$

نکته ۱ دامنه تابع برابر برد تابع وارون و برد تابع، برابر دامنه تابع وارون است:

$$R_f = D_{f^{-1}}$$

۲ اگر f وارون پذیر باشد، و f^{-1} وارون آن باشد، آن گاه:

$$(f \circ f^{-1})(x) = x, (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

همچنین دامنه $f \circ f^{-1}$ همان دامنه f^{-1} و دامنه $f^{-1} \circ f$ همان دامنه f است.

$$(f \circ g)^{-1}(x) = g^{-1} \circ f^{-1}(x)$$

۳ در توابع رابطه زیر همواره برقرار است:

مثال اگر $f = \{(1, 2), (3, -1), (4, 5)\}$ باشد، حاصل $f \circ f^{-1}(x)$ و $f^{-1} \circ f(x)$ را بیابید.

$$f^{-1} = \{(2, 1), (-1, 3), (5, 4)\}$$

پاسخ: زوج‌های $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم:

حالا به ترتیب x ها را از این تابع به $f \circ f^{-1}(x)$ می‌دهیم و y ها را پیدا می‌کنیم.

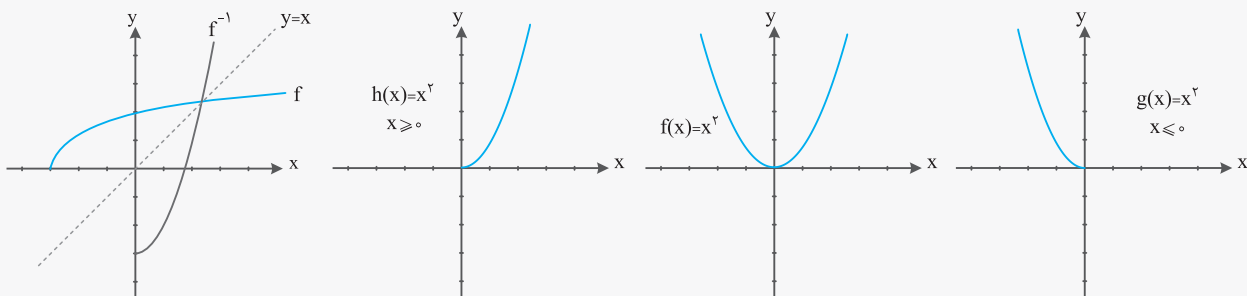
$$\begin{cases} f(f^{-1}(2)) = f(1) = 2 \\ f(f^{-1}(-1)) = f(3) = -1 \Rightarrow f \circ f^{-1} = \{(2, 2), (-1, -1), (5, 5)\} \\ f(f^{-1}(5)) = f(4) = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f^{-1}(f(1)) = f^{-1}(2) = 1 \\ f^{-1}(f(3)) = f^{-1}(-1) = 3 \Rightarrow f^{-1} \circ f = \{(1, 1), (3, 3), (4, 4)\} \\ f^{-1}(f(4)) = f^{-1}(5) = 4 \end{cases}$$

◆ مرور کردن دامنه تابع:

همان‌طور که گفتیم تابعی وارون پذیر است که یک‌به‌یک باشد. گاهی بعضی از توابع یک‌به‌یک نیستند، اما می‌توان با محدود کردن دامنه آن‌ها، آن‌ها را به تابع یک‌به‌یک تبدیل کرد و سپس وارون آن‌ها را به دست آورد.

می‌دانیم که تابع $y = x^2$ یک‌به‌یک نیست، زیرا شکل این تابع سهمی است و خط موازی محور x ها این نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند. اما اگر دامنه آن را به صورت $[0, +\infty)$ و یا $(-\infty, 0]$ محدود کنیم، آن وقت تابع $y = x^2$ یک تابع یک‌به‌یک می‌شود.



درس اول: آشنایی با مفهوم مشتق

◆ شیب خط: شیب خطی که از نقاط $(A, f(A))$ و $(B, f(B))$ می‌گذرد برابر $m_{AB} = \frac{f(B) - f(A)}{B - A}$ است و شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه $A(a, f(a))$ برابر $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ و یا $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ است.

