سرشناسه : موسوی، سید شجاع‌الدین
عنوان و نام پدیدآور : هندسه دهم / سید شجاع‌الدین موسوی، شاهد مشهودی
مشخصات نشر : تهران : انتشارات بین‌المللی گاج ؛ ۱۳۹۷
مشخصات ظاهری : ۱۶۴ ص. مصور.
فروست : این‌کتاب از مجموعه کتاب‌های آس گاج می‌باشد.
بها : ۲۰۰۰۰ تومان
شابک : ۹۷۸-۶۰۰-۳۵۹-۸۶۰-۷
وضعیت فهرست‌نویسی : فیپای مختصر.
شمارهٔ کتابشناسی ملی : ۵۱۵۸۵۰۸

آس
مجموعه کتاب‌های آموزش ساده

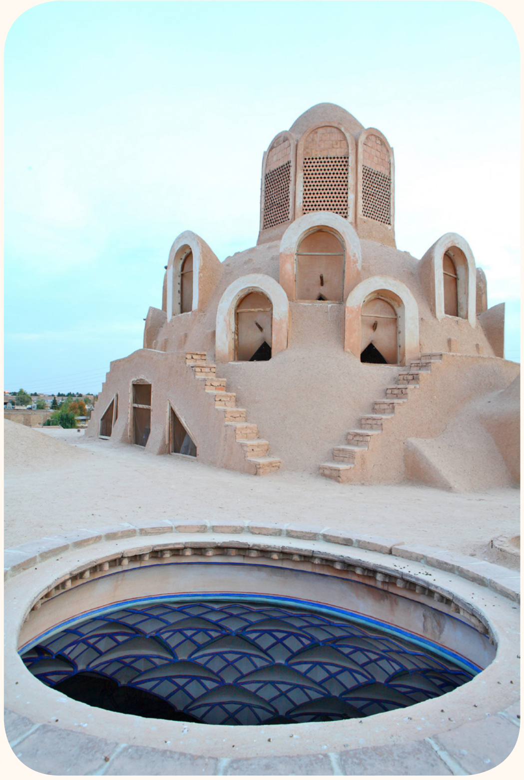
[ناشر : انتشارات بین‌المللی گاج]
[مدیر مسئول : مهندس ابوالفضل جوکار]
[معاونت علمی : مهندس محمد جوکار]
[مدیر تألیف : علیرضا مزرعتی]
[واحد پژوهش و برنامه‌ریزی کتاب‌های : آس]
[عنوان کتاب : هندسه دهم]
[مؤلفان : سید شجاع‌الدین موسوی ـ شاهد مشهودی]
[نظارت بر تألیف :نیلوفر حاجیلو] + [ویرایش علمی : مهسا چراغعلی ـ زهرا ساسانی ـ زهره شعربافمقدم]
[مدیر واحد فنی و گرافیک : صغری قربانی] + [نظارت بر تایپ و صفحه‌آرایی : محمد یوسفی]
[صفحه‌آرایی : ساناز عاشقی ـ مریم نایبی ـ فرزانه رجبی] + [اجرا : مهسا هوشیار ـ الناز دارانی ـ لیلا فرجی امین]
[طراح شکل : وحیده معینی ـ ملیکا فدایی] + [کارتونیست : مجید باقرزادگان] + [طراح جلد : منصور سماواتی]
[مدیر چاپ : علی مزرعتی] + [لیتوگرافی، چاپخانه و صحافی : گاج]
[نوبت چاپ : اول (۱۳۹۷)] + [شمارگان : ۳۰۰۰ نسخه]
[دفتر مرکزی : تهران، خیابان انقلاب، بین چهار راه ولیعصر(عج)
و خیابان فلسطین، شماره ۹۱۹] + [تلفن : ۶۴۲۰ - ۰۲۱]
[سرویس پیام کوتاه (SMS): ۱۰۰۰۴۲۵]
[صندوق پستی : ۳۷۷ ـ ۱۳۱۴۵]
[پایگاه اینترنتی : www.gaj.ir]
[قیمت : ۲۰۰۰۰ تومان]

مقدمــــــه مؤلفــــــان

سخن اوّل

سلام بچه‌ها. ورودتون به مقطع متوسطه دوم را تبریک می‌گیم. احتمالا خودتون هم متوجه به تحولاتی در شکل و شمایل درسهای پایه دهم نسبت به نهم شدین! مثلا همین که به جای یه کتاب علوم از این به بعد سه کتاب فیزیک و شیمی و زیست‌شناسی دارین! خوب این مژده را بدیم که در درس ریاضی علاوه بر کتاب ریاضی دهم، فقط یه کتاب دیگه دارین به نام هندسه دهم، نه بیشتر! پس وقتی تعداد کتابهاتون کمی بیشتر شده، حتما لازمه روش مطالعه‌تون هم کمی تغییر کنه، همان‌طور که روش تدریس معلماتون هم کمی متفاوت شده و ... که این‌ها همون تحولاتی هستن که از اول اشاره کردیم. اما این چیزا اصلا جای نگرانی نداره چون به قول معروف: مشکلی نیست که آسان نشود! فقط کافیه قبل از هرکاری چند تا سوال جدی از خودتون بپرسید و پاش وایسید تا راز موفقیت را در جوابهایی که به خودتون میدید کشف کنید: «چرا باید درس بخونیم! و این همه دانش‌ها و آموخته‌هامون، کی و کجا قراره به دردمون بخورن؟» خصوصا سوال همیشگی‌تون: «ریاضیات به این سختی بالاخره به چه دردی میخوره؟!» چون به نظر ما هر دانش‌آموزی که بتونه جواب‌هایی منطقی برای این سوالات اساسی پیدا کنه، دیگه درس خوندن براش سخت نیست!

