

## معادله درجه اول و حل آن

● **معادله درجه اول و حل آن:** معادله‌ای است که بعد از ساده‌شدن، فقط در آن، چند عدد و متغیری مثل  $x^1$  مشاهده کنیم؛ یعنی مثلاً اگر معادله‌ای شامل  $\frac{1}{x}$  یا  $\sqrt{x}$  یا  $x^{\frac{1}{2}}$  یا  $x^2$  یا  $x^3$  بود، درجه اول نیست. برای حل معادله درجه اول، متغیرها را به یک طرف و عددها را به طرف دیگر تساوی می‌بریم، سپس دو طرف را تا حد امکان ساده کرده و عدد معلوم را بر ضریب مجهول تقسیم می‌کنیم.

**مثال:**

$$(x-1)(x+5) = x^2 - 8x + 12 \xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{پرانترها را}} x^2 + 5x - x - 5 = x^2 - 8x + 12$$

$$\xrightarrow[\text{عددها سمت راست}]{\text{Xها سمت چپ}} x^2 + 5x - x - x^2 + 8x = 12 + 5 \Rightarrow 12x = 17 \Rightarrow x = \frac{17}{12}$$

**نکته:** اگر در معادله درجه اول، یک یا چند کسر مشاهده کردیم تمام جملات را در ک.م.م.م.م.م.م. ضرب می‌کنیم تا مخرج‌ها از بین بروند. البته می‌توان از مخرج مشترک‌گیری هم استفاده کرد ولی روش اول، معمولاً سریع‌تر و راحت‌تر است.

$$\frac{x}{3} - \frac{x+4}{2} = 5 \xrightarrow{\times 6 \text{ تمام جملات}} 6\left(\frac{x}{3}\right) - 6\left(\frac{x+4}{2}\right) = 6 \times 5$$

**مثال:**

$$\Rightarrow 2x - 3(x+4) = 30 \Rightarrow 2x - 3x - 12 = 30 \Rightarrow -x = 42 \Rightarrow x = -42$$

به این علت تمام جملات را در ۶ ضرب کردیم که ۶ هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش‌پذیر است. البته می‌توانستیم به جای ۶، تمام جملات را در ۱۲، ۱۸، ۲۴ و ... هم ضرب کنیم ولی ۶ چون از بقیه کوچک‌تر است، ک.م.م. نام دارد و موجب حل سریع‌تر و راحت‌تر معادله می‌شود.

**تست:** مقدار معکوس جواب معادله  $\frac{2x-3}{5} + \frac{x+1}{3} = \frac{3}{2}$  کدام است؟

$$\frac{22}{53} \quad (4) \qquad \frac{53}{22} \quad (3) \qquad \frac{27}{11} \quad (2) \qquad \frac{11}{27} \quad (1)$$

**پاسخ:**

● **کاربرد معادله درجه اول در مسائل توصیفی:** بعضی اوقات معادله درجه اول به طور مستقیم داده نمی‌شود بلکه با مسأله‌ای مواجه می‌شویم که می‌توانیم برای یافتن مجهولش، یک معادله درجه اول تشکیل دهیم. با حل این معادله، مجهول مسأله به دست می‌آید. فقط در این گونه سؤالات، به شرطی که در صورت سؤال ذکر می‌شود دقت کنید، مثلاً اگر گفته شود مجهول، عدد طبیعی است نباید جواب‌هایی مثل  $\frac{2}{6}$  یا  $-\frac{1}{3}$  یا  $\sqrt{5}$  را قبول کنیم. زیرا می‌دانیم که:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

**مثال:** عددی را بیابید که ۳ برابر آن، منهای نصف آن، برابر با ثلث آن، به اضافه ۸ باشد؟

**حل:** مجهول مسأله یک عدد حقیقی است (زیرا هیچ شرطی برای عدد ذکر نشده) لذا آن را  $x$  فرض می‌کنیم. ضمناً ۳ برابر  $x$  می‌شود  $3x$ ، نصف  $x$  می‌شود  $\frac{x}{2}$  و ثلث  $x$  می‌شود  $\frac{x}{3}$ ، لذا:

$$3x - \frac{x}{2} = \frac{x}{3} + 8 \xrightarrow{\times 6 \text{ جملات}} 18x - 3x = 2x + 48 \Rightarrow 13x = 48 \Rightarrow x = \frac{48}{13}$$

**تست حل‌شده:** طول مستطیلی ۴ برابر عرض آن است. اگر محیط آن ۶۰ متر باشد، مساحت این مستطیل چقدر است؟

$$200 \quad (4) \qquad 144 \quad (3) \qquad 124 \quad (2) \qquad 88 \quad (1)$$



$$x = 4y$$

**پاسخ:** اگر طول و عرض مستطیل را به ترتیب  $X$  و  $Y$  بنامیم طبق فرض مسأله داریم:

$$\text{محیط مستطیل} = 60 \Rightarrow (x+y) \times 2 = 60 \xrightarrow{\substack{\text{به جای } x \text{ مقدار} \\ 4y \text{ را می گذاریم}}} (4y+y) \times 2 = 60$$

$$\Rightarrow 10y = 60 \Rightarrow y = \frac{60}{10} = 6, \quad x = 4y = 4 \times 6 = 24$$

گزینه (۳) درست است.  $\Rightarrow$  (متر مربع)  $x \cdot y = 24 \times 6 = 144$

**تست:** در یک کفه ترازو ۴ کالای هم وزن قرار می دهیم. در کفه دیگر، یک وزنه ۱۰ کیلویی می گذاریم. ملاحظه می کنیم که کفه ۱۰ کیلویی پایین می رود. یک وزنه ۳ کیلویی را در کنار آن ۴ کالا قرار می دهیم تا تعادل برقرار شود. وزن هر یک از آن ۴ کالا چند کیلوگرم است؟

$$\frac{7}{3} \text{ (۴)} \qquad \frac{3}{7} \text{ (۳)} \qquad \frac{4}{7} \text{ (۲)} \qquad \frac{7}{4} \text{ (۱)}$$

**پاسخ:**

**تست:** اگر به ۷ برابر عددی ۱ واحد اضافه شود و از نصف حاصل، همان عدد کم شود باقی مانده ۱۰ می شود. مربع آن عدد کدام است؟

$$\frac{19}{7} \text{ (۴)} \qquad \frac{19}{5} \text{ (۳)} \qquad \frac{13}{5} \text{ (۲)} \qquad \frac{13}{7} \text{ (۱)}$$

**پاسخ:**

**نکته:** فرض کنید معادله  $\frac{x}{2} - \frac{x-3}{5} = 4$  به ما داده شود و بگویید ریشه این معادله، عدد  $\frac{34}{3}$  است. از این جمله نتیجه می گیریم که اگر در معادله به جای  $x$  عدد  $\frac{34}{3}$  را قرار دهیم، دو طرف معادله با هم مساوی می شوند؛ یعنی به تساوی درست  $4 = 4$  می رسیم. پس می توان گفت عدد  $\frac{34}{3}$  در معادله بالا صدق می کند (صادق است). به طور کلی می توان گفت در هر معادله درجه اول، ریشه معادله در خود آن معادله صدق می کند. پس هرگاه جواب یک معادله درجه اول داده شد آن را به جای متغیر اصلی قرار می دهیم.

