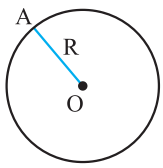
درسنامه ۱

ترسیم‌های هندسی

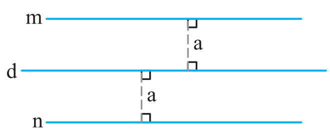


دایره: مجموعهٔ همهٔ نقاطی که از یک نقطهٔ ثابت مانند O به فاصلهٔ معلومی مانند R هستند، دایـره نامیـده می‌شود. O را مرکز و R را شعاع دایره می‌نامند.

مجموعهٔ نقاطی که از یک خط معلوم به فاصلهٔ ثابتی هستند.

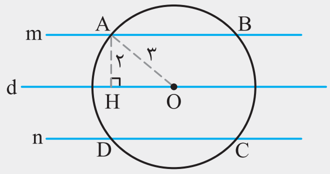
مجموعهٔ نقاطی که از یک خط معلوم به فاصلهٔ ثابتی هستند.

همهٔ نقطه‌هایی که از خط معلوم به فاصلهٔ ثابت a هستند دو خط موازی و به فاصلهٔ a از خط d هستند.



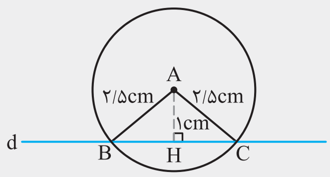
مثال نقطهٔ O روی خط d واقع است. همهٔ نقاطی را تعیین کنید که از نقطهٔ O به فاصلهٔ ۳ واحد و از خط d به فاصلهٔ ۲ واحد هستند.

پاسخ: همهٔ نقاطی که از خط d به فاصلهٔ ۲ واحد قرار دارنـد روی دو خـط m و n مـوازی d و بـه فاصلهٔ ۲ واحد از آن واقع‌اند. از طرفی همهٔ نقاطی که از نقطـهٔ O بـه فاصلـهٔ ۳ هسـتند دایـره‌ای بـه مرکز O و شعاع ۳ است. مطابق شکل این دایره و خط‌های m و n در چهار نقطـهٔ A، B، C و D متقاطع‌اند که جواب هستند.



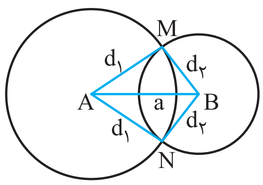
مثال نقطهٔ A به فاصلهٔ ۱ سانتی‌متر از خط d قرار دارد. نقاطی از خط d را بیابید که به فاصلهٔ ۲/۵ سانتی‌متر از نقطهٔ A باشند.

پاسخ: همهٔ نقاطی که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۲/۵ سانتی‌متر قـرار دارنـد روی دایـره‌ای بـه مرکـز A و شعاع ۲/۵ سانتی‌متر قرار دارند. چون فاصلهٔ A از خط d برابر یک سانتی‌متر است پـس ایـن دایـره خط d را در دو نقطهٔ B و C قطع می‌کند و این نقاط جواب‌اند.



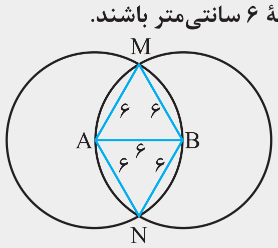
تعیین نقطه‌هایی که از دو نقطهٔ ثابت به فاصله‌های معلوم باشد

فرض کنیم A و B دو نقطهٔ ثابت به فاصلهٔ a از یکدیگر باشند. برای یافتن نقطه‌ای که از A بـه فاصلـهٔ d_1 و از B به فاصلهٔ d_2 باشد دو دایره یکی به مرکز A و شعاع d_1 و دیگری به مرکز B و شعاع d_2 رسم مـی‌کنیم، نقطه یا نقاط تلاقی دو دایره جواب است. مثلاً در شکل مقابل دو نقطهٔ M و N جواب هسـتند. اگـر دو دایـره مماس شوند مسئله یک جواب دارد و در صورتی که دو دایره یکدیگر را قطع نکنند، مسئله جواب ندارد.



مثال دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۶ سانتی‌متر مفروض هستند. نقاطی را بیابید که از دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۶ سانتی‌متر باشند.

پاسخ: دایره‌هایی به مرکز A و B و شعاع‌های ۶ رسم می‌کنیم، نقطهٔ تلاقـی آن‌هـا یعنـی M و N جواب هستند.



