

به نام خالق زیبایی‌ها

من و شما هدف‌های مشترکی داریم که یکی از آنها موفقیت شما در امتحانات نهایی پایه دوازدهم است. در این کتاب تلاش شده هر آنچه را که برای موفقیت شما در آزمون درس ریاضی ۳ لازم است در حجم کم و خلاصه آماده کنیم و در اختیارتان قرار دهیم.

در این کتاب می‌خوانید:

• نمونه سؤالات مهم امتحانی:

- سؤالات مهم کتاب درسی که در طراحی سؤالات امتحانات نهایی بسیار مورد توجه هستند.
- سؤالاتی که در آزمون‌های سال‌های قبل بسیار مورد استفاده بوده‌اند و می‌توان آنها را به عنوان سؤالات احتمالی آزمون امسال برشمرد. بخشی از آنها عیناً و به همراه «مرجع اخذ سؤال» مطرح شده است و برخی از آنها با تغییرات در راستای اهداف و مباحث کتاب‌های درسی جدید ارائه گردیده‌اند.

• نمونه آزمون‌های ترم اول و پایانی:

نمونه آزمون‌هایی با بودجه‌بندی مصوب آزمون طراحی، و به همراه پاسخ تشریحی ارائه شده است. پیشنهاد می‌شود با توجه به جدول بودجه‌بندی آزمون‌ها، بارم‌بندی هر فصل، زمان باقی‌مانده تا امتحان و نقاط ضعف و قوت خود، برنامه‌ریزی مناسبی برای مطالعه داشته باشید تا به بهترین نتیجه دست پیدا کنید.

فصل	محدوده فصل	نوبت اول	نوبت دوم	شهریور و دی
۱	کل	۷	۱/۵	۳
۲	کل	۵	۱/۵	۳
۳	کل	۵	۱	۲
۴	تا صفحه ۷۶	۳	۱	۵
	صفحه ۷۷ به بعد		۴/۵	
۵	کل	۲۰	۴	۳
۶	کل		۴	۲/۵
۷	کل		۲/۵	۱/۵
جمع نمره‌ها			۲۰	۲۰

با آرزوی موفقیت شما

مهندس علی تفرشی



فصل

۱

تابع

۷

درس اول: توابع چند جمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

۱۲

درس دوم: ترکیب توابع

۲۰

درس سوم: تابع وارون

۲

فصل

مثلثات

۲۳

درس اول: تناوب و تانژانت

۲۷

درس دوم: معادلات مثلثاتی

فصل

۳

حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

۳۰

درس اول: حد بی‌نهایت

۳۶

درس دوم: حد در بی‌نهایت

۴

فصل

مشتق

۴۰

درس اول: آشنایی با مفهوم مشتق

۴۴

درس دوم: مشتق‌پذیری و پیوستگی

۵۴

درس سوم: آهنگ تغییر

فصل

۵

کاربرد مشتق

۵۸

درس اول: اکسترم‌های تابع

۶۳

درس دوم: بهینه‌سازی

۶

فصل

هندسه

۶۷

درس اول: تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی

۷۱

درس دوم: دایره

فصل

۷

احتمال

۷۶

قانون احتمال کل

آزمون

۸۱

درس اول: توابع چندجمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

1 به کمک نمودار تابع $y = x^3$ ، ضابطه هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید.

(کاردرکلاس صفحه ۵ کتاب درسی)