**تست حل شده:** اگر  $x = 1$  ریشه معادله  $5x + 3k = -16$  باشد، ریشه معادله  $5x + 7x^2 + 1 - kx(x-2) = 0$  کدام است؟

$$\frac{3}{8} \text{ (۴)} \qquad \frac{2}{9} \text{ (۳)} \qquad \frac{-1}{19} \text{ (۲)} \qquad \frac{1}{19} \text{ (۱)}$$

**پاسخ:**

$$5x + 3k = -16 \xrightarrow{\substack{\text{به جای } x \text{ عدد } 1 \\ \text{را قرار می دهیم}}} 5(1) + 3k = -16 \Rightarrow 3k = -21 \Rightarrow k = -7$$

$$-kx(x-2) = 5x + 7x^2 + 1 \xrightarrow{\substack{\text{به جای } k \text{ عدد} \\ -7 \text{ قرار می دهیم}}} 7x(x-2) = 5x + 7x^2 + 1$$

$$\Rightarrow 7x^2 - 14x = 5x + 7x^2 + 1 \Rightarrow -14x - 5x = 1 \Rightarrow -19x = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{19} \Rightarrow \text{گزینه (۲) درست است}$$

**تست:** اگر جواب معادله  $\frac{1-m}{10} = \frac{2x}{5} - \frac{1}{2}$  برابر ۲ باشد، مقدار  $|m-1|$  کدام است؟

$$-3 \text{ (۴)} \qquad 3 \text{ (۳)} \qquad -2 \text{ (۲)} \qquad 2 \text{ (۱)}$$

**پاسخ:**



## سوالات چهار گزینهای

۱- معادله  $(1-x+x^2)(x+1) = x(x^2-1)$  چند ریشه دارد؟

- (۱) هیچ (۲) یک (۳) دو (۴) سه

۲- حاصل ضرب عدد  $x$  در ۱۴ به اندازه ۸۴ واحد از حاصل ضرب عدد  $x$  در ۱۷ کم تر است.  $x$  کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۲۶ (۳) ۲۸ (۴) ۳۰

۳- تفاضل عددی از ۲۵، ثلث مجموع همان عدد با ۳۵ است. آن عدد کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲

۴- مجموع ارقام یک عدد دو رقمی ۱۲ و تفاضل ارقام آن ۴ است. حاصل ضرب ارقام این عدد کدام است؟

- (۱) ۲۷ (۲) ۳۲ (۳) ۳۵ (۴) ۳۶

۵- اگر ریشه معادله  $3x - 2 = 5(10x - 28)$  را  $\alpha$  و ریشه معادله  $\frac{x}{4} = \frac{x-5}{2} - \frac{2x+1}{3}$  را  $\beta$  بنامیم، حاصل  $\frac{\beta}{\alpha}$  کدام است؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۳۴ (۴) ۵۴

۶- در یک کارخانه، حقوق یک مهندس ۴ برابر یک کارگر و  $\frac{2}{5}$  مدیر بخش خود است. قسمت تولید این کارخانه، ۵ مدیر بخش، ۸ مهندس و ۱۲ کارگر دارد. اگر برای این قسمت، ماهانه ۹۴ میلیون تومان پرداخت شود، حقوق یک کارگر در ماه چقدر است؟

- (۱)  $\frac{1}{5}$  میلیون تومان (۲) ۱ میلیون تومان (۳) ۲ میلیون تومان (۴)  $\frac{2}{5}$  میلیون تومان

۷- شخصی به گروهی برخورد می کند. او از یکی از افراد این گروه می پرسد: تعداد شما چند نفر است؟ فرد پاسخ دهنده این طور جواب می دهد که «ما و ما و نصف ما و نصفه ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی، جملگی صد می شویم». با این توضیحات، تعداد افراد گروه کدام است؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۳۰ (۳) ۳۶ (۴) ۴۸

۸- محیط یک مستطیل ۸۲ واحد است. اگر از طول آن ۷ واحد کم کنیم، باقی مانده یک مربع می شود. ضلع کوچک تر این مستطیل کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۷ (۳) ۱۸ (۴) ۱۹

۹-  $\frac{2}{3}$  عددی برابر  $\frac{3}{4}$  عددی دیگر است. اگر مجموع این دو عدد ۱۳۶ باشد، عدد کوچک تر کدام است؟

- (۱) ۷۲ (۲) ۶۰ (۳) ۶۴ (۴) ۴۰

۱۰- ۵ سال دیگر، مجموع سن رضا و مجید برابر ۳۰ خواهد شد. اگر سال گذشته، سن رضا ۲ برابر سن مجید بوده باشد، سن فعلی مجید کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰




---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## معادله درجه دوم و کاربرد آن

● **حل معادله درجه دوم:** تمام معادلات  $ax^2 + bx + c = 0$ ،  $3x^2 + 8 = 0$ ،  $x^2 + x = 0$  و مشابه آن‌ها معادله درجه دوم نام دارند. می‌بینید که همه آن‌ها دارای  $x^2$  هستند و در حالت کلی به شکل  $ax^2 + bx + c = 0$  می‌باشند که  $a$  ضریب  $x^2$ ،  $b$  ضریب  $x$  و  $c$  عدد ثابت نام دارد. توجه کنید که  $b$  و  $c$  می‌توانند صفر هم باشند، ولی  $a$  هیچ‌گاه صفر نیست. برای حل این‌گونه معادلات، روش‌های مختلفی وجود دارد که عبارتند از: ۱- روش تجزیه ۲- روش ریشه‌گیری (جذرگیری) ۳- روش مربع کامل کردن ۴- روش گلی (دلتا)

① **روش تجزیه:** در این روش از تمام روش‌های تجزیه که در فصل اول کتاب یاد گرفته‌اید باید استفاده کنید تا معادله به شکل  $\square \times \square = 0$  تبدیل شود. سپس یک‌بار  $\square$  را مساوی صفر قرار می‌دهیم و بار دیگر  $\square$  را به عنوان مثال، معادلات زیر را به روش تجزیه حل می‌کنیم:

$$\text{مثال ۱} \quad 10x^2 = 8x \Rightarrow 10x^2 - 8x = 0 \Rightarrow 2x(5x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 5x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{5} \end{cases}$$

فاکتور از  $2x$

$$\text{مثال ۲} \quad (x-1)(2x-7) = 3x(x-1) \Rightarrow (x-1)(2x-7) - 3x(x-1) = 0$$

فاکتور از  $(x-1)$

$$\Rightarrow (x-1)[(2x-7) - 3x] = 0 \Rightarrow (x-1)(-x-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ -x-7 = 0 \Rightarrow x = -7 \end{cases}$$

$$\text{مثال ۳} \quad x^2 - 81 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (x-9)(x+9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-9 = 0 \Rightarrow x = 9 \\ x+9 = 0 \Rightarrow x = -9 \end{cases}$$