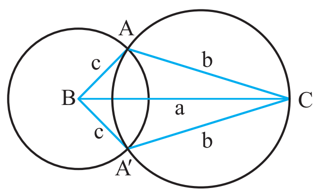
رسم مثلثی که سه ضلع آن معلوم است

ابتدا یکی از سه ضلع داده شده مثلاً بزرگ‌ترین ضلع را رسم می‌کنیم $(BC = a)$، سپس به مرکز B و شعاع c و به مرکز C و شعاع b دو دایـره رسم می‌کنیم. در صورت تقاطع دو دایره، جای رأس سوم مثلث یعنی نقطهٔ A معلوم می‌شود.

آ) اگر دو دایره متقاطع باشند، مسئله دو جواب دارد. مثلث‌های ABC و A′BC که با یکـدیگر بـه حالـت (ض‌ض‌ض) هم‌نهشت‌اند.

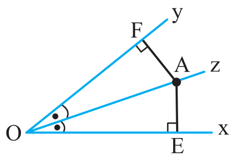
ب) اگر دو دایره مماس باشند، در این صورت مسئله جواب ندارد.

پ) اگر دو دایره متقاطع نباشند، مسئله جواب ندارد.

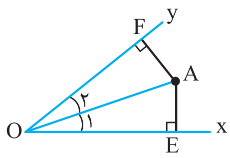


درسنامه ۱

برخی خواص نیمساز یک زاویه

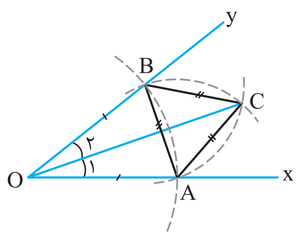


آ) اگر نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه باشد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است، یعنی در شکل مقابل داریم $AE = AF$



ب) اگر نقطه‌ای به فاصلهٔ یکسان از دو ضلع یک زاویه باشد، آن نقطه روی نیمساز آن زاویه قرار دارد. یعنی در شکل مقابل با فرض $AE = AF$، داریم $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

رسم نیمساز یک زاویه



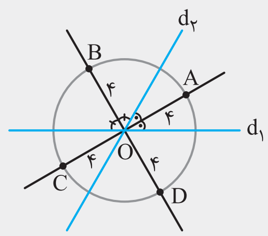
آ) نقطهٔ A را روی نیم‌خط Ox در نظر می‌گیریم، کمانی به مرکز O و شعاع OA رسم می‌کنیم تا نیم‌خط Oy را در نقطهٔ B قطع کند، داریم $OA = OB$

ب) به مرکز A و شعاع AB و بار دیگر به مرکز B و شعاع AB دو کمان رسم می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی این دو کمان را C می‌نامیم.

پ) OC نیمساز زاویهٔ xOy است، زیرا دو مثلث OBC و OAC به حالت (ضضض) هم‌نهشت‌اند، پس $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

مثال

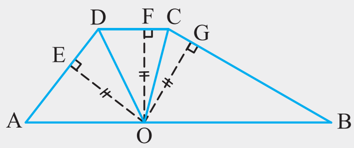
دو خط متقاطع d_1 و d_2 مفروضند. نقطه‌ای بیابید که از نقطهٔ تقاطع دو خط به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر باشد و از هر یک از دو خط d_1 و d_2 به یک فاصله باشد.



پاسخ: نقطه‌ای که از دو خط متقاطع d_1 و d_2 به یک فاصله قرار دارد روی نیمساز زوایای ایجاد شده بین دو خط قرار دارد. از طرفی نقطه‌ای که از نقطهٔ O (محل تلاقی دو خط) به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر است روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۴ سانتی‌متر قرار دارد، پس محل تلاقی این دایره با نیمسازها جواب است یعنی نقاط A، B، C و D

مثال

اندازه‌های دو ساق یک ذوزنقه ۳ و ۵ و اندازهٔ قاعدهٔ کوچک آن ۲ است. نقطه‌ای روی قاعدهٔ بزرگ آن از دو ساق و قاعدهٔ کوچک به یک فاصله است. محیط ذوزنقه را به‌دست آورید.