الف $y = (x-1)^3 + 2$

ب $y = (x-2)^3$

پ $y = -x^3 + 1$

ت $y = (x+1)^3 - 1$

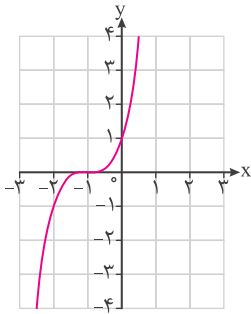
ث $y = -x^3$

ج $y = (x+1)^3$

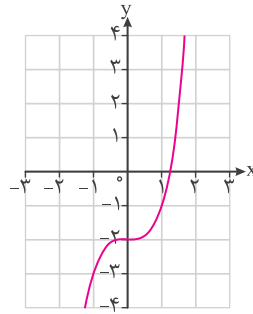
چ $y = x^3 + 1$

ح $y = -x^3 - 1$

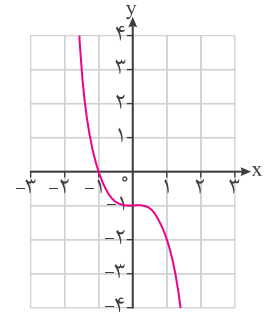
خ $y = x^3 - 2$



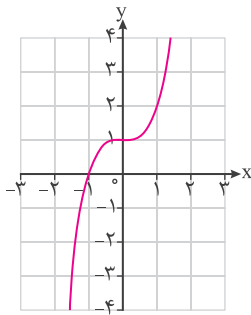
(۱)



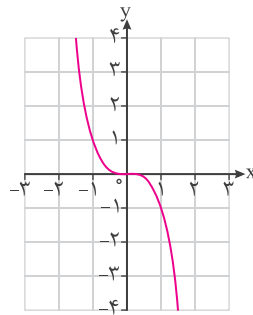
(۲)



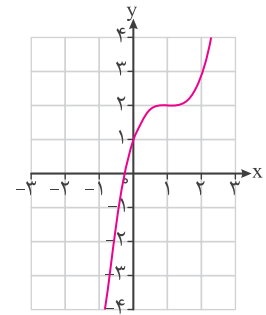
(۳)



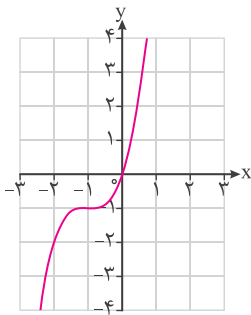
(۴)



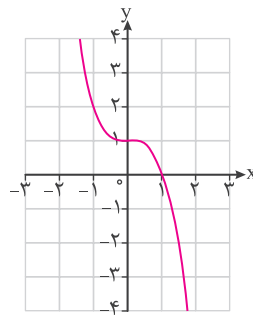
(۵)



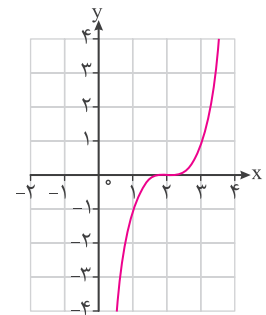
(۶)



(۷)

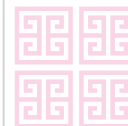


(۸)



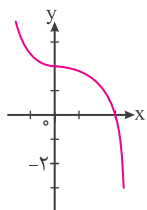
(۹)

معادله	الف	ب	پ	ت	ث	ج	چ	ح	خ
شماره نمودار	(۶)	(۹)	(۸)	(۷)	(۵)	(۱)	(۴)	(۳)	(۲)



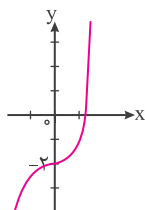
۲ ضابطه هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید.

الف $y = -x^3 + 2$



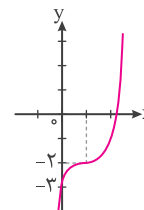
(۱)

ب $y = (x-1)^3 - 2$



(۲)

پ $y = x^3 - 2$



(۳)