↓ جذر  
x      9

$$\text{مثال ۴} \quad 25x^2 - (x-4)^2 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} [5x - (x-4)][5x + (x-4)] = 0$$

↓ جذر      ↓ جذر  
5x      (x-4)

$$\Rightarrow (4x+4)(6x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x+4 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ 6x-4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{مثال ۵} \quad x^2 - 11x + 30 = 0 \Rightarrow (x-6)(x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-6 = 0 \Rightarrow x = 6 \\ x-5 = 0 \Rightarrow x = 5 \end{cases}$$

اتحاد جمله مشترک

**تست:** اختلاف ریشه‌های معادله  $9x^2 + 3x - 2 = 0$  کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

$\frac{2}{3}$  (۲)

$\frac{1}{3}$  (۱)

پاسخ:

② **روش ریشه‌گیری (جذرگیری):** در این روش، معادله را به شکل کلی  $\square^2 = \square$  یا  $\square^2 = \square$  تبدیل می‌کنیم. سپس از دو طرف معادله، جذر می‌گیریم و به سمت راست، علامت‌های  $\pm$  نسبت می‌دهیم.

$$\text{مثال ۱} \quad x^2 - 625 = 0 \Rightarrow x^2 = 625 \Rightarrow x^2 = (25)^2 \xrightarrow{\text{جذرا از دو طرف}} \sqrt{x^2} = \sqrt{(25)^2} \Rightarrow x = \pm 25$$

عدد نامنفی ↑





مثال ۲  $49x^2 - 100 = 0 \Rightarrow 49x^2 = 100 \Rightarrow x^2 = \frac{100}{49} \Rightarrow x^2 = \left(\frac{10}{7}\right)^2 \xrightarrow{\text{جذر از دو طرف}} \sqrt{x^2} = \sqrt{\left(\frac{10}{7}\right)^2} \Rightarrow x = \pm \frac{10}{7}$

مثال ۳  $(2x-5)^2 = (x+1)^2 \xrightarrow{\text{جذر از طرفین}} \sqrt{(2x-5)^2} = \sqrt{(x+1)^2} \Rightarrow 2x-5 = \pm(x+1) \Rightarrow \begin{cases} 2x-5 = x+1 \Rightarrow x = 6 \\ 2x-5 = -x-1 \Rightarrow x = \frac{4}{3} \end{cases}$

مثال ۴  $3x^2 - 18 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = \frac{18}{3} \Rightarrow x^2 = 6 \xrightarrow{\text{جذر}} x = \pm\sqrt{6}$

مثال ۵  $10x^2 + 30 = 0 \Rightarrow 10x^2 = -30 \Rightarrow x^2 = -\frac{30}{10} \Rightarrow x^2 = -3$

این معادله جواب ندارد؛ چون حاصل  $x^2$  نمی‌تواند با عددی منفی مساوی شود. (از  $-3$  نمی‌توانیم بجز بگیریم.)

**تست حل‌شده:** در معادله  $(2x-1)^2 = 36$  نصف ریشه بزرگ‌تر کدام است؟

- (۱) ۳ (۲)  $\frac{3}{2}$  (۳) ۷ (۴)  $\frac{7}{4}$

پاسخ:

$(2x-1)^2 = 36 \xrightarrow{\text{جذر}} 2x-1 = \pm 6 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1 = 6 \Rightarrow 2x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{2} \\ 2x-1 = -6 \Rightarrow 2x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{2} \end{cases}$

ریشه بزرگ‌تر  $\frac{7}{2}$  است که نصف آن می‌شود  $\frac{7}{4}$ ؛ پس گزینه (۴) درست است.

**تست:** تعداد ریشه‌های معادله  $x^2 + 100 = 0$  با تعداد ریشه‌های کدام معادله برابر است؟

- (۱)  $x^2 - 100 = 0$  (۲)  $x^2 + 100x = 0$  (۳)  $3x^2 + 75 = 0$  (۴)  $-5x^2 + 40 = 0$

پاسخ:

۳) **روش مربع کامل کردن:** در این روش، معادله را به شکل  $\square^2 = \bigcirc$  تبدیل می‌کنیم. سپس از طرفین جذر می‌گیریم، ولی چه‌طور این کار را انجام می‌دهیم؟ ابتدا عدد ثابت را به سمت راست می‌بریم، سپس اگر ضریب  $x^2$  عدد یک نبود، همه جملات را بر آن ضریب تقسیم می‌کنیم تا ضریب  $x^2$  یک شود. سپس ضریب  $x$  را نصف کرده به توان ۲ می‌رسانیم. عدد حاصل را به دو طرف معادله اضافه می‌کنیم، سمت چپ معادله، قطعاً اتحاد اول یا دوم خواهد بود. سپس همان‌طور که گفتیم، از دو طرف جذر می‌گیریم، مثلاً می‌خواهیم معادله  $x^2 + 4x - 5 = 0$  را به روش مربع کامل حل کنیم:

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \xrightarrow[\text{به راست می‌بریم}]{\text{عدد ثابت یعنی ۵ را}} x^2 + 4x = 5$$

$\downarrow$   
b

باید  $\frac{b^2}{4}$  را به دو طرف اضافه

$$\frac{4^2}{4} = 4 \text{ کنیم یعنی: } x^2 + 4x + 4 = 5 + 4 \Rightarrow (x+2)^2 = 9 \xrightarrow{\text{جذر}} x+2 = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x+2 = 3 \Rightarrow x = 1 \\ x+2 = -3 \Rightarrow x = -5 \end{cases}$$

تجزیه به کمک اتحاد اول

البته در تست‌ها معمولاً گفته می‌شود در روش مربع کامل چه عددی به طرفین معادله اضافه می‌شود؟ در مثالی که حل کردیم دیدیم که عدد ۴ به دو طرف اضافه شد. یا ممکن است سؤال شود در روش مربع کامل از کدام عدد جذر می‌گیریم که در مثال بالا دیدیم از عدد ۹ جذر گرفتیم، ولی اگر خواستیم جواب‌های یک معادله درجه دوم را به دست آوریم، بهتر است از روش مربع کامل استفاده نکنیم. (پهن طولانی است.)

**تست حل‌شده:** در روش مربع کامل کردن برای حل معادله  $2x^2 - 8x + 6 = 0$  پس از آن که ضریب  $x^2$  به یک تبدیل شد، در مرحله آخر، از کدام عدد جذر گرفته می‌شود؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۴ (۴) ۹

پاسخ:

$$2x^2 - 8x + 6 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = -3$$

$$\frac{b^2 - 4ac}{4} = \frac{(-4)^2}{4} = 4 \text{ عدد} \quad \text{را به دو طرف} \quad \xrightarrow{\text{جذر}} x - 2 = \pm 1$$

تساوی اضافه می‌کنیم. تجزیه به کمک اتحاد دوم

پس در مرحله آخر از عدد ۱ جذر می‌گیریم. لذا گزینه (۲) صحیح است. (لازم نیست ریشه‌ها را به دست آوریم.)