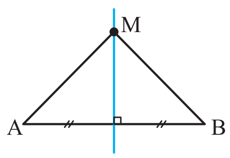
پاسخ: بنا به فرض $OF = OE = OG$، یعنی نقطهٔ O از دو ضلع زاویهٔ ADC به یک فاصله است. پس O روی نیمساز این زاویه است. همچنین O روی نیمساز زاویهٔ DCB است. در نتیجه:

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel CD \text{ ، مورب } OD \Rightarrow A\hat{O}D = O\hat{D}C \\ O\hat{D}C = O\hat{D}A \end{array}\right\} \Rightarrow O\hat{D}A = A\hat{O}D \Rightarrow OA = AD$$

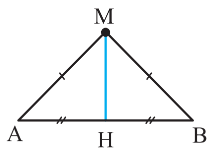
با استدلال مشابه داریم $OB = BC$، پس $AB = OA + OB = AD + BC$، در نتیجه:

محیط $ABCD = \underline{AB} + AD + CD + BC = \underline{AD + BC} + AD + CD + BC =$ ۳ + ۵ + ۳ + ۲ + ۵ = ۱۸

برخی خواص عمودمنصف یک پاره‌خط



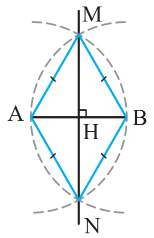
آ) اگر نقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره‌خط قرار داشته باشد، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است.
یعنی در شکل مقابل داریم $MA = MB$



ب) اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.
جهت اثبات آن کافی است M را به H وسط AB وصل کنیم و ثابت کنیم $MH \perp AB$

درسنامه ۱

رسم عمودمنصف یک پاره‌خط



پاره‌خط AB مفروض است.

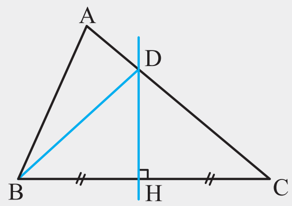
آ) کمانی به مرکز A و شعاع AB رسم می‌کنیم.

ب) کمانی به مرکز B و شعاع AB رسم می‌کنیم.

پ) نقاط تلاقی این دو کمان را M و N می‌نامیم.

ت) خط MN عمودمنصف پاره‌خط AB است، زیرا M و N از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله‌اند.

مثال **در مثلث ABC عمودمنصف ضلع BC، ضلع AC را در نقطهٔ D قطع می‌کند. ثابت کنید اختلاف محیط‌های دو مثلث ABC و ABD برابر طول ضلع BC است.**



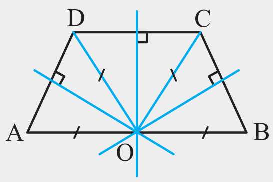
پاسخ: مطابق شکل عمود منصف ضلع BC ضلع AC را در نقطهٔ D قطع کرده است پس $BD = CD$ و در نتیجه $AC = AD + CD = AD + BD$ و داریم:

$$(\text{محیط } \overset{\Delta}{ABD}) = AB + \underbrace{BD + AD} = AB + AC$$

$$(\text{محیط } \overset{\Delta}{ABC}) - (\text{محیط } \overset{\Delta}{ABD}) = (AB + AC + BC) - (AB + AC) = BC$$

مثال **در یک ذوزنقه، عمود منصف‌های ساق‌ها و قاعدهٔ کوچک، روی قاعدهٔ بزرگ متقاطع‌اند. ثابت کنید ذوزنقه، متساوی‌الساقین است.**

پاسخ: مطابق شکل عمودمنصف‌های ساق‌های AD و BC و قاعدهٔ کوچک CD در نقطهٔ O روی قاعدهٔ بزرگ متقاطع‌اند، پس داریم:

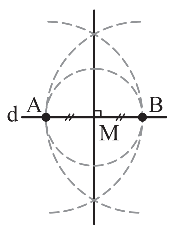


$$OB = OC = OD = OA$$

بنا به قضیهٔ خطوط موازی و مورب $B\hat{O}C = O\hat{C}D$ و $A\hat{O}D = O\hat{D}C$ و چون $O\hat{C}D = O\hat{D}C$

پس $A\hat{O}D = B\hat{O}C$ و این یعنی دو مثلث متساوی‌الساقین BOC و AOD به حالت (ضزض) هم‌نهشت‌اند لذا $AD = BC$، پس ذوزنقهٔ $ABCD$ متساوی‌الساقین است.