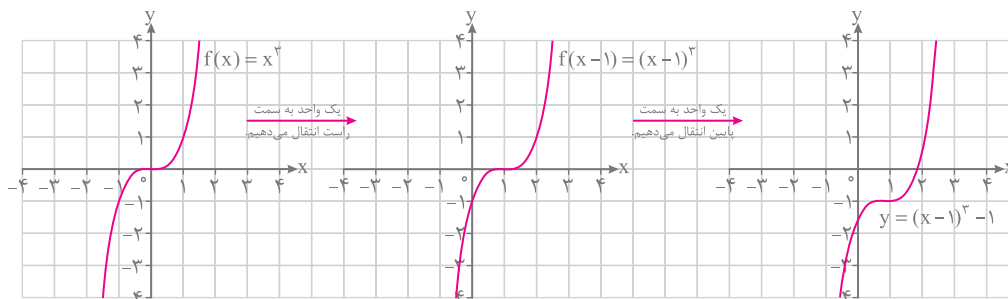
معادله	الف	ب	پ
شماره نمودار	(۱)	(۳)	(۲)

پاسخ

(تمرین صفحه ۱۰ کتاب درسی)

۳ نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آنها را مشخص نمایید.

الف $y = (x-1)^3 - 1$

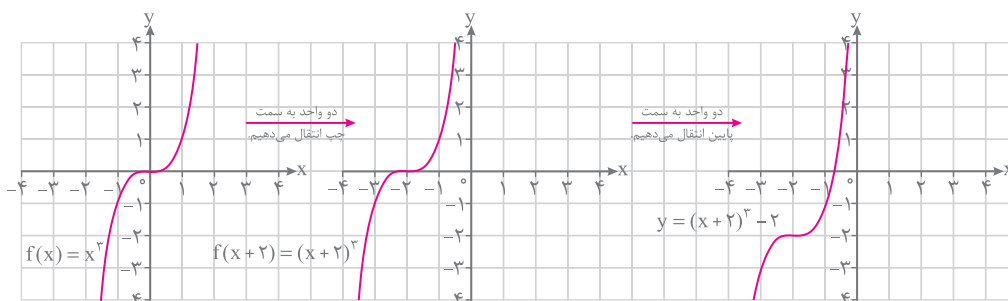


$$D_y = \mathbb{R}$$

$$R_y = \mathbb{R}$$

پاسخ

ب $y = (x+2)^3 - 2$



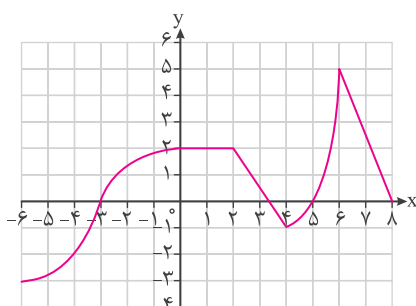
$$D_y = \mathbb{R}$$

$$R_y = \mathbb{R}$$

پاسخ

(تمرین صفحه ۱۰ کتاب درسی)

۴ با استفاده از نمودار تابع زیر مشخص کنید این تابع در چه بازه‌هایی صعودی، نزولی یا ثابت است.

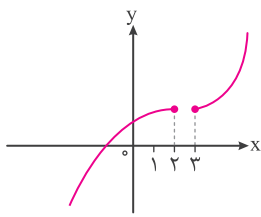


$[4, 6]$ و $(-\infty, 2)$: بازه‌هایی که تابع در آنها صعودی است.

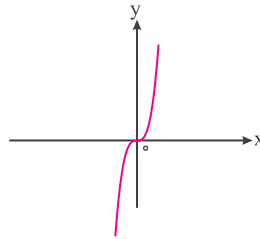
$[6, +\infty)$ و $[0, 4]$: بازه‌هایی که تابع در آنها نزولی است.

$[0, 2]$: بازه‌ای که تابع در آن ثابت است.