**تست:** برای حل معادله  $2x^2 - 3x + 1 = 0$  به روش مربع کامل پس از آن که ضریب  $x^2$  یک شد، چه عددی را باید به دو طرف معادله اضافه کنیم؟

$\frac{9}{36}$  (۴)                       $\frac{9}{16}$  (۳)                       $\frac{9}{25}$  (۲)                       $\frac{9}{8}$  (۱)

پاسخ:

۴) **روش کلی (دلتا):** اگر معادله درجه دوم را به شکل  $ax^2 + bx + c = 0$  نمایش دهیم، به عبارت  $(b^2 - 4ac)$  مبین معادله یا دلتا می‌گوییم و با  $\Delta$  نمایش می‌دهیم. حال بسته به این که  $\Delta$  مثبت، منفی یا صفر باشد، ۳ حالت مختلف رخ می‌دهد:

معادله دو ریشه متمایز دارد که عبارتند از  $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$  اگر  $\Delta > 0$  باشد ( $\Delta$  مثبت باشد): **حالت اول**

معادله یک ریشه مضاعف (تکرارشونده) دارد که عبارتست از  $x = \frac{-b}{2a}$  اگر  $\Delta = 0$  باشد: **حالت دوم**

معادله، هیچ ریشه‌ای ندارد. (ریشه حقیقی ندارد) اگر  $\Delta < 0$  باشد ( $\Delta$  منفی باشد): **حالت سوم**

به عنوان مثال، معادلات زیر را به روش دلتا حل می‌کنیم:

الف)  $x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1 \Rightarrow$  معادله دو ریشه دارد

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{-5 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{-5+1}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \\ x'' = \frac{-5-1}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

ب)  $x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(9) = 36 - 36 = 0 \Rightarrow$  معادله ریشه مضاعف دارد  $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2(1)} = 3$

ج)  $-x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4(-1)(-4) = 9 - 16 = -7 \Rightarrow$  دلتا عددی منفی شده، لذا معادله جواب ندارد.

**تست حل‌شده:** به ازای چه مقداری از  $m$  معادله  $x^2 + 4x - m + 3 = 0$  ریشه مضاعف دارد؟

-۲ (۴)                      ۲ (۳)                      ۱ (۲)                      -۱ (۱)

**پاسخ:** شرط داشتن ریشه مضاعف آن است که  $\Delta$  صفر باشد، لذا:  $\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 4^2 - 4(1)(-m+3) = 0$

$$\Rightarrow 16 - 4(-m+3) = 0 \Rightarrow 16 + 4m - 12 = 0 \Rightarrow 4m = -4 \Rightarrow m = -1 \Rightarrow$$
 گزینه (۱) درست است.

**تست:** به ازای چه مقادیری از  $m$  معادله  $-x^2 + (2m-1)x - m^2 = 0$  دارای ریشه حقیقی نیست؟

$m < -\frac{1}{4}$  (۴)                       $m > -\frac{1}{4}$  (۳)                       $m < \frac{1}{4}$  (۲)                       $m > \frac{1}{4}$  (۱)

پاسخ:



**تست:** ریشه مضاعف معادله  $0 = 4kx^2 - 4kx + 1$  کدام است؟

۲/۵ (۴)

۲ (۳)

۱/۵ (۲)

۱ (۱)

**پاسخ:**

**نکته:** گاهی اوقات، معادله داده شده، درجه ۲ نیست، ولی با روش‌هایی مثل تجزیه یا تغییر متغیر می‌توانیم آن را به یک معادله درجه ۲ تبدیل کنیم. مثلاً معادله  $0 = 4x^2 - 6x + 8$  درجه ۲ نیست؛ چون  $x$  توان ۴ دارد، ولی اگر  $x^2$  را  $t$  فرض کنیم، آن‌گاه به یک معادله درجه ۲ تبدیل خواهد شد:

$$(x^2)^2 - 6x^2 + 8 = 0 \Rightarrow t^2 - 6t + 8 = 0 \Rightarrow (t-4)(t-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \xrightarrow{\text{جذر}} x = \pm 2 \\ t = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \xrightarrow{\text{جذر}} x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک

پس معادله داده شده ۴ جواب دارد.

**تست حل‌شده:** معادله  $0 = x^3 + x^2 - 16x - 16$  چند ریشه دارد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

**پاسخ:** باز هم معادله داده شده، درجه ۲ نیست، ولی با چند بار فاکتورگیری (روش دسته‌بندی) خواهیم داشت:

$$x^3 + x^2 - 16x - 16 = 0 \Rightarrow x^2(x+1) - 16(x+1) = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 - 16) = 0$$

فاکتور از  $x^2$       فاکتور از  $-16$       فاکتور از  $(x+1)$       درجه دوم درجه اول

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ x^2-16=0 \Rightarrow x^2=16 \xrightarrow{\text{جذر}} x=\pm 4 \end{cases} \Rightarrow \text{گزینه (۴) درست است}$$

**تست:** مجموع ریشه‌های معادله  $0 = (x-3)^2 - 4(x-3) + 3$  کدام است؟ (راهنمایی: عبارت  $(x-3)$  را  $t$  فرض کنید.)

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

**پاسخ:**

**چند نکته کاربردی:** ۱- در معادله  $0 = ax^2 + bx + c$  اگر  $a + b + c = 0$  باشد (مجموع ضرایب صفر باشد) بدون حل معادله می‌توان گفت ریشه‌ها عبارتند از  $x' = 1$  و  $x'' = \frac{c}{a}$  ضمناً در معادله مذکور، اگر  $a + c = b$  باشد، باز هم بدون حل می‌توان گفت ریشه‌ها عبارتند از  $x' = -1$  و  $x'' = -\frac{c}{a}$

مثلاً در معادله  $0 = 25x^2 - 20x - 5$  چون  $a + b + c = 0$  است، سریع می‌گوییم که ریشه‌ها عبارتند از:  $x' = 1$  و  $x'' = \frac{c}{a} = \frac{-5}{25} = -\frac{1}{5}$

۲- اگر در متن سؤال، گفته شود معادله درجه دوم، دو ریشه قرینه دارد، اولاً  $b$  باید صفر باشد، ثانیاً علامت‌های  $a$  و  $c$  باید مختلف باشند، به

مثال زیر توجه کنید:

**مثال:**  $m$  چقدر باشد تا معادله  $0 = (m-1)x^2 + (m-4)x + 4 - 2m$  دارای دو ریشه قرینه باشد؟

$$(m-1)x^2 + (m-4)x + 4 - 2m = 0$$

a                      b                      c

شرط اول:  $b = 0 \Rightarrow m - 4 = 0 \Rightarrow m = 4$

$$a \text{ و } c \text{ دارای علامت‌های مختلف‌اند} \Rightarrow \begin{cases} a = m - 1 = 4 - 1 = 3 \\ c = 4 - 2m = 4 - 2 \times 4 = -4 \end{cases}$$

پس جواب  $m = 4$  قابل قبول است. اگر  $a$  و  $c$  علامت‌های یکسان داشتند  $m = 4$  را قبول نمی‌کردیم؛ یعنی می‌گفتیم هیچ مقداری برای  $m$  به دست نمی‌آید.