رسم خط عمود بر یک خط داده شده از یک نقطه روی آن خط



خط d و نقطهٔ M روی آن مفروض است.

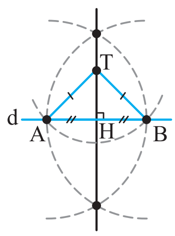
آ) نقطهٔ A متمایز از نقطهٔ M را روی خط در نظر می‌گیریم.

ب) به مرکز M و شعاع MA دایره‌ای رسم می‌کنیم، محل تلاقی دیگر آن را با خط d، B می‌نامیم.

پ) عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم.

ت) این عمودمنصف خطی است که از نقطهٔ M می‌گذرد و بر خط d عمود است.

رسم خط عمود بر یک خط داده شده از یک نقطه غیر واقع بر آن خط



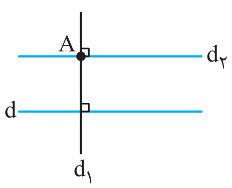
خط d و نقطهٔ T خارج آن مفروض است.

آ) نقطهٔ A را روی خط d در نظر می‌گیریم، اگر TA بر خط d عمود باشد، خط TA جواب است. در غیر این صورت:

ب) به مرکز T و شعاع TA کمانی رسم می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی دیگر آن را با خط d، B می‌نامیم.

پ) عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم، این عمودمنصف، همان خطی است که از نقطهٔ T می‌گذرد (زیرا $TA = TB$ است) و بر خط d عمود است.

رسم خط موازی با یک خط داده شده از نقطهٔ غیر واقع بر آن



خط d و نقطهٔ A خارج آن داده شده است.

آ) از نقطهٔ A خط d_1 را عمود بر خط d رسم می‌کنیم.

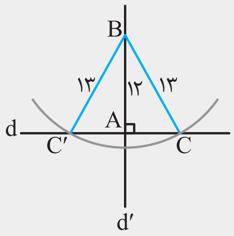
ب) در نقطهٔ A خط d_2 را عمود بر خط d_1 رسم می‌کنیم.

پ) دو خط عمود بر یک خط موازیند، لذا خط d_2 از نقطهٔ A گذشته و موازی خط d است.

درسنامه ۱

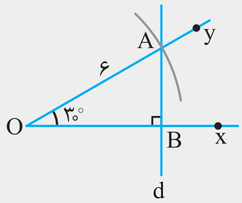
مثال **مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که وتر و یک ضلع آن به‌ترتیب ۱۳ و ۱۲ باشند.**

پاسخ: خط d را در نظر می‌گیریم. در نقطهٔ A روی آن خط d' را عمود بر d رسم می‌کنیم و روی آن پاره‌خط AB را به اندازهٔ ۱۲ جدا می‌کنیم و به مرکز B و شعاع ۱۳کمانی رسم می‌کنیم و نقاط تلاقی آن با خط d را C و C' می‌نامیم. دو مثلث هم‌نهشت ABC و ABC' جواب هستند.



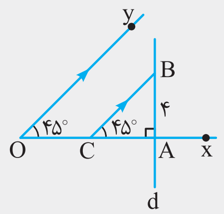
مثال **مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که اندازهٔ وتر آن ۶ و اندازهٔ یک زاویهٔ حادهٔ آن 30° باشد.**

پاسخ: ابتدا زاویهٔ xOy را به اندازهٔ 30° رسم می‌کنیم سپس به مرکز O و شعاع ۶کمانی رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن با نیم‌خط Oy را A می‌نامیم. از نقطهٔ A خط d را عمود بر نیم‌خط Ox رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن با Ox را B می‌نامیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ AOB جواب است.



مثال **مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که اندازهٔ یک ضلع آن ۴ و اندازهٔ زاویهٔ روبه‌رو به آن ضلع ۴۵ درجه باشد.**

پاسخ: ابتدا زاویهٔ xOy به اندازهٔ 45° را رسم می‌کنیم سپس نقطهٔ دلخواه A را روی Ox در نظر می‌گیریم و در این نقطه خط d را عمود بر Ox رسم می‌کنیم. حال پاره‌خط AB را روی خط d برابر ۴ جدا می‌کنیم و از نقطهٔ B خطی موازی نیم‌خط Oy رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن با نیم‌خط Ox یا امتداد آن را C می‌نامیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC جواب است.