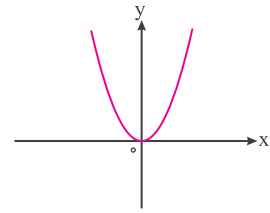
پاسخ



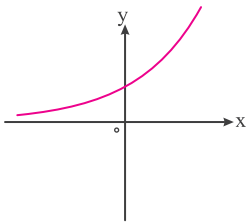
الف



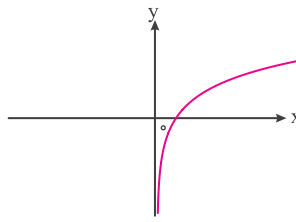
ب



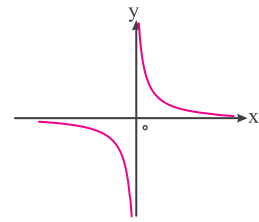
پ



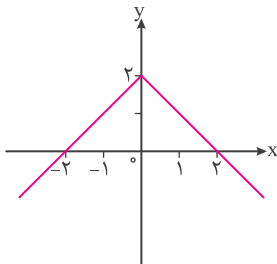
ت



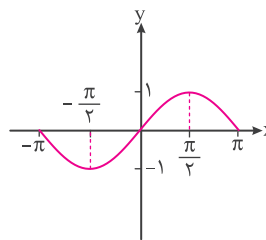
ث



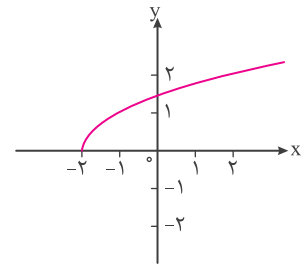
ج



چ



ح



خ

الف در دامنه تعریف خود، یعنی $(-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$ صعودی است ولی در هر یک از بازه‌های $[3, +\infty)$ و $(-\infty, 2]$ اکیداً صعودی است.

ب در بازه $(-\infty, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

پ در بازه $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی و در بازه $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی است، اما در \mathbb{R} نه صعودی است و نه نزولی.

ت در بازه $(-\infty, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

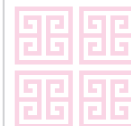
ث در بازه $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

ج در هر یک از بازه‌های $(0, +\infty)$ و $(-\infty, 0)$ اکیداً نزولی است.

چ در بازه $(-\infty, 0]$ اکیداً صعودی و در بازه $[0, +\infty)$ اکیداً نزولی است، اما در \mathbb{R} نه صعودی است و نه نزولی.

ح در هر یک از بازه‌های $[-\pi, \frac{-\pi}{4}]$ و $[\frac{\pi}{4}, \pi]$ اکیداً نزولی و در بازه $[\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ اکیداً صعودی است.

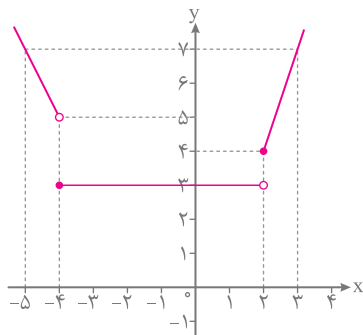
خ در بازه $(-2, +\infty)$ اکیداً صعودی است.



تمرین صفحه ۱۰ کتاب درسی)

نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آنها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 3 & x < -4 \\ 3 & -4 \leq x < 2 \\ 3x - 2 & x \geq 2 \end{cases}$$

ضابطه $y = -2x - 3$ معادله یک خط در بازه $(-\infty, -4)$ است که برای رسم آن از دو نقطه استفاده می‌کنیم:

x	-4	-5
y	5	7

ضابطه $y = 3$ معادله تابعی ثابت در بازه $[-4, 2)$ است.ضابطه $y = 3x - 2$ معادله یک خط در بازه $[2, +\infty)$ است که برای رسم آن نیز از دو نقطه استفاده می‌کنیم:

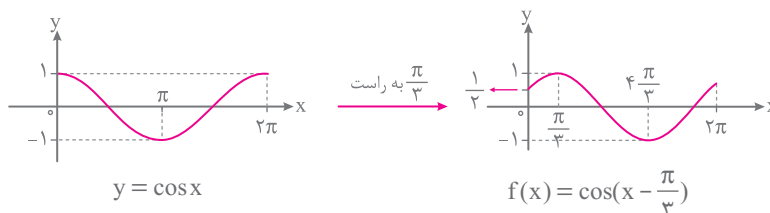
x	2	3
y	4	7

تابع f در بازه $(-\infty, -4)$ اکیداً نزولی است. (در بازه $(-\infty, 2)$ نزولی است.)تابع f در بازه $[-4, 2)$ ثابت است.تابع f در بازه $[2, +\infty)$ اکیداً صعودی است. (در بازه $[-4, +\infty)$ صعودی است.)