● **مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم:** در معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  اگر مجموع ریشه‌ها را با  $S$  و حاصل ضرب ریشه‌ها را با  $P$  نمایش دهیم، آنگاه خواهیم داشت: ( $x'$  و  $x''$  ریشه‌های معادله هستند).

$$S = x' + x'' = \frac{-b}{a} \quad \text{و} \quad P = x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$$

پس اگر در یک تست، مجموع یا حاصل ضرب ریشه‌ها خواسته شد، نیازی نیست معادله را به یکی از ۴ روش گفته شده حل کنیم. فقط کافی است از  $S$  و  $P$  استفاده کنیم. ضمناً بهتر است فرمول‌های زیر را حفظ کنید تا سرعت عملتان بالا برود ( $x'$  و  $x''$  را این طور بخوانید  $X$  پریم و  $X$  زگوند).

$$۱) \underbrace{x'^2 + x''^2}_{\text{مجموع مربعات ریشه‌ها}} = S^2 - 2P$$

مجموع مربعات ریشه‌ها

$$۲) \underbrace{x'^3 + x''^3}_{\text{مجموع مکعبات ریشه‌ها}} = S^3 - 3PS$$

مجموع مکعبات ریشه‌ها

$$۳) \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{S}{P}$$

مجموع عکس ریشه‌ها

$$۴) \frac{x'}{x''} + \frac{x''}{x'} = \frac{S^2 - 2P}{P}$$

$$۵) x'x'' + x'^2x'' = P \cdot S$$

$$۶) \sqrt{x'} + \sqrt{x''} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}}$$

**مثال:** در معادله  $-x^2 + 3x + 5 = 0$ ، اگر  $x'$  و  $x''$  ریشه‌های معادله باشند، حاصل عبارات زیر را به دست آورید:

الف)  $x' + x''$

ب)  $x' \cdot x''$

ج)  $x'^2 + x''^2$

د)  $3x' + 3x''$

حل:

$$-x^2 + 3x + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ c = 5 \end{cases}$$

الف)  $x' + x'' = S = \frac{-b}{a} = \frac{-3}{-1} = 3$

ب)  $x' \cdot x'' = P = \frac{c}{a} = \frac{5}{-1} = -5$

ج)  $x'^2 + x''^2 = S^2 - 2P = 3^2 - 2(-5) = 9 + 10 = 19$

د)  $3x' + 3x'' = 3(x' + x'') = 3S = 3 \times 3 = 9$   
فاکتور از ۳

**تذکر:** ممکن است در تست‌ها به جای  $x'$  و  $x''$  از نمادهای  $x_1$  و  $x_2$  یا نمادهای  $\alpha$  و  $\beta$  هم استفاده شود.

**تست حل شده:** اگر حاصل ضرب ریشه‌های معادله  $2mx^2 - (m-3)x + 7 = 0$  برابر  $\frac{7}{4}$  باشد، مجموع ریشه‌های معادله کدام است؟

-۴ (۴)

-۱ (۳)

۴ (۲)

۱ (۱)

پاسخ:

$$2mx^2 - (m-3)x + 7 = 0$$

$\downarrow$                        $\downarrow$                        $\downarrow$   
 $a$                        $b$                        $c$

فرض  $P = \frac{7}{4}$  طبق فرض  $\Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{7}{2m} = \frac{7}{2} \Rightarrow 14m = 14 \Rightarrow m = 1$

گزینه (۳) درست است.  $S = \frac{-b}{a} = \frac{m-3}{2m} = \frac{1-3}{2(1)} = \frac{-2}{2} = -1$

**تست:** در معادله  $4x^2 - 8x - 4 = 0$  حاصل عبارت  $(x'' - 6)(x' + 5) + 11x'$  کدام است؟

-۲۱ (۴)

۲۱ (۳)

-۱۲ (۲)

۱۲ (۱)

پاسخ:







**تست:** در معادله  $-x^2 + 3x + 1 = 0$  حاصل عبارت  $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$  کدام است؟ ( $x_1$  و  $x_2$  همان  $x'$  و  $x''$  یعنی ریشه‌های معادله هستند).

۳ (۱)                      -۳ (۲)                      ۴ (۳)                      -۴ (۴)

**نکته مهم:** گاهی اوقات هر دو جواب یک معادله درجه دوم به ما داده می‌شوند و خود معادله، مجهول است. در این گونه سؤالات، با توجه به این که  $S = x' + x''$  و  $P = x'x''$  پس از یافتن S و P از فرمول  $x^2 - Sx + P = 0$  استفاده می‌کنیم. ضمناً دقت کنید که جواب، منحصر به فرد نیست؛ یعنی اگر معادله به دست آمده را در هر عدد غیرصفری ضرب کنیم، معادله جدید باز هم ریشه‌هایش  $x'$  و  $x''$  است.

**مثال:** معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش  $3 - \sqrt{2}$  و  $3 + \sqrt{2}$  باشند.

**حل:**

$S = x' + x'' = (3 - \sqrt{2}) + (3 + \sqrt{2}) = 6$

معادله خواسته شده:  $x^2 - 6x + 7 = 0 \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 7 = 0 \Rightarrow P = x'x'' = (3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2}) = 9 - 2 = 7$

**تست:** معادله درجه دومی با ریشه‌های  $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{3}$  کدام است؟

مشابه داخل ۹۵

$x^2 - \frac{2}{3}x + 1 = 0$  (۱)                       $x^2 - \frac{2}{3}x - 1 = 0$  (۲)                       $x^2 + \frac{2}{3}x - 1 = 0$  (۳)                       $x^2 + \frac{2}{3}x + 1 = 0$  (۴)

**پاسخ:**

**نکته مهم:** گاهی اوقات فقط یکی از ریشه‌های معادله درجه دوم داده می‌شود و ریشه دیگر مجهول است. در این گونه سؤالات، معمولاً دو روش برای حل وجود دارد. روش اول این است که چون ریشه هر معادله در خود آن معادله صدق می‌کند، ریشه داده شده را به جای Xها قرار می‌دهیم تا پارامتر مسأله که معمولاً آن را با a، b، c، m، k، n و ... نمایش می‌دهند، به دست آید. سپس معادله را یک بار به طور کامل حل می‌کنیم. روش دوم استفاده از مفاهیم S و P است. البته روش دوم، گاهی اوقات قابل استفاده نیست. (در تست پایین توضیح می‌دهیم).