مثال باتوجه به تابع $f(x) = x^2 - 3x$

الف) شیب خطی که از نقاط $A(1, f(1))$ و $B(4, f(4))$ عبور می‌کند چه قدر است؟
 ب) معادله خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه‌ای به طول ۱ چه قدر است؟

الف) $m_{AB} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{(4) - (-2)}{3} = 2$

ب) $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 3(1+h) - (-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h-1)}{h} = -1$

و یا به طریق زیر $f'(1)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x - (-2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)} = -1$$

۱) شیب خط مماس در نقطه به طول ۱

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow y - (-2) = (-1)(x - 1) \Rightarrow y = -x - 1$$

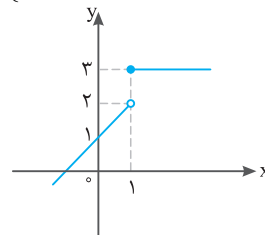
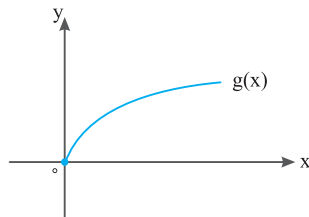
درس دوم: مشتق پذیری و پیوستگی

مثال ۱) مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول x_0 به یکی از دو صورت $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ یا $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ است.

۲) اگر تابع f در $x = a$ مشتق پذیر باشد، آن‌گاه f در a پیوسته است، بنابراین اگر تابع f در $x = a$ پیوسته نباشد، آن‌گاه f در a مشتق پذیر نیست.

مثال مشتق پذیری توابع $f(x) = |x^2 - 1|$ ، $g(x) = \sqrt{x-1}$ ، $h(x) = \begin{cases} x+1 & x < 1 \\ 3 & x \geq 1 \end{cases}$ در $x=1$ را بررسی کنید.

پاسخ: توابع $g(x) = \sqrt{x-1}$ و $h(x) = \begin{cases} x+1 & x < 1 \\ 3 & x \geq 1 \end{cases}$ در نقطه $x=1$ پیوسته نیستند، زیرا کافی است به شکل آن‌ها توجه کنید:



توابع $g(x)$ و $h(x)$ در $x=1$ پیوسته نیستند، بنابراین در این نقطه مشتق پذیر هم نیستند؛ اما برای تابع $f(x)$ که در $x=1$ پیوسته است، مشتق چپ و راست در این نقطه را به دست می‌آوریم:

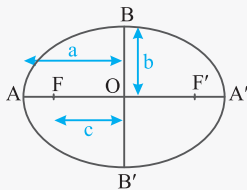
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 1| - 0}{x - 1} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = 2 \\ f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)(x+1)}{(x-1)} = -2 \end{cases}$$

چون مشتق چپ و راست تابع f در $x=1$ مساوی نیستند، پس تابع f در این نقطه مشتق پذیر نیست.

درس اول: تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی

دوران

- از دوران یک مستطیل حول طولش، استوانه‌ای به ارتفاع مساوی با طول و شعاع قاعده مساوی با عرض مستطیل ایجاد می‌شود.
 - از دوران مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع قائم b و c حول ضلع قائمه b ، مخروطی به ارتفاع b و شعاع قاعده c ایجاد می‌شود.
 - از دوران یک دایره حول یکی از قطرهایش، کره‌ای به شعاع مساوی با شعاع دایره ایجاد می‌شود.
- ◆ بیضی: مجموعه نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطه ثابت واقع در صفحه (یعنی کانون‌های بیضی)، برابر با مقداری ثابت است.
- ◆ اگر قطر بزرگ بیضی افقی باشد، آن را **بیضی افقی** و اگر قطر بزرگ عمودی باشد، آن را **بیضی قائم** می‌نامند.



◆ باتوجه به بیضی افقی روبه‌رو:

- مجموع فواصل هر نقطه از بیضی، از دو کانون F و F' ، مقدار ثابتی است که برابر است با طول قطر بزرگ بیضی ($AA' = 2a$).
- رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ در هر بیضی برقرار است. a اندازه نیم‌قطر بزرگ، b اندازه نیم‌قطر کوچک و c نصف فاصله کانونی.
- مقدار $e = \frac{c}{a}$ را **خروج از مرکز بیضی** می‌نامند.

مثال کانون‌های یک بیضی نقاط $(2, 5)$ و $(2, -3)$ است.