ویژگی‌های بارز کتاب



در تألیف کتب درسی جدید، به کاربردهای علم در زندگی توجه ویژه‌ای شده، طوری که بر روش بیان و مراحل آموزش مفهومی هم تاثیر گذاشته است. اما متأسفانه اکثر کتاب‌های کمک درسی همچنان دارند با همان روش‌های قدیمی و برخلاف اهداف آموزش مفهومی در کتب درسی جدیدالتألیف پیش می‌روند، یعنی با سؤالات و مثال‌های تکراری بیش از حد و نکته‌های حفظی و کلیشه‌ای، به بمباران ذهن خواننده می‌پردازند. در حالی‌که تحولات کتب درسی جدید همسو با پیشرفت‌های آموزشی جهان بوده و نباید در مقابلش ایستادگی کرد! بنابراین ما هم با توجه به خلأ موجود در کتب کمک درسی فعلی کشور و همچنین الگو برداری از روش های کارآمد کتب خودآموز برتر جهان، بر آن شدیم تا نسل جدیدی از کتابهای کمک درسی را منطبق بر آخرین تغییرات محتوای کتب درسی جدید التالیف و رعایت روابط طولی و عرضی در اختیار شما عزیزان قرار دهیم. این سری کتابها، همان طور که می دانید، در واحد تالیف انتشارات بین المللی گاج، نام «آس» به خود گرفت که مخفف «آموزش ساده» است و تمام قابلیت های نسل های قبلی کتب کمک درسی چه برای مطالعه در منزل و چه برای تمرین در مدرسه، یک‌جا در آن‌ها گنجانده شده است. در سری کتاب‌های آس، سعی بر این بوده تا ضمن مطالعه مطالب درسی، شما بتوانید با کشف کاربردهایشان در زندگی روزمره، لذت یادگیری واقعی و تفکر خلاق را بچشید. کتاب آموزش ساده «هندسه دهم» که اکنون پیش روی شماست، هم از این قاعده مستثنی نیست و مانند کتاب درسی هندسه (۱) ریاضی و فیزیک دارای چهار فصل و در هر فصل دارای تعدادی درس است. در ادامه به توضیح ساختار کتاب برای راهنمایی نحوه استفاده از آن می‌پردازیم.

◆ شیوه بهره‌مندی و استفاده مفید از این کتاب

با توجه به تنوع‌طلبی ذهنی و بصری دانش‌آموزان امروز که ناشی از رشد هوش و افزایش گستره اطلاعات‌شان در عصر ارتباطات می‌باشد، در این کتاب از بخش‌های مختلف خلاق و جذابی برای تفکیک مطالب به کمک گرافیک استفاده شده است. بنابراین یکی دیگر از ویژگی‌های مخصوص کتب آس، بهره‌گیری از این بخش‌های موضوعی ـ گرافیکی متنوع است، از جمله: «ماجرا چیه؟، فکر کن تا کشف کنی، درسنامه، یادت میاد؟، بیشتر بدانیم، کافه سؤال، گزینه چند؟، تمرین دوره‌ای و پیشرفته پایان هر فصل، طنز، معما» و بسیاری موارد دیگر .... که ماهیت کلی و کاربرد هرکدام، هم از روی عنوان آن‌ها مشخص است و هم با چند دقیقه ورق زدن کتاب می‌توانید خودتان آن‌ها را با چشم ببینید. پس دربارهٔ برخی از اصلی‌ترین موارد آنها به ارائه توضیحات کوتاهی می‌پردازیم.

ماجرا چیـــه؟

در بخش «ماجرا چیه؟»، در ابتدای هر فصل با ارائه دیدگاه‌های کلی درباره موضوعات مورد بحث، تلاش شده تا فضای ذهنی دانش‌آموز برای درک مطالب آماده شود.

فکر کن تا کشف کنی

در بخشی با عنوان «فکر کن تا کشف کنی»، با طرح یک نمونه جالب از مسائل چالشی هدفدار و به ظاهر ساده، در سطح دانسته‌های قبلی دانش‌آموز، سعی کرده‌ایم با ترغیب او برای تعقیب موضوع، زمینه را برای یادگیری اکتشافی مطالب درسی، پیشاپیش فراهم نماییم. واضح است حتی دانش‌آموزانی که در ابتدای درس نتوانند به جواب صحیح دست یابند، پس از مطالعه و تسلط بر مفاهیم می‌توانند به عقب برگشته و به‌سادگی از عهده حل چالش پیشین برآیند.

درسنامـــه

در نگارش «درسنامه»ها علاوه بر انطباق با محتوا و اهداف کتاب درسی، سعی شده تا سادگی بیان در عین حفظ جامعیت مطالب، همواره مد نظر قرار گیرد. دانش آموزان با مطالعه مثال‌های متنوع و کاربردی در خلال درسنامه‌های مفهومی و خلاق، معمولا به‌سادگی می‌توانند بر ابعاد مختلف درس مسلط شوند. گاهی درسنامه‌ها متناسب با روند تاریخی کشف مطالب پیش رفته‌اند تا ضمن آشنایی دانش‌آموزان با انگیزه‌ها و ضرورت کشف هر مطلب، ماندگاری مطالب در ذهن‌شان بیشتر شود. گاهی نیز برای جذابیت و تاثیرگذاری بیشتر، از داستان‌هایی ساختگی و طنزآمیز درباره کاشفان مطالب یا در قالب گفتگوی معلم و شاگرد و امثالهم استفاده شده، که هرجا چنین بوده غیر تاریخی بودن ماجرای آن به نوعی بارز شده است.