**تست حل شده:** اگر یکی از ریشه‌های معادله  $3x^2 + (m-1)x - 6 = 0$  برابر ۲ باشد، ریشه دیگر کدام است؟

۱ (۱)                      -۱ (۲)                      ۳ (۳)                      -۳ (۴)

**پاسخ:** روش اول: می‌دانیم ریشه هر معادله در خود آن معادله، صادق است، لذا:

$$3x^2 + (m-1)x - 6 = 0 \xrightarrow{x=2} 3(2)^2 + (m-1)(2) - 6 = 0 \Rightarrow 12 + 2m - 2 - 6 = 0 \Rightarrow 2m = -4 \Rightarrow m = -2$$

اکنون در معادله به جای m عدد -۲ را قرار داده و معادله را حل می‌کنیم:

$$3x^2 - 3x - 6 = 0 \xrightarrow{\text{حل به روش دلتا}} \begin{cases} x' = 2 \\ x'' = -1 \end{cases} \text{ یا هر روش دیگر}$$

**روش دوم:**

$$P = \frac{c}{a} \Rightarrow x'x'' = \frac{c}{a} \Rightarrow x'x'' = \frac{-6}{3} = -2$$

حالا به جای  $x'$  یا  $x''$  عدد ۲ را قرار می‌دهیم. بلافاصله ریشه دیگر به دست می‌آید:

$$2x'' = -2 \Rightarrow x'' = -1 \Rightarrow \text{گزینه (۲) درست است}$$

می‌بینید که سرعت روش دوم بسیار بالا است. دقت کنید در این سؤال، نمی‌توانستیم از  $S = \frac{-b}{a}$  استفاده کنیم؛ زیرا در رابطه  $S = \frac{-(m-1)}{3}$  پارامتر m وجود دارد، به همین دلیل از P استفاده کردیم. اگر در یک تست، هم S و هم P دارای پارامتر بودند، حتماً باید از روش اول استفاده کنیم. مانند تست بعدی که البته خودتان باید حل کنید.

**تست:** اگر یکی از ریشه‌های معادله  $mx^2 - (m+1)x + 4 = 0$  برابر ۲ باشد، ریشه دیگر کدام است؟

- $\frac{1}{3}$  (۱)       $\frac{1}{2}$  (۲)      ۳ (۳)      -۲ (۴)

پاسخ:

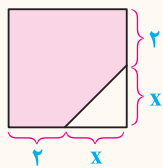
● **کاربرد معادله درجه دوم در حل مسائل توصیفی:** همیشه این طور نیست که یک معادله درجه دوم به شما بدهند و شما خیلی راحت شروع کنید به حل آن. خیلی از سوالات به این شکل است که مجهولی دارد و شما باید به کمک اطلاعات مسأله، یک معادله درجه دوم نوشته و آن مجهول را به دست آورید. فقط به این موضوع توجه کنید که معادله‌ای که می‌نویسید، باید دارای یک متغیر باشد نه بیشتر. مثلاً معادله  $x^2 - 3y + 1 = 0$  به درد ما نمی‌خورد؛ چون دو مجهول  $x$  و  $y$  دارد. پس به کمک فرضیات مسأله، فقط یک مجهول ایجاد کنید.

**مثال:** یک عدد طبیعی را با مربع آن جمع می‌کنیم، حاصل برابر ۴۲ شده است. این عدد کدام است؟

**حل:** عدد طبیعی خاصی مدنظر ماست، پس آن را  $x$  می‌نامیم. با توجه به فرض سؤال خواهیم داشت:

$$x + x^2 = 42 \Rightarrow x^2 + x - 42 = 0 \Rightarrow (x+7)(x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -7 \text{ (غ قق)} \\ x = 6 \text{ (ق ق)} \end{cases}$$

ولی  $x = -7$  رد می‌شود؛ چون عدد طبیعی نیست.



**تست حل‌شده:** در شکل مقابل، مساحت قسمت رنگی برابر ۲۸ است. مقدار  $x$  کدام است؟

- ۲ (۲)      ۱ (۱)  
 ۴ (۴)      ۳ (۳)

پاسخ:

$$28 + \frac{x \cdot x}{2} = (2+x)^2 \Rightarrow 28 + \frac{x \cdot x}{2} = \text{مساحت مثلث} + \text{مساحت مربع}$$

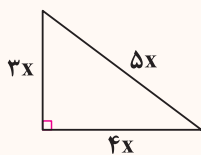
$$\Rightarrow 28 + \frac{x^2}{2} = 4 + 4x + x^2 \xrightarrow{\times 2 \text{ تمام جملات}} 56 + x^2 = 8 + 8x + 2x^2$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب می‌کنیم}} x^2 + 8x - 48 = 0 \Rightarrow (x+12)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -12 \\ x = 4 \end{cases}$$

ولی فقط  $x = 4$  را قبول می‌کنیم؛ چون طول ضلع نمی‌تواند منفی باشد. پس گزینه (۴) درست است.

**تست:** در شکل مقابل، محیط و مساحت مثلث با هم برابرند. طول وتر مثلث کدام است؟

(راهنمایی: از رابطه فیثاغورس استفاده کنید.)



- ۲۵ (۴)      ۹ (۳)      ۱۵ (۲)      ۱۰ (۱)

پاسخ:

**تست:** حاصل ضرب دو عدد زوج مثبت و متوالی برابر ۲۲۴ است. مجموع این دو عدد کدام است؟ (راهنمایی: این دو عدد را  $x$  و  $x+2$  فرض کنید.)

- ۶۰ (۴)      ۵۰ (۳)      ۴۰ (۲)      ۳۰ (۱)

پاسخ:





**کاربرد معادله درجه دوم در حل مسائل سود:** اگر  $x$  تعداد کالاهای تولیدی یک شرکت و  $p$  قیمت هر واحد کالا باشد، آن‌گاه معادله درآمد

شرکت به صورت  $R = x.p$  می‌باشد. ضمناً هر شرکت یا کارخانه دارای یک تابع به نام هزینه است که به شکل **هزینه متغیر + هزینه ثابت =  $C$**  می‌باشد. هزینه ثابت، هزینه مکان شرکت و دستگاه‌ها و تجهیزات است و ربطی به این ندارد که کالایی تولید شود یا نه. هزینه متغیر برابر است با هزینه تولید هر کالا ضرب در تعداد کل کالاها ( $x$ ). مثلاً اگر هزینه ثابت در یک شرکت ۲۰۰۰۰۰۰ تومان و هزینه تولید هر کالا ۴۰۰ تومان باشد، آن‌گاه تابع هزینه عبارتست از:

$$C = 2000000 + 400x$$

ضمناً تابع سود برابر است با درآمد منهای هزینه یعنی:

$$P = R - C$$

**مثال:** اگر  $x$  تعداد کالاهای تولیدی شرکتی باشد و هر کالا ۱۰۰ تومان به فروش برسد و ضمناً هزینه ثابت شرکت برابر ۴۰۰۰۰ تومان و هزینه متغیر (هزینه تولید) برای هر کالا ۲۰ تومان باشد، تابع درآمد، تابع هزینه و تابع سود را به دست آورید.