۱. پاره‌خط AB به‌طول ۸ سانتی‌متر مفروض است. نقاطی را تعیین کنید که از دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۶ سانتی‌متر باشند.

۲. توضیح دهید چگونه می‌توان مثلثی به طول اضلاع ۵، ۶ و ۷ واحد رسم کرد.

۳. جاهای خالی را به گونه‌ای کامل کنید که مسئلهٔ زیر:
نقاط A و B به فاصلهٔ .... از هم هستند. نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطهٔ A برابر .... و از نقطهٔ B برابر .... باشد.
آ) دو جواب داشته باشد. ب) یک جواب داشته باشد. پ) جواب نداشته باشد.

۴. متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۶ و ۸ باشد. چند متوازی‌الاضلاع با این شرایط می‌توان رسم کرد؟

۵. متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۹ و۱۲ و زاویهٔ بین‌آن‌ها 45° باشد، چند متوازی‌الاضلاع با این شرایط می‌توان رسم کرد؟

۶. مستطیلی رسم کنید که طول قطر آن ۸ سانتی‌متر باشد. چند مستطیل با این شرایط می‌توان رسم کرد؟

۷. یک لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۶ و ۱۰ باشد.

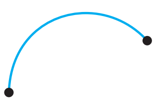
۸. یک لوزی رسم کنید که طول ضلع آن ۵ و طول یک قطرش ۸ باشد.

۹. دو ضلع یک زاویه را در نظر بگیرید.
آ) نقطه‌ای بیابید که فاصلهٔ آن از هر ضلع زاویه، ۳ واحد باشد.
ب) با استفاده از (آ) نیمساز زاویهٔ مورد نظر را رسم کنید.

۱۰. دو نقطهٔ A و B داخل زاویهٔ xOy مفروض هستند. نقطه‌ای چنان بیابید که از دو ضلع زاویه و از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد. چند نقطه با این شرایط می‌توان رسم کرد؟

۱۱. در دایره‌ای به مرکز O و شعاع R وتر AB رسم شده است. ثابت کنید عمودمنصف وتر AB از مرکز دایره می‌گذرد.

۱۲. در شکل مقابل قسمتی از یک دایره داده شده است. مرکز این دایره را تعیین کنید.



۱۳. مستطیلی رسم کنید که طول ضلع‌های آن ۳ و ۴ باشد.

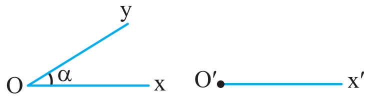
۱۴. ثابت کنید هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

۱۵. ثابت کنید اگر نقطه‌ای از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، آن‌گاه روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

۱۶. ثابت کنید هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.

۱۷. ثابت کنید اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، آن‌گاه روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

۱۸. مطابق شکل زاویهٔ معلوم xOy به اندازهٔ α و نیم‌خط $O'x'$ داده شده‌اند. زاویهٔ $x'O'y'$ را چنان رسم کنید که اندازهٔ آن برابر α باشد.



۱۹. مثلث متساوی‌الساقینی رسم کنید که محیط و ارتفاع وارد بر قاعدهٔ آن به‌ترتیب ۳۹ و ۱۲ سانتی‌متر باشند.

۲۰. مثلثی رسم کنید که اندازهٔ دو ضلع آن ۱۷ و ۱۰ و ارتفاع وارد بر ضلع سوم آن ۸ باشد.

۲۱. مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که یک زاویهٔ حاده و مجموع دو ضلع زاویهٔ قائمهٔ آن معلوم باشد.

۲۲. اندازه‌های دو ضلع مثلثی و میانهٔ نظیر ضلع سوم آن معلوم‌اند. مثلث را رسم کنید.

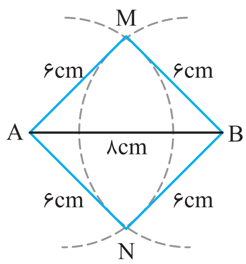
۲۳. مثلث قائم‌الزاویه‌ای بسازید که از آن یک زاویهٔ حاده و مجموع دو ضلع همین زاویه معلوم است.

۲۴. اندازهٔ دو ضلع مثلثی ۶ و ۴ سانتی‌متر و اندازهٔ زاویهٔ روبه‌رو به ضلع ۴ سانتی‌متری، 30° است. مثلث را رسم کنید.