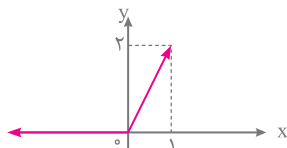
کاردرکلاس صفحه ۹ کتاب درسی)

نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند.

الف $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{3})$ $D_f = [0, 2\pi]$

تابع f در بازه‌های $[0, \frac{\pi}{3}]$ و $[\frac{4\pi}{3}, 2\pi]$ صعودی و در بازه $[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$ نزولی است.

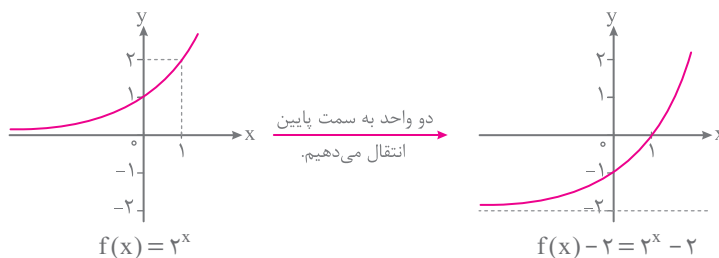
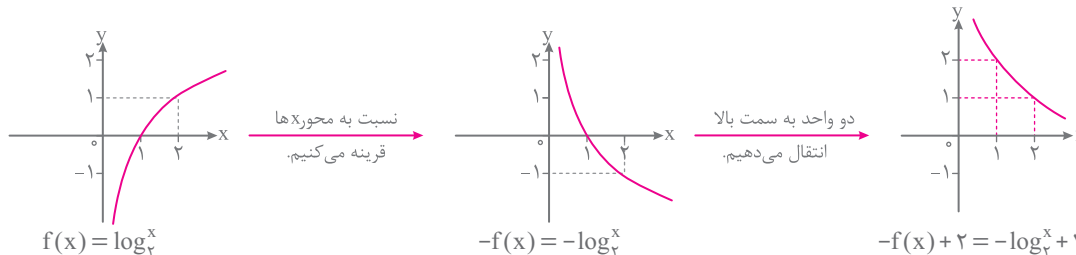
ب $g(x) = x + |x|$



$$g(x) = \begin{cases} x + (-x) = 0 & x < 0 \\ x + x = 2x & x \geq 0 \end{cases}$$

تابع g در بازه $(-\infty, +\infty)$ (یعنی \mathbb{R}) صعودی است.

تمرین صفحه ۱۰ کتاب درسی)

تابع نمایشی $y = 2^x - 2$ و تابع لگاریتمی $y = -\log_2^x + 2$ را رسم کنید و در مورد یکنوایی آنها در کلاس بحث کنید.با توجه به نمودار، تابع $y = 2^x - 2$ در بازه $(-\infty, +\infty)$ یعنی \mathbb{R} اکیداً صعودی است، پس اکیداً یکنواست.با توجه به نمودار، تابع $y = -\log_2^x + 2$ در دامنه خودش یعنی بازه $(0, +\infty)$ اکیداً نزولی است، پس اکیداً یکنواست.