البته در درسنامه‌ها بخش‌های جزئی‌تری هم داریم. مانند مثال ها، تمرین حین تدریس و ... . ضمنا هرجا که نیاز بوده و حس شده ممکن است دانش‌آموز خسته شود یا به دلایل دیگر، سعی کرده‌ایم تغییری مقطعی در لحن بیان‌مان وارد کنیم، یا یک شوخی کوتاه با خواننده بکنیم و سعی‌مان هم این بوده که این مورد نیز در امتداد درس باشد. از بخش‌های جزیی دیگر درسنامه، می‌توان به «بپا اشتباه نکنی» اشاره کرد که با تأکید بر روی برخی اشتباهات و خطاهای رایج، به هشدار برای پیشگیری از بدفهمی مطالب پیچیده در ذهن دانش‌آموزان می‌پردازد.

بیشتــــر بدانیـــم

بخش‌هایی با عنوان «بیشتر بدانیم» و امثالهم برای بیان مطالب کاربردی فوق برنامه ولی مرتبط با درس آورده شده اند. سعی ما بر این بوده که متن برخی از «بیشتر بدانیم»ها به‌گونه‌ای تنظیم شود که دانش‌آموزان بتوانند از آنها به عنوان یک پروژهٔ تحقیقی نیز استفاده کنند.

کافه سؤال، گزینه چند؟ و تمرین دوره‌ای

در بخش‌های، «کافه سؤال»، «گزینه چند؟»، «تمرین دوره‌ای» و ... همان‌طور که از عنوان آنها معلوم است، سعی‌مان بر این بوده که همهٔ انواع سؤالات در ارتباط با موضوع درس را در سطح استاندارد کتاب درسی و امتحانات تشریحی مدارس و آزمون‌های تستی کنکوری بدون آوردن سوالات تکراری و خسته کننده، پیش روی شما قرار دهیم تا با حل کردن تعداد محدودی مسئله از ساده به دشوار، بتوانید تقریبا بر تمام انواع سؤالات مرتبط با درس مسلط شوید. از این رو تقریبا هیچ دو سوالی به‌طور کامل مشابه هم نیستند، و هر سؤال هم جنبه‌های علمی جدیدی را می‌سنجد.

تلاش کرده‌ایم راه‌حل‌هایی که برای سؤالات آورده‌ایم، منطقی و طبیعی و خلاق باشند، و ضمنا نحوهٔ تفکر بر روی مسائل برای کشف ایده حل را آموزش دهند تا کمکم به مهارت کافی در فنون حل کردن مسئله‌ها برسید. فراموش نکنید که تسلط بر ریاضیات بدون قلم و کاغذ ممکن نیست! پس هر بار که قصد خواندن این کتاب را می‌کنید، همیشه یک مداد یا خودکار و چند کاغذ سفید در کنارتان داشته باشید تا شما نیز مانند ما از حل مسائل لذت کافی ببرید. برای چنین اوقاتی شاید نوشیدن چای یا قهوه نیز در کنار حل مسئله‌های کافه سؤال راهگشا باشد! !

ایستگاه المپیـــاد

گاهی که نیاز به طرح مسائلی جالب و کمی بالاتر از سطح کتاب درسی بوده، آنها را تحت عنوان «ایستگاه المپیاد» جدا کرده‌ایم، بنابراین مسائل مذکور لزوماً المپیادی و پیچیده نیستند، اما تفکر روی آنها هم خالی از لطف نخواهد بود.

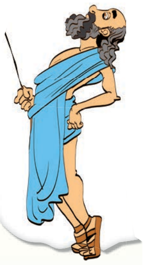
ما سعی کردیم در پاسخنامه‌ها بیشتر به پاسخ‌های خلاقانه توجه کنیم تا به رشد خلاقیت و ایده‌پردازی شما هم کمک کرده باشیم اما این به آن معنا نیست که فقط راه‌حل‌های کتاب ما درست‌اند، بلکه قطعاً روش‌های متفاوتی برای رسیدن به پاسخ هر مسئله وجود دارد و ما مطمئنیم شما می توانید ما را در جریان راه‌های پیشنهادی‌تان یا اشتباهات احتمالی‌مان قرار دهید تا در چاپ‌های بعدی کتاب لحاظ شوند.

ارتباط با ما

هرگونه پیشنهاد و انتقاد و همچنین مشاوره درسی و سؤالات علمی خود را با مؤلفان این کتاب در میان بگذارید، برای این منظور می‌توانید همه روزه از ساعت ۱۶ تا ۱۸ با تلفن ثابت ۶۴۳۴۴۳۶۰-۰۲۱ تماس گرفته و یا با ارسال ایمیل به آدرس Acebook@gaj.ir با مؤلفین این کتاب ارتباط برقرار کنید.