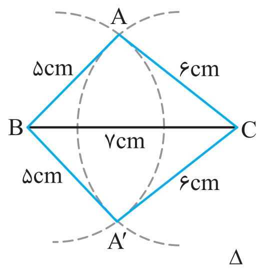
۲۵. اندازهٔ دو ضلع مثلثی ۶ و ۴ سانتی‌متر و اندازهٔ زاویهٔ روبه‌رو به ضلع ۶ سانتی‌متری، 30° است. مثلث را رسم کنید.

پاسخ‌های تشریحی

۱ ابتدا پاره‌خط AB به طول ۸ سانتی‌متر را رسم می‌کنیم، سپس به مرکز A و شعاع ۶ سانتی‌متر و به مرکز B و شعاع ۶ سانتی‌متر دو کمان رسم می‌کنیم، محل تلاقی این دو کمان را M و N می‌نامیم. M و N نقاطی هستند که از دو سر پاره‌خط AB به فاصلهٔ ۶ سانتی‌متر هستند.

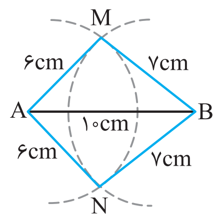


۲ ابتدا یکی از پاره‌خط‌های به طول ۵ یا ۶ یا ۷ را رسم می‌کنیم، مثلاً پاره‌خط بزرگ‌تر $BC=7$. سپس دو دایره به مراکز B و C و شعاع‌های ۵ و ۶ رسم می‌کنیم، محل تلاقی آن‌ها، جای رأس سوم مثلث یعنی نقطهٔ A است.

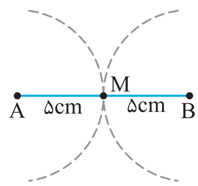


مسئله دارای دو جواب هم‌نهشت $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{A'BC}$ است که یک جواب محسوب می‌شود.

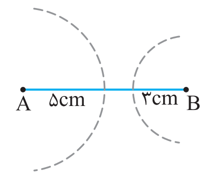
۳ آ) نقاط A و B به فاصلهٔ ۱۰ سانتی‌متر از هم هستند، در این صورت دو نقطه وجود دارد که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۶ سانتی‌متر و از نقطهٔ B به فاصلهٔ ۷ سانتی‌متر باشد.



ب) نقاط A و B به فاصلهٔ ۱۰ سانتی‌متر از هم هستند، در این صورت یک نقطه وجود دارد که از نقطه‌های A و B به فاصلهٔ ۵ سانتی‌متر باشد.



پ) نقاط A و B به فاصلهٔ ۱۰ سانتی‌متر از هم هستند، در این صورت نقطه‌ای وجود ندارد که از نقطهٔ A به فاصلهٔ $5cm$ و از نقطهٔ B به فاصلهٔ $3cm$ باشد.



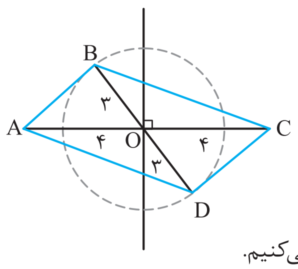
۴ آ) پاره‌خط $AC=8$ را رسم می‌کنیم.

ب) عمودمنصف پاره‌خط AC را رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن با AC را O می‌نامیم، داریم $OA=OC=4$

پ) به مرکز O و شعاع ۳ دایره‌ای رسم می‌کنیم.

ت) یک قطر دلخواه از این دایره مانند BD که بر AC منطبق نیست را رسم می‌کنیم.

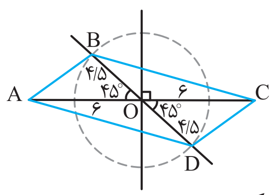
ث) چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع مطلوب است، زیرا قطرهای آن یکدیگر را نصف کرده‌اند.



مسئله بی‌شمار جواب دارد، زیرا بی‌شمار قطر مانند BD می‌توان رسم کرد.

۵ آ) پاره‌خط $AC=12$ را رسم می‌کنیم.

ب) عمودمنصف پاره‌خط AC را رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن را با AC، O می‌نامیم، داریم $OA=OC=6$



پ) به مرکز O و شعاع ۴/۵ دایره‌ای رسم می‌کنیم.

ت) نیمساز زاویهٔ قائمه به رأس O را مطابق شکل رسم می‌کنیم. نقاط تلاقی آن با دایره، B و D می‌باشد.