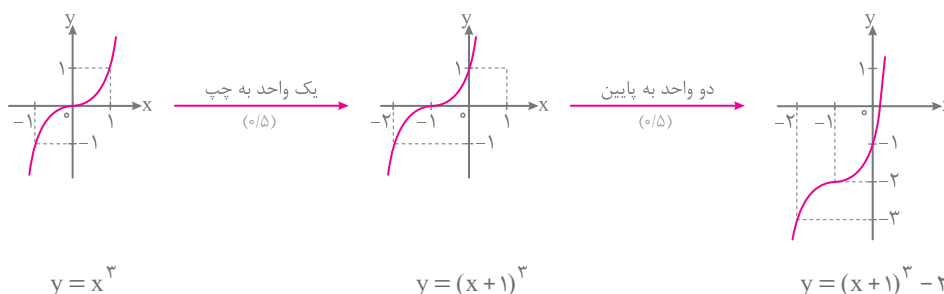
ردیف	آزمون نوبت اول (۱)	نمره
۱	الف) نمودار تابع $f(x) = \log_{x/5} x$ است. (صعودی - نزولی) ب) نمودار تابع $f(x) = (x+1)^2 - 2$ را رسم کنید.	۱/۷۵
۲	الف) نمودار تابع $f(x) = -\sqrt{-x}$ را به کمک انتقال نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ رسم کنید. ب) توابع f و g با ضابطه‌های $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = \sqrt{-x} - 2$ مفروض‌اند. دامنهٔ $g \circ f$ و ضابطهٔ $g \circ f$ را در صورت وجود محاسبه کنید.	۱/۷۵
۳	ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = -3 - \sqrt{2x+1}$ را بیابید.	۱/۵
۴	با محدود کردن دامنهٔ تابع $f(x) = x^2 - 2x$ ، یک تابع یک‌به‌یک به دست آورید. این تابع را رسم و دامنه و برد آن را مشخص کنید و ضابطهٔ وارون آن را به دست آورید.	۲
۵	دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x) = 4 \sin 3x - 1$ را بیابید.	۱
۶	در بازهٔ $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ ، مقادیر $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ را با هم مقایسه کنید.	۰/۵
۷	اگر $\frac{\pi}{4} < x < \pi$ و $\sin x = \frac{3}{5}$ باشد، مقادیر $\sin 2x$ و $\cos 2x$ را بیابید.	۱
۸	معادله‌های مثلثاتی‌های زیر را حل کنید.	۲/۵
	الف) $\sin x (2 \sin x - 3) = -1$ ب) $2 \cos x + 1 = 0$	
۹	حاصل‌حدهای زیر را پیدا کنید.	۴
	الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1}{x-2}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-3}{9-x}$ پ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x^2 - 3x - 6}{x^2 + 2x - 8}$ ت) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-x)(2-x)(3-x)}{x^3 - x}$	
۱۰	نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در همسایگی محذوف $x=2$ تعریف شده و $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$ باشد.	۱
۱۱	معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع $y = x^2 + 4$ را در نقطه‌ای به طول -2 واقع بر آن بنویسید.	۱/۲۵
۱۲	برای شکل روبه‌رو داریم $f(4) = 25$ و $f'(4) = 1/5$. مختصات نقاط A و B را بیابید.	۱
۱۳	در کدام نقاط از نمودار روبه‌رو مقدار مشتق به ترتیب، منفی، مثبت و صفر است؟	۰/۷۵



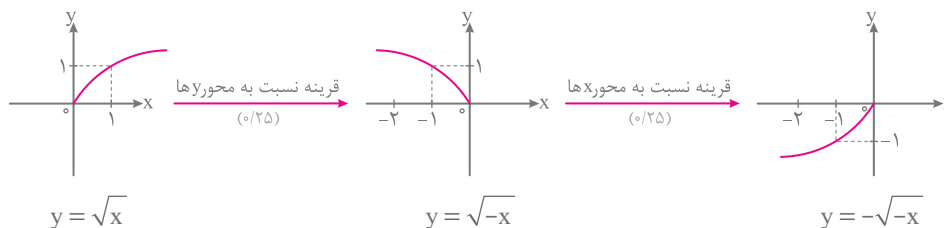
پاسخ آزمون نوبت اول (۱)