فهرست مطالب

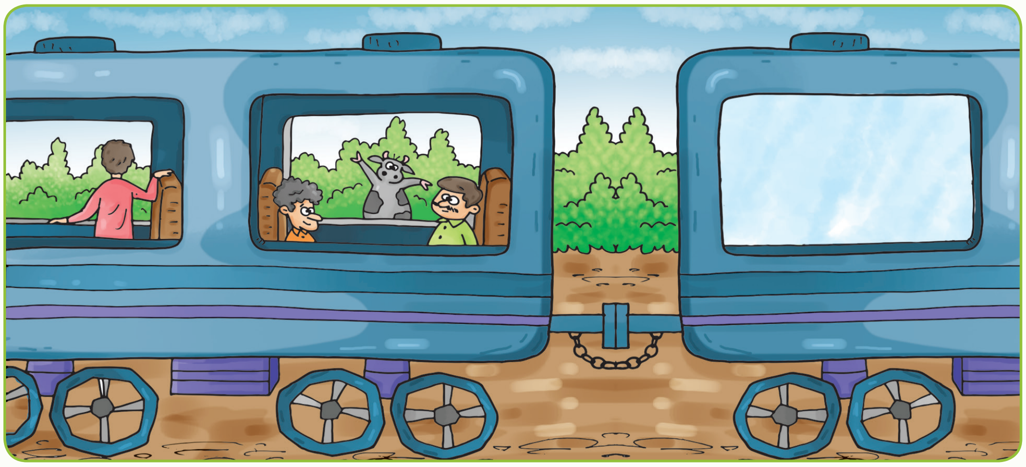
CONTENTS



درس دوم: استدلال

سه نفر در یک کوپه قطار نشسته بودند و از پنجره بیرون را نگاه می‌کردند، یک شاعر، یک فیزیکدان و یک ریاضیدان. قطار وارد یک دشت سرسبز شد که یک گاو در آن در حال چریدن دیده می‌شد. شاعر گفت: «آه، رسیدیم به سرزمین گاوهای سیاه.» فیزیکدان گفت: ولی ما فقط یک گاو سیاه دیده‌ایم و فقط می‌توانیم بگوییم: «آه، رسیدیم به سرزمینی که حداقل یک گاو سیاه در آن وجود دارد.»

ریاضیدان گفت: ولی ما فقط یک طرف آن گاو را دیده‌ایم و فقط می‌توانیم بگوییم: «آه، رسیدیم به سرزمینی که حداقل یک طرف یک گاو آن سیاه است.»



در مبحث ریاضیات اثبات باید مستحکم باشد، باید به‌گونه‌ای باشد که نتوانند بر آن ایراد بگیرند.

هنگامی‌که استدلال می‌کنیم همانند آن است که ساختمانی چند طبقه می‌سازیم، همان‌طور که اگر پایه‌های ساختمان محکم نباشد، ساختمان فرو می‌آید اگر پایه‌ها و مراحل استدلال هم محکم نباشند، استدلال از هم می‌پاشد.

در هر مبحث ریاضیات، معمولاً تعدادی مطلب پذیرفته شده به‌عنوان اصول اولیه وجود دارد و بقیه ریاضیات با استفاده از آن‌ها ساخته می‌شود. برخی از نتایج مهم نیز که در استدلال‌های بعدی کار را ساده‌تر می‌کنند را هم قضیه می‌نامند. به معنی چیزی که به آن دست یافته‌ایم.

حال به‌عنوان نمونه چند قضیه را مطرح می‌کنیم، شما سعی کنید همانند یک منتقد بر استدلال‌های موجود در آن‌ها ایراد بگیرید و اگر ضعفی در اثبات دیدید در صورت امکان سعی کنید آن‌را محکم کنید.

در آن صورت خواهید فهمید معنی این‌که «یک اثبات باید مستحکم باشد» چیست؟

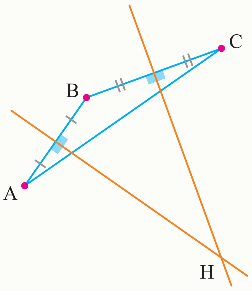
همرسی عمودمنصف‌ها

قضیه عمودمنصف‌های اضلاع یک مثلث در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند و به‌عبارت دیگر همرسند.

اثبات: فرض کنید A، B و C رئوس یک مثلث باشند و عمودمنصف‌های دو ضلع AB و BC همدیگر را در نقطهٔ H قطع کنند حال بنابر ویژگی اساسی عمودمنصف، دو عبارت زیر درست هستند:

الف) چون H روی عمودمنصف AB قرار دارد پس: $HA = HB$

ب) چون H روی عمودمنصف BC قرار دارد پس: $HB = HC$



از دو عبارت فوق نتیجه می‌شود $HA = HC$ و بنابر ویژگی اساسی عمودمنصف، H روی عمودمنصف AC نیز قرار دارد، یعنی عمودمنصف ضلع AC هم از محل تقاطع عمودمنصف‌های ضلع‌های AB و BC عبور می‌کند و این همان نتیجه‌ای است که می‌خواستیم.