ث) چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع مطلوب است. زیرا قطرهای آن یکدیگر را نصف کرده‌اند و مسئله دقیقاً یک جواب دارد.

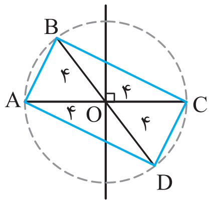
۶ آ) پاره‌خط AC = ۸ را رسم می‌کنیم.

ب) عمودمنصف پاره‌خط AC را رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن با AC را O می‌نامیم، داریم OA = OC = ۴

پ) به مرکز O و شعاع ۴ دایره‌ای رسم می‌کنیم.

ت) قطر دلخواه BD که بر AC منطبق نیست را رسم می‌کنیم.

ث) چهارضلعی ABCD مستطیل است زیرا قطرهای آن برابرند و یکدیگر را نصف می‌کنند و مسئله بی‌شمار جواب دارد.



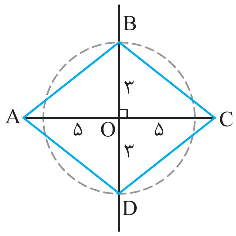
---

۷ آ) پاره‌خط AC = ۱۰ را رسم می‌کنیم.

ب) عمودمنصف پاره‌خط AC را رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن را با AC، O می‌نامیم، داریم OA = OC = ۵

پ) به مرکز O و شعاع ۳ دایره‌ای رسم می‌کنیم، نقطه‌های تلاقی آن با عمودمنصف را B و D می‌نامیم.

ت) چهارضلعی ABCD لوزی است، زیرا قطرهای آن بر هم عمودند و یکدیگر را نصف می‌کنند.



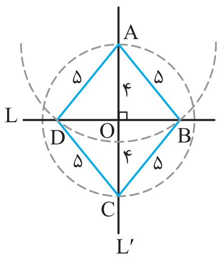
---

۸ آ) دو خط عمود بر هم L و L′ را رسم می‌کنیم.

ب) به مرکز O و شعاع ۴ دایره‌ای رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن با خط L′ را A و C می‌نامیم.

پ) به مرکز A و شعاع ۵ کمانی رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن با خط L را نقاط B و D می‌نامیم. مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ AOB و AOD به حالت برابری وتر و یک ضلع هم‌نهشت‌اند پس OB = OD

ت) ABCD لوزی به ضلع ۵ و قطر ۸ می‌باشد، زیرا قطرهای آن عمودمنصف یکدیگرند.

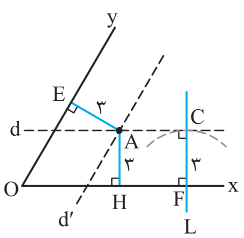


---

۹ آ) خط دلخواه L را در F عمود بر Ox رسم می‌کنیم، کمانی به مرکز F و شعاع ۳ رسم می‌کنیم تا خط L را در نقطهٔ C قطع کند. در نقطهٔ C، خط d را عمود بر L رسم می‌کنیم. همهٔ نقاط خط d از نیم‌خط Ox به فاصلهٔ ۳ می‌باشند.

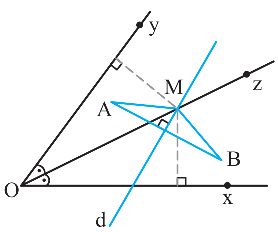
به طریق مشابه خط d′ موازی Oy و به فاصلهٔ ۳ از آن رسم می‌شود، محل تلاقی d و d′ نقطهٔ A است که از دو نیم‌خط Ox و Oy به فاصلهٔ ۳ است.

ب) چون نقطهٔ A از ضلع‌های زاویهٔ xOy به یک فاصله است، پس روی نیمساز زاویهٔ xOy قرار دارد، از طرفی O نقطه‌ای از نیمساز زاویهٔ xOy است. در نتیجه نیم‌خط شامل پاره‌خط OA نیمساز زاویهٔ xOy است.