الف) تابع $f(x) = \log_a^x$ اگر $a > 1$ باشد، صعودی و اگر $0 < a < 1$ باشد، نزولی است. (۰/۲۵) در این سؤال $f(x) = \log_{0.5}^x$ است و داریم $a = 0.5$ در نتیجه $0 < a < 1$ ، پس تابع f نزولی است. (۰/۵)

(ب)



۲ الف)



$$f(x) = x^{\sqrt{x}} + 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \quad (0/25)$$

$$g(x) = \sqrt{-x} - 2 \Rightarrow D_g = (-\infty, 0] \quad (0/25)$$

(ب)

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \underbrace{x^{\sqrt{x}} + 1}_{x^{\sqrt{x}} + 1 \leq 0} \in (-\infty, 0]\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^{\sqrt{x}} \leq -1\} = \emptyset \quad (0/5)$$

چون $D_{g \circ f} = \emptyset$ است، پس $g \circ f$ موجود نیست. (۰/۲۵)با رسم نمودار تابع f متوجه می‌شویم که این تابع یک‌به‌یک و در نتیجه وارون پذیر است.

$$D_f : 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2} \quad (0/25)$$

$$R_f : -\sqrt{2x+1} \leq 0 \Rightarrow \underbrace{-3 - \sqrt{2x+1}}_{f(x)} \leq -3 \Rightarrow f(x) \leq -3 \quad (0/25)$$

$$D_f = [-\frac{1}{2}, +\infty), R_f = (-\infty, -3]$$

بنابراین:

$$y = -3 - \sqrt{2x+1} \Rightarrow \sqrt{2x+1} = -3 - y \Rightarrow 2x+1 = 9 + y^2 + 6y \Rightarrow 2x = y^2 + 6y + 8 \Rightarrow x = \frac{1}{2}y^2 + 3y + 4 \quad (0/5)$$

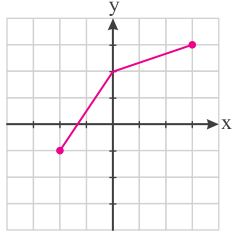
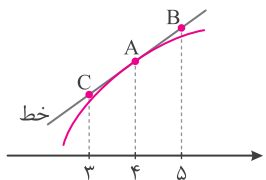
$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 4; x \leq -3 \quad (0/5)$$

چون $D_{f^{-1}} = R_f = (-\infty, -3]$ ، داریم:

$$y = x^{\sqrt{x}} - 2x = \underbrace{x^{\sqrt{x}} - 2x + 1}_{(x-1)^{\sqrt{x}}} - 1$$

بنابراین نمودار $f(x)$ به صورت  است که یک‌به‌یک نیست و وارون ندارد. (۰/۲۵) اما با محدود کردن دامنه تابع f به یکیاز بازه‌های $(-\infty, 1]$ یا $[1, +\infty)$ ، تابعی یک‌به‌یک و وارون پذیری به دست می‌آید. (در این سؤال دامنه را به بازه $[1, +\infty)$ محدود می‌کنیم.)



ردیف	آزمون نوبت دوم (۳) - دی ماه ۱۳۹۷	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود. ب) تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در نقطه $x=0$ مشتق پذیر است.	۰/۵
۲	در جاهای خالی، عبارت مناسب بنویسید. الف) تابع $h(x) = (2x^2 - 5x + 1)^3$ به صورت ترکیب دو تابع $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ و $g(x) = \dots$ است. ب) حد تابع $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ \frac{5x^2 - 3x}{-x^2 + 1} & x \leq 0 \end{cases}$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ برابر است. پ) اگر $f'(2) = 3$ و $g'(2) = 5$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $(fg - f'g')(2)$ برابر است. ت) شکل حاصل از دوران یک دایره حول یکی از قطرهای آن، برابر است.	۱
۳	الف) توابع $f(x) = \frac{x+3}{2x}$ و $g(x) = 3x - 1$ را در نظر بگیرید. دامنه $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید. ب) اگر $f(x) = \frac{1}{x} - 3$ و $g(x) = x^2$ باشد، مقدار $f^{-1} \circ g^{-1}(5)$ را به دست آورید.	۱/۷۵
۴	با استفاده از نمودار تابع f ، نمودار تابع $y = f\left(\frac{x}{4}\right) - 2$ را رسم کنید.	۰/۷۵
		