آس

۱

ردیف	تـــــمــــــریـــــــن دوره‌ای
۱.	دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۶ سانتی‌متر از یکدیگر قرار دارند. چند مثلث مانند $\overset{\Delta}{ABC}$ می‌توان رسم کرد که $AC = 4$ و $BC = 8$ باشند؟ ۱) بی‌شمار ۲) هیچ ۳) یک ۴) دو
۲.	دو نقطهٔ B و C به فاصلهٔ ۵ واحد از یکدیگر ثابت شده‌اند. چند مثلث متساوی‌الساقین به رأس A $(AB = AC)$ وجود دارد که ساقی برابر با ۲ واحد داشته باشد؟ ۱) بی‌شمار ۲) هیچ ۳) یک ۴) دو
۳.	دو نقطهٔ B و C در فاصلهٔ $\sqrt{13}$ سانتی‌متر یکدیگر قرار دارند. چند مثلث مانند $\overset{\Delta}{ABC}$ داریم که ارتفاع و نیمساز گذرا از A در آن‌ها بر هم منطبق باشد؟ ۱) بی‌شمار ۲) هیچ ۳) یک ۴) دو
۴.	پاره‌خط AB به اندازهٔ ۶ سانتی‌متر را در نظر بگیرید. اگر محل برخورد عمودمنصف AB با خود پاره‌خط AB را M بنامیم و به مرکز M و به شعاع ۴ سانتی‌متر دایره‌ای رسم کنیم که عمود منصف AB را در نقاط C و D قطع کند، چهارضلعی CADB کدام‌یک از ویژگی‌های زیر را **ندارد**؟ ۱) قطرهای این چهارضلعی بر هم عمودند. ۲) این چهارضلعی لوزی‌ای است به مساحت ۲۴. ۳) در این چهارضلعی قطرها بر هم عمود و برابرند. ۴) در این چهارضلعی ضلع‌های روبه‌رو با هم موازی‌اند.
۵.	نقطهٔ M خارج خط d و به فاصلهٔ x از این خط مفروض است. برای آن‌که مطمئن باشیم حتماً دو نقطه روی خط d وجود دارد که فاصلهٔ آن از نقطهٔ M برابر y است، کدام رابطه باید بین x و y برقرار باشد؟ ۱) $x = y$ ۲) $x > y$ ۳) $x < y$ ۴) $x \le y$
۶.	سه نقطهٔ غیرواقع بر یک خط را در صفحه در نظر بگیرید. چند دایره می‌توان رسم کرد به‌طوری که این سه نقطه واقع بر محیط آن دایره باشند؟ ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۰
۷.	مربعی به ضلع ۴ مفروض است. چند نقطه روی محیط این مربع وجود دارد که فاصلهٔ آن از مرکز مربع ۲/۱ باشد؟ ۱) ۰ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶
۸.	چند لوزی وجود دارد که یکی از قطرهای آن برابر ۹ سانتی‌متر و ضلع آن ۴ سانتی‌متر باشد؟ ۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار
۹.	در صفحه یک مثلث چند نقطه می‌توان یافت که از سه ضلع مثلث یا امتداد آن‌ها به یک فاصله باشد؟ ۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۴
۱۰.	اندازهٔ دو ضلع از مثلثی ۴ و ۷ واحد است. ضلع سوم کدام گزینه می‌تواند باشد تا مثلث قابل رسم شود؟ ۱) ۲ ۲) ۸ ۳) ۳ ۴) ۱۱
۱۱.	خط d به فاصلهٔ ۶ سانتی‌متر از مرکز دایره‌ای به شعاع ۱۰ قرار دارد. چند نقطه روی این دایره وجود دارد که از خط d به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر باشد؟ ۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۳
۱۲.	اگر در مثلث ABC داشته باشیم $\hat{B} = 98^\circ$، محل تلاقی سه ارتفاع مثلث در کجا خواهد بود؟ ۱) روی یکی از اضلاع ۲) روی یکی از رأس‌ها ۳) درون مثلث ۴) خارج از مثلث
۱۳.	فاصلهٔ خط d از مرکز دایره‌ای که شعاع آن ۵ است، برابر ۶ می‌باشد، چند نقطه روی دایره می‌توان یافت که از خط d به فاصلهٔ ۱ سانتی‌متر باشد؟ ۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳
۱۴.	مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع در صفحه به یک فاصله هستند، کدام است؟ ۱) یک نقطه ۲) دو خط عمود بر هم ۳) دو خط موازی ۴) یک خط

کـــافه ســؤال

۱ اگر $\frac{a}{۳}=\frac{b}{۴}=\frac{c}{۵}=\frac{۱}{۳}$، آن‌گاه مقدار $۲a+۳b+۴c$ را به‌دست آورید.

۲ اگر $\frac{a}{b}=\frac{۴}{۳}$، حاصل عبارت‌های زیر را بیابید. کدام عبارت با یک عدد برابر نمی‌شود؟

الف) $\frac{a-۴}{b-۳}$ ب) $\frac{۳a+۱۲}{۴b+۱۲}$ ج) $\frac{۲a-۴}{۲b-۳}$ د) $\frac{a+۳}{b+۴}$

۳ اگر $\frac{a}{b}=\frac{۱}{۲}$، آن‌گاه حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

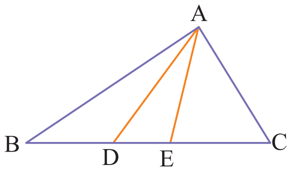
الف) $\frac{a+۲b}{۲a+b}$ ب) $\frac{a+b}{۲a+۲b}$ ج) $\frac{a-۳b}{a+۳b}$ د) $\frac{b}{a+b}$

۴ اگر $\frac{a-b}{a+b}=\frac{۲}{۳}$، آن‌گاه مقدار $\frac{a}{b}$ را بیابید.

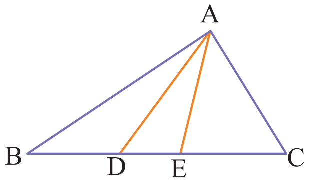
۵ اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=۲$، آن‌گاه مقدار عبارت‌های مقابل را بیابید.

الف) $\frac{a+c}{b+d}$ ب) $\frac{ac}{bd-۲ac}$

۶ اگر در مثلث مقابل $\frac{S_{\overset{\triangle}{ABD}}}{S_{\overset{\triangle}{ADE}}}=\frac{۲}{۳}$ ، $\frac{S_{\overset{\triangle}{ADE}}}{S_{\overset{\triangle}{AEC}}}=\frac{۱}{۴}$ و $S_{\overset{\triangle}{ABC}}=۲$. مساحت مثلث‌های AEC و ADE و ABD را به‌دست آورید.