**حل:**

$$R = x.p = 100x$$

$$C = 40000 + 20x = \text{هزینه متغیر} + \text{هزینه ثابت}$$

$$P = R - C = 100x - (40000 + 20x) = 80x - 40000$$

**نکته مهم:** اگر تابع سود را مساوی صفر قرار دهیم،  $x$  یا  $x$ هایی به دست می‌آیند که در آن‌ها شرکت نه سود می‌کند نه ضرر. به این  $x$  یا  $x$ ها، نقطه یا نقاط سر به سر می‌گوییم. ضمناً اگر تابع سود، درجه دوم باشد و از فرمول  $x = \frac{-b}{2a}$  استفاده کنیم، تعداد کالاهایی به دست می‌آید که به ازای تولید آن‌ها سود شرکت، ماکزیمم خواهد شد. اگر جواب حاصل از  $x = \frac{-b}{2a}$  را در تابع سود به جای  $x$ ها قرار دهیم، مقدار سود ماکزیمم (بیشترین سود) به دست می‌آید.

**مثال:** با فرض آن‌که  $R(x) = 6x - x^2$  و  $C(x) = x + 4$  باشد ( $x$  وزن کالاها بر حسب تن است):

**الف)** معادله سود شرکت را تشکیل دهید.

**ب)** به ازای تولید چه مقدار کالا، این شرکت به نقطه یا نقاط سر به سر خواهد رسید؟

**ج)** به ازای تولید چه مقدار کالا سود، ماکزیمم (حداکثر) می‌شود؟

**د)** بیشترین مقدار سود را به دست آورید.

**حل:**

$$P = R - C = 6x - x^2 - x - 4 = -x^2 + 5x - 4$$

$$P = 0 \Rightarrow -x^2 + 5x - 4 = 0 \xrightarrow{\text{حل به روش دلتا}} \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

پس  $x = 1$  و  $x = 4$  نقاط سر به سر هستند؛ یعنی اگر شرکت ۱ تن کالا یا ۴ تن کالا تولید کند، نه سود می‌کند نه ضرر، ولی اگر بین ۱ و ۴ تن کالا تولید کند، سود می‌کند. مثلاً اگر ۳ تن کالا تولید کند، سود می‌کند.

$$P = -x^2 + 5x - 4 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-5}{2(-1)} = \frac{5}{2} \text{ (تن)}$$

پس اگر شرکت  $\frac{5}{2}$  یا  $2\frac{1}{2}$  تن کالا تولید کند، سودش به حداکثر مقدار خود می‌رسد. دقت کنید چون  $x$  در این مسئله وزن بود، می‌تواند کسری هم باشد، ولی اگر تعداد کالا بود، فقط باید عدد طبیعی می‌شد.

**د)** حالا عدد  $\frac{5}{2}$  را به جای  $x$ ها در معادله سود (تابع سود) قرار می‌دهیم:

$$P = -x^2 + 5x - 4 \xrightarrow{x = \frac{5}{2}} P_{\max} = -\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{5}{2}\right) - 4 = -\frac{25}{4} + \frac{25}{2} - 4 = \frac{-25 + 50 - 16}{4} = \frac{9}{4}$$

**تست:** اگر  $x$  تعداد کالاهای تولیدی در یک کارخانه باشد و ضمناً:

$$R(x) = 240x - \frac{1}{4}x^2$$

$$C(x) = 36000 + 40x$$

بیشترین سود شرکت کدام است؟

۶۸۰۰۰۰ (۴)

۵۸۰۰۰۰ (۳)

۱۶۴۰۰۰ (۲)

۲۶۴۰۰۰ (۱)

پاسخ:

**نکته مهم** گاهی اوقات تابع درآمد مستقیماً به ما داده نمی‌شود و معادله تقاضا را می‌دهند. معادله تقاضا رابطه‌ای است که هم  $x$  دارد هم  $p$ ، مانند  $2x = 1000 - p$  همیشه از معادله تقاضا  $p$  را به  $x$  و  $x$  را به راست تساوی ببرید و  $p$  را بر حسب  $x$  به دست آورید ( $p$  سمت چپ، تنها شود) سپس از فرمول  $R = xp$  تابع درآمد به دست می‌آید. به این شکل که به جای  $p$  آن، عبارتی را که به دست آورده‌اید، قرار دهید.

**مثال:** در یک کارخانه، معادله تقاضا به شکل  $2x = 200 - p$  است. تابع درآمد را به دست آورید.

$$2x = 200 - p \Rightarrow p = -2x + 200$$

$$R = xp = x(-2x + 200) = -2x^2 + 200x$$

**تست حل شده:** در یک کارخانه مدادسازی، هزینه اولیه برابر ۸۰ واحد و هزینه تولید هر مداد ۱۸ واحد است. اگر  $x$  تعداد مدادها و  $p$

قیمت فروش هر مداد باشد و رابطه  $p = 120 - 4x$  برقرار باشد، بیشترین سود کارخانه کدام است؟

۶۴ (۴)

۸۴ (۳)

۹۰ (۲)

۹۸ (۱)

پاسخ:

$$C = 80 + 18x$$

$$x = 120 - 4p \Rightarrow 4p = -x + 120 \xrightarrow{\div 4} p = -\frac{1}{4}x + 30$$

$p$  باید تنها شود

$$R = xp = x\left(-\frac{1}{4}x + 30\right) = -\frac{1}{4}x^2 + 30x$$

$$P = R - C = \left(-\frac{1}{4}x^2 + 30x\right) - (80 + 18x) = -\frac{1}{4}x^2 + 12x - 80$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2\left(-\frac{1}{4}\right)} = 24 \xrightarrow{\text{در تابع سود می‌گذاریم}} P_{\max} = \left(-\frac{1}{4} \times 24^2\right) + (12 \times 24) - 80 = 64 \Rightarrow \text{گزینه (۴) درست است.}$$

**تست:** در یک شرکت، تابع هزینه به شکل  $C = 40x + 8$  و معادله تقاضا به شکل  $x = 200 - p$  است. بیشترین سود شرکت چقدر است؟

۶۴۰۰ (۴)

۵۴۰۰ (۳)

۶۳۹۲ (۲)

۶۰۸۴ (۱)

پاسخ:



## پاسخ سوالات چهار گزینهای

$$(1-x+x^2)(x+1) = x(x^2-1) \Rightarrow x^3+1 = x^3-x \Rightarrow -x=1 \Rightarrow x=-1$$

۲ ۱

اتحاد چاق و لاغر

اگر اتحاد چاق و لاغر را فراموش کرده‌اید، می‌توانید دو پرانتز را به شکل معمولی در هم ضرب کنید.

$$14x = 17x - 84 \Rightarrow 14x - 17x = -84 \Rightarrow -3x = -84 \Rightarrow x = \frac{84}{3} = 28$$

۳ ۲

$$25-x = \frac{x+35}{3} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 3(25-x) = x+35$$