۵	الف) دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = 2 - 3 \sin 4x$ را به دست آورید. ب) دامنه تابع $f(x) = \tan(2x)$ را به دست آورید.	۱ ۰/۵
۶	معادله مثلثاتی $\sin x - \cos 2x = 0$ را حل کنید.	۱/۵
۷	حد توابع زیر را به دست آورید. الف) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+1} - 2}$	۱/۷۵
۸	برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم: $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 24$. با توجه به شکل، مختصات نقاط A، B و C را بیابید.	۰/۷۵
		
۹	اگر $f(x) = 1 - 2x^2$ باشد، $f'(-1)$ را با استفاده از تعریف مشتق به دست آورید.	۰/۷۵
۱۰	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). الف) $f(x) = \left(\frac{x}{2x-1}\right)^5$ ب) $g(x) = x^2(\sqrt{x+1})$	۲



۱	یک تودهٔ باکتری پس از t ساعت دارای جرم $x(t) = \sqrt{t} + 2t^3$ گرم است. آهنگ تغییر متوسط جرم این توده در بازهٔ زمانی $[3, 4]$ چقدر است؟	۱۱
۲	الف) جدول تغییرات تابع $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ را رسم و نقاط ماکزیمم و مینییمم نسبی آن را مشخص کنید. ب) نقاط بحرانی تابع f و اکسترمم مطلق این تابع را در بازهٔ $[-1, 3]$ مشخص کنید.	۱۲
۱	اگر محیط یک مستطیل ۲۴ سانتی‌متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری حساب کنید که مساحت آن ماکزیمم شود.	۱۳
۱	در یک بیضی، قطر بزرگ ۸ و قطر کوچک آن ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی چقدر است؟	۱۴
۱/۲۵	معادلهٔ گستردهٔ دایره‌ای به صورت $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ می‌باشد. مرکز و شعاع دایره را بنویسید.	۱۵
۱/۵	یک سکه را پرتاب می‌کنیم و اگر پشت بیاید ۳ سکهٔ دیگر را با هم پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش، احتمال اینکه دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود، چقدر است؟	۱۶

پاسخ آزمون نوبت دوم (۳)

۱	الف) درست ب) نادرست (هر مورد (۵/۲۵))	۱
۲	الف) $g(x) = x^3$ ب) -5 پ) 7 ت) کرهٔ توخالی (هر مورد (۵/۲۵))	۲
۳	الف) $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \text{ (۵/۲۵)} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x - 1 \neq 0\} \text{ (۵/۷۵)} = \mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\} \text{ (۵/۲۵)}$ ب) $g^{-1} \circ f^{-1}(5) = g^{-1}(64) = 4 \text{ (۵/۵)}$	۳
۴		۴
۵	الف) $\max = 3 + 2 = 5 \text{ (۵/۲۵)}$, $\min = - 3 + 2 = -1 \text{ (۵/۲۵)}$, $T = \frac{2\pi}{ b } = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ (۵/۵)}$ ب) $2x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ (۵/۲۵)} \Rightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \text{ (۵/۲۵)}$	۵
۶	$\sin x - 1 + 2 \sin^2 x = 0 \Rightarrow (2 \sin x - 1)(\sin x + 1) = 0 \text{ (۵/۵)} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2} \text{ (۵/۵)} \\ \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \text{ (۵/۵)} \end{cases} \end{cases}$	۶
۷	الف) $\frac{2-3}{0^-} \text{ (۵/۲۵)} = +\infty \text{ (۵/۲۵)}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3} \text{ (۵/۷۵)} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3)(\sqrt{x+1}+2) = 24 \text{ (۵/۲۵)}$	۷