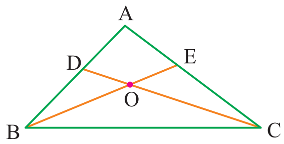
۷ اگر در مثلث مقابل $\frac{S_{\overset{\triangle}{ABD}}}{S_{\overset{\triangle}{AEC}}}=\frac{۱}{۴}$ و $\frac{S_{\overset{\triangle}{ABE}}}{S_{\overset{\triangle}{ADC}}}=\frac{۲}{۳}$ باشد، آن‌گاه نسبت $\frac{BD}{DE}$ چقدر است؟



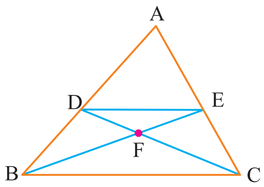
۸ اگر طول ضلع‌های یک مثلث ۵ و ۶ و ۷ باشد و $h_۱$ و $h_۲$ و $h_۳$ به ترتیب عمودهای وارد بر این ضلع‌ها باشند، حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\frac{h_۱}{h_۲}+\frac{h_۲}{h_۳}+\frac{h_۳}{h_۱}$$

۹ آیا می‌توان در شکل مقابل نسبت‌های $\frac{AD}{BD}$ و $\frac{AE}{EC}$ را به‌گونه‌ای تعیین کرد که مساحت چهار ناحیهٔ ایجاد شده برابر باشد؟



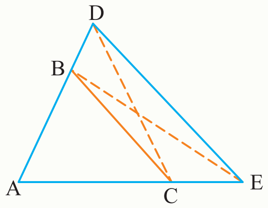
۱۰ در شکل مقابل مساحت کدام مثلث‌ها برابرند؟ $(DE \parallel BC)$



درس دوم: قضیهٔ تالس

معرفی و اثبات قضیهٔ تالس

تالس گفت حال می‌خواهم قضیهٔ خودم را ثابت کنم.

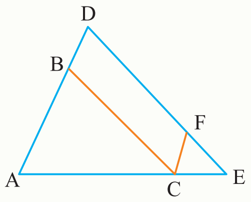


در شکل مقابل BC با DE موازی است. دو مثلث CDE و BDE قاعدهٔ مشترک دارند و چون BC و DE موازی‌اند، مساحت این دو مثلث برابر است. اگر این مثلث‌ها را از مثلث ADE کم کنیم، شکل‌های حاصل هم مساحت خواهند بود، پس مساحت دو مثلث ACD و ABE برابر است. حال می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{ABE}}}=\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{ACD}}} \qquad (*)$$

چون دو مثلث ABC و ABE ارتفاع یکسان دارند نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با $\frac{AC}{AE}$ و چون دو مثلث ABC و ACD ارتفاع یکسان دارند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با $\frac{AB}{AD}$ و بنابر (*) معلوم می‌شود که:

$$\frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AD} \qquad (۱)$$



یکی از شاگردان گفت: ادعا کرده بودید که $\frac{BC}{DE}$ هم با کسرهای فوق برابر است، آیا روش مشابهی برای اثبات آن یافته‌اید؟

تالس گفت: آری، اگر در مثلث فوق از نقطهٔ C خطی موازی AD رسم کنیم تا DE را در F قطع کند، آن‌گاه اوّلاً چون BCFD متوازی‌الاضلاع است، $BC = DF$ و ثانیاً با توجّه به نتیجه‌ای که در بند قبل به‌دست آوردیم می‌توانیم بگوییم $\frac{EF}{ED}=\frac{CE}{AE}$. حال به شکل زیر به سمت نتیجهٔ مورد نظر حرکت می‌کنیم:

$$\frac{CE}{AE}=\frac{EF}{ED}\Rightarrow ۱-\frac{CE}{AE}=۱-\frac{EF}{ED}\Rightarrow\frac{AE-CE}{AE}=\frac{ED-EF}{ED}\Rightarrow\frac{AC}{AE}=\frac{DF}{DE}\Rightarrow\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE} \qquad (۲)$$

حال با توجه به (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}$$

یکی از شاگردان گفت: استاد، اثباتی بود بسیار زیبا و می‌شد چهره‌ای از عقلانیت را در آن دید.

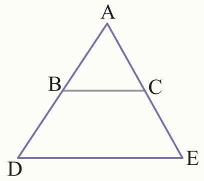
استاد گفت: برای خود من، اثبات چیز عجیبی است، همانند یک خیاط که سوزن و نخ و قیچی و متر را می‌آورد و نشانه‌هایی بر پارچه می‌گذارد و خطوطی رسم می‌کند و برش‌هایی می‌دهد و ... تا این‌که لباس را آماده می‌کند و همهٔ آن وسیله‌ها را به جای اول برمی‌گرداند و کسی که لباس را می‌پوشد چیزی از برش و متر و ... بر لباس نمی‌بیند.

یکی دیگر گفت: استاد، برگردیم به آغاز بحث، سایه‌ها. با این بحثی که شما انجام دادید، راز سایه‌ها کاملاً بر من معلوم شد. ممنونم.

استاد گفت: چگونه است که برای خود من این‌گونه نیست و هنوز مفهوم سایه برای من همان‌قدر رازآلود است، که در گذشته بود. آیا اگر من قد تو را بدانم راز وجود تو بر من معلوم می‌گردد؟

این مهم است که وقتی چیزی را دانستیم، سعی کنیم دقیقاً درک کنیم که چه چیزی را دانسته‌ایم.