- فاصله کانونی، مختصات مرکز بیضی و معادله قطرهای بزرگ و کوچک بیضی را بنویسید.
- اگر اندازه قطر بزرگ بیضی ۱۲ باشد، اندازه قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

پاسخ:

الف) باتوجه به مؤلفه‌های طول یکسان کانون‌ها، نتیجه می‌گیریم، بیضی قائم است: مرکز بیضی در وسطه فاصله کانون‌ها قرار دارد:

$$O = \left(\frac{2+2}{2}, \frac{5+(-3)}{2} \right) = (2, 1)$$

معادله قطر بزرگ همان معادله خطی است که از کانون‌های بیضی عبور می‌کند و چون معادله کانون‌ها $x = 2$ می‌باشند، بنابراین معادله قطر بزرگ نیز $x = 2$ است.

قطر کوچک بر قطر بزرگ عمود است، پس معادله آن باید به صورت $y = k$ باشد که چون $O(2, 1)$ بر روی قطر کوچک قرار دارد، نتیجه می‌گیریم که معادله قطر کوچک $y = 1$ است.

ب) $a = 12 \div 2 = 6 \Rightarrow$ اندازه قطر بزرگ

فاصله کانونی $c = 8 \div 2 = 4$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 6^2 = b^2 + 4^2 \Rightarrow b^2 = 20 \Rightarrow b = 2\sqrt{5} \Rightarrow$$
 اندازه قطر کوچک $= 2 \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

خروج از مرکز بیضی $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{6}$

درس دوم: دایره

◆ معادله استاندارد دایره‌ای به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع r برابر $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ است.

◆ وضعیت نقطه و دایره:

الف) نقاطی که در معادله $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ صدق می‌کنند، روی محیط دایره قرار دارند.

ب) نقاطی که در نامعادله $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 < r^2$ صدق می‌کنند، درون دایره قرار دارند.

پ) نقاطی که در نامعادله $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 > r^2$ صدق می‌کنند، خارج دایره قرار دارند.

◆ معادله گسترده یک دایره به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ می‌باشد، مختصات مرکز این دایره $O\left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}\right)$ و شعاع دایره

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

است.

$$1) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \xrightarrow{\text{اگر } A \text{ و } B \text{ ناسازگار باشند}} P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$2) \text{ احتمال شرطی: } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (P(B) \neq 0)$$

$$3) \text{ پیشامدهای } A \text{ و } B \text{ مستقل: } P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

◆ **قانون احتمال کل:** اگر A_1, A_2, A_3, \dots پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل دهنده و B یک پیشامد دلخواه باشد، رابطه زیر برقرار خواهد بود.

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) + \dots$$

مهم‌ترین رابطه‌ای که در این فصل با آن کار داریم همین «**قانون احتمال کل**» است که برای حل مسئله‌های مرتبط با آن، اولاً باید A_1, A_2, A_3, \dots را به درستی تشخیص دهید (که معمولاً همان ظرف‌های مختلف مسئله یا همان کیسه‌های مختلف با همان جنسیت زن و مرد و ... هستند) و سپس B که خواسته شرطی اصلی مسئله است. با حل یک مثال، این روش را تمرین می‌کنیم.

مثال ۳ ظرف یکسان داریم. در اولین ظرف ۱۰ مهره قرار دارد که ۳ تایی آن‌ها قرمز است. در دومین ظرف ۸ مهره قرار دارد که ۶ تایی آن‌ها قرمز است و در سومین ظرف ۱۲ مهره قرار دارد که ۹ تایی آن‌ها قرمز است. با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می‌آوریم. احتمال این که مهره انتخابی قرمز باشد چه قدر است؟

پاسخ: پیشامد انتخاب ظرف‌ها را به ترتیب با A_1, A_2 و A_3 و پیشامد خارج شدن مهره قرمز را با B نمایش می‌دهیم. می‌دانیم احتمال انتخاب هر یک از ظرف‌های یکسان است:

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$$

و احتمال انتخاب مهره قرمز از هر ظرف برابر $\frac{\text{تعداد مهره‌های قرمز}}{\text{تعداد کل مهره‌ها}}$ در آن ظرف است:

$$P(B|A_1) = \frac{3}{10}, P(B|A_2) = \frac{6}{8}, P(B|A_3) = \frac{9}{12}$$

بنابراین احتمال خارج شدن مهره قرمز یعنی $P(B)$ برابر است با:

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$$

$$P(B) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{10}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{6}{8}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{9}{12}\right) = \frac{1}{10} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{6}{10}$$