مجموع همان عدد با ۳۵

تفاضل عدد از ۲۵

ثالث

۲ ۳

$$\Rightarrow 75-3x = x+35 \Rightarrow -3x-x = 35-75 \Rightarrow -4x = -40 \Rightarrow x = \frac{40}{4} = 10$$

۲ ۴

$$\begin{cases} x+y=12 \\ x-y=4 \end{cases}$$

در یکی از روابط قرار می‌دهیم

$$2x = 16 \Rightarrow x = 8 \xrightarrow{\text{در یکی از روابط قرار می‌دهیم}} 8+y=12 \Rightarrow y=12-8=4$$

$$xy = 8 \times 4 = 32$$

$$\frac{5}{2}(10x-28) = 3x-2 \Rightarrow \frac{5}{2}(10x) - \frac{5}{2}(28) = 3x-2$$

$$\Rightarrow 25x-70 = 3x-2 \Rightarrow 25x-3x = 70-2 \Rightarrow 22x = 68 \Rightarrow x = \frac{68}{22} = \frac{34}{11} = \alpha$$

$$\frac{2x+1}{3} - \frac{x-5}{2} = \frac{x}{4} \xrightarrow{\times 12 \text{ تمام جملات}} 4(2x+1) - 6(x-5) = 3x$$

$$\Rightarrow 8x+4-6x+30 = 3x \Rightarrow -x = -34 \Rightarrow x = 34 = \beta \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{\frac{34}{11}} = \frac{11 \times 34}{34} = 11$$

۲ ۶

$$y = 4x, y = \frac{2}{5}z \Rightarrow 4x = \frac{2}{5}z \Rightarrow 2z = 20x \Rightarrow z = 10x$$

طبق فرض (میلیون تومان)  $12x + 8y + 5z = 94 \Rightarrow 12x + 8(4x) + 5(10x) = 94 \Rightarrow 94x = 94 \Rightarrow x = 1$

۳ ۷

$$x+x+\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+1=100 \Rightarrow 2x+\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+1=99$$

$$\xrightarrow{\times 4 \text{ تمام جملات}} 8x+2x+x+4=396 \Rightarrow 11x=396 \Rightarrow x = \frac{396}{11} = 36$$

۲ ۸

$$y \begin{cases} \text{مستطیل} \\ x \end{cases} \Rightarrow \text{محیط} = 2(x+y) = 82 \Rightarrow x+y = 41$$

$$y \begin{cases} \text{مربع} \\ x-y \end{cases} \xrightarrow{\text{در مربع، اضلاع با هم مساوی‌اند}} x-y = y \Rightarrow x-y=y$$

$$\begin{cases} x+y=41 \\ x-y=y \end{cases}$$

$$2x = 48 \Rightarrow x = \frac{48}{2} = 24 \xrightarrow{\text{جاگذاری در یکی از معادلات}} 24+y=41 \Rightarrow y=41-24=17$$



اعداد مجهول را  $x$  و  $y$  فرض می‌کنیم. طبق اطلاعات سؤال، خواهیم داشت: ۳ ۹

$$\frac{2}{3}x = \frac{3}{4}y \Rightarrow \frac{2x}{3} = \frac{3y}{4} \xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} 8x = 9y \Rightarrow x = \frac{9}{8}y$$

$$x + y = 136 \xrightarrow{x = \frac{9}{8}y} \frac{9}{8}y + y = 136 \xrightarrow{\times 8} 9y + 8y = 1088 \Rightarrow 17y = 1088 \Rightarrow y = \frac{1088}{17} = 64$$

$$x = \frac{9}{8}y = \frac{9}{8} \times 64 = 72$$

پس عدد کوچک‌تر ۶۴ است.

سن فعلی مجید را  $x$  فرض می‌کنیم؛ پس سن او در سال گذشته  $(x-1)$  می‌باشد و سن رضا در سال گذشته برابر  $2(x-1)$  است؛ پس ۱ ۱۰

سن فعلی رضا برابر است با  $2(x-1) + 1$ . در متن سؤال گفته شده ۵ سال دیگر، مجموع سن آن‌ها ۳۰ می‌شود؛ لذا:

$$x + 5 : \text{سن مجید در } 5 \text{ سال بعد}$$

$$[2(x-1) + 1] + 5 = 2x - 2 + 1 + 5 = 2x + 4$$

$$30 = (x+5) + (2x+4) \Rightarrow 3x = 21 \Rightarrow x = 7$$

$$2x + 8 = x^2 \Rightarrow \underbrace{x^2 - 2x - 8}_{\text{اتحاد جمله مشترک}} = 0 \Rightarrow (x-4)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \text{ (قق)} \\ x = -2 \text{ (غقق)} \end{cases} \Rightarrow \text{مکعب } x = x^3 = 4^3 = 64$$

$$x' = \frac{1}{x''} \xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} \frac{x'x''}{p} = 1 \Rightarrow \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow \frac{m}{2} = 1 \Rightarrow m = 2$$

$$S = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{-(k+1)}{6} = \frac{1}{6} \Rightarrow -k-1 = 1 \Rightarrow k = -2$$

$$\xrightarrow[\text{می‌گذاریم.}]{\text{حل به روش دلتا}} \begin{cases} \text{ریشه مثبت } x = \frac{2}{3} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$S = 10 \Rightarrow \frac{-b}{a} = 10 \Rightarrow \frac{b-2}{1} = 10 \Rightarrow b = 12$$

$$\xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم}]{\text{عدد } b=12 \text{ را در معادله}} x^2 - 10x + 24 = 0 \Rightarrow (x-6)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$P = 5 \Rightarrow \frac{c}{a} = 5 \Rightarrow \frac{1-k}{2} = 5 \Rightarrow 1-k = 10 \Rightarrow k = -9$$

$$\xrightarrow[\text{می‌دهیم}]{\text{حل به روش دلتا}} \begin{cases} \text{ریشه بزرگ تر } x = \frac{5}{2} = 2.5 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$(x^2)^2 + 10x^2 + 9 = 0 \xrightarrow{x^2=t} \underbrace{t^2 + 10t + 9}_{\text{اتحاد جمله مشترک}} = 0 \Rightarrow (t+9)(t+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -9 \Rightarrow x^2 = -9 \\ t = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \end{cases}$$

هیچ‌کدام از معادلات بالا جواب ندارند؛ چون نمی‌توانیم از اعداد منفی جذر بگیریم.

$$x(2x-5) = a \Rightarrow 2x^2 - 5x = a \Rightarrow 2x^2 - 5x - a = 0$$

$$x \text{ ریشه مضاعف } x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-5)}{2(2)} = \frac{5}{4}$$

$$S = P \Rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{c}{a} \Rightarrow -(-3m) = m^2 - 2m \Rightarrow m^2 - 2m - 3m = 0 \Rightarrow m^2 - 5m = 0 \Rightarrow m(m-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 5 \end{cases}$$



۱ ۱۱

۲ ۱۲

۲ ۱۳

۲ ۱۴

۱ ۱۵

۱ ۱۶

۳ ۱۷

۳ ۱۸