تالس درس را چنین ادامه داد:

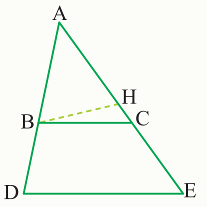


دوست دارم یک نتیجهٔ دیگر را هم به‌دست آورم؛ اگر در مثلث مقابل BC موازی DE باشد آن‌گاه $\frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AD}$ و در ادامه می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}\Rightarrow\frac{AD-AB}{AB}=\frac{AE-AC}{AC}\Rightarrow\frac{BD}{AB}=\frac{CE}{AC}$$

و یا به‌عبارت دیگر $\frac{AC}{CE}=\frac{AB}{BD}$.

یکی از شاگردان پرسید: استاد، آیا عکس قضیهٔ شما هم درست است؟ به‌عبارت بهتر آیا اگر در مثلث زیر $\frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AD}$، آن‌گاه BC موازی DE است؟



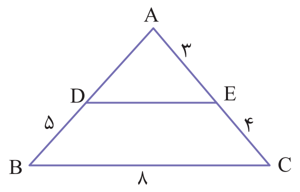
تالس پس از قدری تفکّر گفت: بله، بله همین‌طور است.

از نقطهٔ B خطی موازی DE رسم می‌کنیم، اگر این خط AE رادر نقطه‌ای مثل H قطع کند، آن‌گاه بنابر قضیهٔ خودم $\frac{AH}{AE}=\frac{AB}{AD}$ و بنابر فرض شما $\frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AD}$ و در نتیجه $\frac{AH}{AE}=\frac{AC}{AE}$ و در نتیجه $AC=AH$ و در نتیجه $C=H$.

در این‌جا تالس از جای خود برخاست و به خانهٔ خود واقع در خیابان بلوتوس، کوچهٔ کومولوس رفت.

مثال‌های آموزشی

۱) در شکل مقابل DE||BC ؛ با توجّه به اندازهٔ پاره‌خط‌ها، طول‌های DE و AD را بیابید.

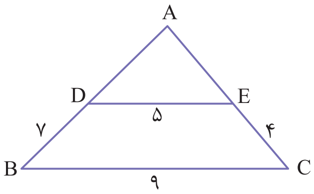


پاسخ

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{EC}\Rightarrow\frac{AD}{۵}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow AD=\frac{۱۵}{۴}$$

$$\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AC}\Rightarrow\frac{DE}{۸}=\frac{۳}{۳+۴}\Rightarrow DE=\frac{۲۴}{۷}$$

۲) در شکل زیر DE|| BC ، با توجّه به اندازهٔ پاره‌خط‌ها، طول‌های AE و AD را بیابید.



پاسخ طول AD را a و طول AE را b می‌نامیم:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}\Rightarrow\frac{a}{a+۷}=\frac{۵}{۹}\Rightarrow ۹a=۵a+۳۵\Rightarrow a=\frac{۳۵}{۴}$$

$$\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}\Rightarrow\frac{b}{b+۴}=\frac{۵}{۹}\Rightarrow ۹b=۵b+۲۰\Rightarrow b=۵$$

مثال‌های آموزشی

۱) **طول ضلع‌های یک مثلث ۵، ۱۰ و ۱۲ سانتی‌متر و محیط مثلثی متشابه با آن برابر ۱۸ سانتی‌متر است. طول ضلع‌های مثلث دوم را به‌دست آورید.**

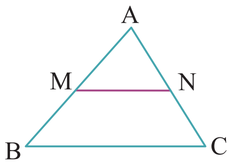
پاسخ محیط مثلث اوّل $۵+۱۰+۱۲$ یعنی ۲۷ است و نسبت محیط‌ها برابر نسبت تشابه است، اگر ضلع‌های مثلث دوم را a، b و c فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{a}{۵}=\frac{b}{۱۰}=\frac{c}{۱۲}=\frac{۱۸}{۲۷}=\frac{۲}{۳}$$

و در نتیجه داریم:

$$a=۵\times\frac{۲}{۳}=\frac{۱۰}{۳}\qquad b=۱۰\times\frac{۲}{۳}=\frac{۲۰}{۳}\qquad c=۱۲\times\frac{۲}{۳}=۸$$

۲) **در شکل روبه‌رو $MN \parallel BC$ است و مساحت ذوزنقهٔ MNCB دو برابر مساحت مثلث AMN است. نسبت $\frac{BM}{AM}$ را به‌دست آورید.**



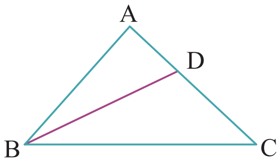
پاسخ

$$S_{MNCB}=۲S_{\overset{\Delta}{AMN}} \Rightarrow S_{MNCB}+S_{\overset{\Delta}{AMN}}=۳S_{\overset{\Delta}{AMN}} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}}=۳S_{\overset{\Delta}{AMN}}$$

اگر نسبت تشابه مثلث‌های ABC و AMN را k فرض کنیم از رابطهٔ فوق معلوم می‌شود که $k^۲=۳$ یعنی $k=\sqrt{۳}$ و در نتیجه $\frac{AB}{AM}=\sqrt{۳}$، مسأله از ما $\frac{BM}{AM}$ را می‌خواهد.

$$\frac{AM+BM}{AM}=\sqrt{۳} \Rightarrow ۱+\frac{BM}{AM}=\sqrt{۳} \Rightarrow \frac{BM}{AM}=\sqrt{۳}-۱$$

۳) **در مثلث ABC، $AB=۵$ و $BC=۶$ و $AC=۷$ است. طول دو قطعه‌ای را که نیمساز زاویهٔ B روی ضلع مقابل به آن ایجاد می‌کند، به‌دست آورید.**



پاسخ روش اول:

$$\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}=\frac{۵}{۶}$$

باید پاره‌خطی به طول ۷ را با نسبت‌های ۵ و ۶ تقسیم کنیم، معلوم است که طول یکی می‌شود $۷\times\frac{۵}{۵+۶}$ و طول دیگری می‌شود $۷\times\frac{۶}{۵+۶}$، یعنی $AD=\frac{۵}{۱۱}\times۷$ و $DC=\frac{۶}{۱۱}\times۷$؛ زیرا برای ذهن روشن است که اگر قرار باشد c را با نسبت a و b بین دو نفر تقسیم کنیم، سهم اوّلی $\frac{a}{a+b}$ برابر c و سهم دوّمی $\frac{b}{a+b}$ برابر c خواهد بود.

روش دوّم: می‌توانیم همهٔ مسیر را با محاسبه پیش برویم:

$$\frac{AD}{DC}=\frac{۵}{۶}$$

$$AD+DC=۷$$

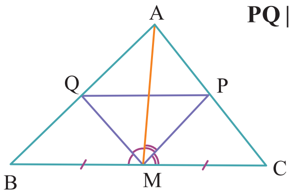
از معادلهٔ اوّل معلوم می‌شود که $AD=\frac{۵}{۶}DC$ و با جای‌گذاری این رابطه در معادلهٔ دوّم داریم:

$$\frac{۵}{۶}DC+DC=۷ \Rightarrow \frac{۱۱}{۵}DC=۷ \Rightarrow DC=\frac{۵}{۱۱}\times۷$$

و حال از $AD+DC=۷$ داریم:

$$AD+\frac{۵}{۱۱}\times۷=۷ \Rightarrow AD=۷-\frac{۵}{۱۱}\times۷=\left(۱-\frac{۵}{۱۱}\right)\times۷=\frac{۶}{۱۱}\times۷$$

۴) **در مثلث ABC، M وسط BC است و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند، ثابت کنید: $PQ \parallel BC$**



پاسخ باتوجه به این‌که MQ نیمسازی از مثلث ABM است داریم:

$$\frac{AM}{BM}=\frac{AQ}{BQ}$$

و باتوجه به این‌که MP نیمسازی از مثلث ACM است داریم:

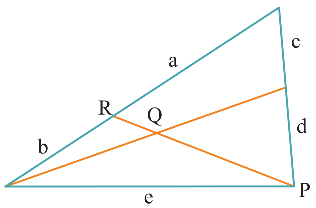
$$\frac{AM}{CM}=\frac{AP}{PC}$$

حال چون $BM=CM$ نتیجه می‌شود $\frac{AM}{CM}=\frac{AM}{BM}$ و در نتیجه $\frac{AP}{PC}=\frac{AQ}{BQ}$ و در نتیجه بنابر عکس قضیهٔ تالس $PQ \parallel BC$

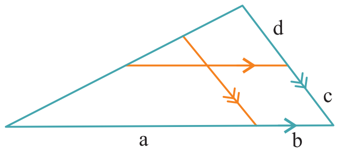
ایستگاه المپیاد

۱) مساحت مثلثی که طول اضلاع آن a ، b و c است را به‌دست آورید.

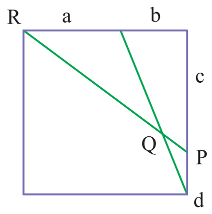
۲) در مثلث روبه‌رو نسبت $\frac{PQ}{QR}$ را بیابید.



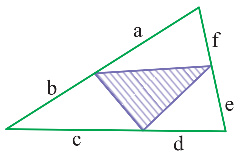
۳) در شکل مقابل نسبت مساحت هر کدام از ناحیه‌ها به مساحت مثلث را به‌دست آورید.



۴) در مربع روبه‌رو نسبت $\frac{PQ}{QR}$ را بیابید.



۵) در شکل مقابل مساحت قسمت هاشور زده چه نسبتی از مساحت مثلث را تشکیل می‌دهد؟



یادداشت

کافه سؤال

* درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را تعیین کنید و هر کدام راکه نادرست می‌دانید، با یک مثال نادرستی آن را نشان دهید.

۱ اگر صفحهٔ P با صفحهٔ Q موازی باشد و صفحهٔ Q با صفحهٔ R موازی باشد، آن‌گاه صفحهٔ P با صفحهٔ R موازی است.

۲ اگر صفحهٔ P بر هر دو صفحهٔ متمایز Q و R عمود باشد لزوماً دو صفحهٔ Q و R موازی نیستند.

۳ اگر صفحهٔ R بر فصل مشترک دو صفحهٔ P و Q عمود باشد آن‌گاه بر هر دو صفحهٔ P و Q عمود است.

۴ حداکثر ۳ خط در فضا می‌توان یافت که دو به دو بر هم عمود باشند.

۵ حداکثر ۳ صفحه در فضا می‌توان یافت که دو به دو بر هم عمود باشند.

۶ اگر یک خط از یک صفحه بر صفحه دیگر عمود باشد آن‌گاه آن دو صفحه بر هم عمودند.

۷ اگر خط L بر صفحهٔ P عمود باشد آن‌گاه هر صفحه شامل خط L بر صفحهٔ P عمود است.

۸ برای هر دو خط متمایز دقیقاً یک صفحه وجود دارد که شامل آن دو خط باشد.

۹ اگر یک صفحه بر دو خط عمود باشد آن دو خط موازی‌اند.

۱۰ اگر دو خط L و L' متنافر باشند، آنگاه دقیقاً یک خط وجود دارد که بر هر دو عمود است.