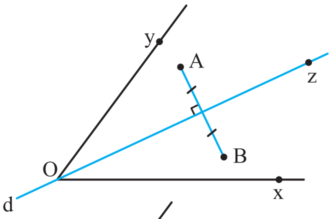


---

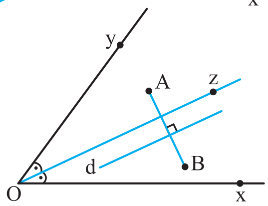
۱۰ Oz نیمساز زاویهٔ xOy و سپس خط d عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن با Oz را M می‌نامیم. نقطهٔ M از دو ضلع زاویهٔ xOy و از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله است.



اگر نیمساز Oz بر خط d منطبق شود در این صورت مسئله بی‌شمار جواب دارد و این وقتی اتفاق می‌افتد که A و B دو طرف Oz قرار گرفته و از آن به یک فاصله باشند.

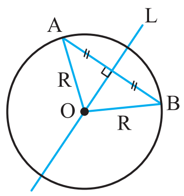


اگر نیمساز Oz و خط d موازی باشند، مسئله جواب ندارد.



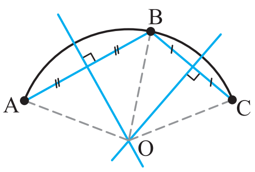
---

۱۱ فرض کنید خط L عمودمنصف وتر AB در دایره‌ای به مرکز O و شعاع R باشد، چون OA = OB = R است، پس نقطهٔ O روی عمودمنصف پاره‌خط AB یعنی خط L قرار دارد.



---

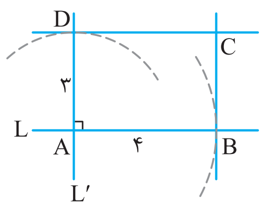
۱۲ نقاط A، B و C را مطابق شکل روی کمان داده شده در نظر می‌گیریم. عمودمنصف پاره‌خط‌های AB و AC را رسم می‌کنیم.



چون هر دوی این عمودمنصف‌ها از مرکز دایره می‌گذرند، پس نقطهٔ تلاقی آن‌ها یعنی نقطهٔ O مرکز دایره‌ای است که این کمان بخشی از آن است.

---

۱۳ دو خط عمود بر هم L و L′ را رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن‌ها را A می‌نامیم. به مرکز A و شعاع ۴ کمانی رسم می‌کنیم تا خط L را در نقطهٔ B قطع کند. همچنین به مرکز A و شعاع ۳ کمانی رسم می‌کنیم تا خط L′ را در نقطهٔ D قطع کند.

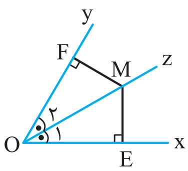


در نقطهٔ B خطی عمود بر L و در نقطهٔ D خطی عمود بر L′ رسم می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی این دو خط را C می‌نامیم. ABCD مستطیل مطلوب است.

---

۱۴ فرض: $\hat{O}_1=\hat{O}_2$، حکم: ME = MF

$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_1=\hat{O}_2\\ OM=OM\\ \hat{E}=\hat{F}=90^\circ\end{array}\right\}$$

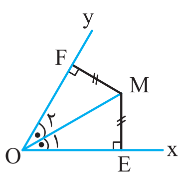


$$\xrightarrow{\text{وتر و یک زاویهٔ حاده}} \overset{\Delta}{OME}\cong\overset{\Delta}{OMF}\Rightarrow ME=MF$$

---

۱۵ فرض: ME = MF، حکم: $\hat{O}_1=\hat{O}_2$

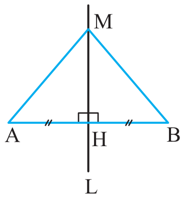
$$\left.\begin{array}{l}OM=OM\\ ME=MF\\ \hat{E}=\hat{F}=90^\circ\end{array}\right\}$$



$$\xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\Delta}{OME}\cong\overset{\Delta}{OMF}\Rightarrow \hat{O}_1=\hat{O}_2$$

یعنی نقطهٔ M روی نیمساز زاویهٔ xOy قرار دارد.

۱۶ فرض: خط L عمودمنصف AB است. ، حکم: $MA = MB$

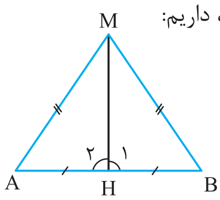


$$\left.\begin{array}{l} AH = BH \\ A\hat{H}M = B\hat{H}M = ۹۰^\circ \\ MH = MH \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \overset{\Delta}{AMH} \cong \overset{\Delta}{BMH} \Rightarrow MA = MB$$

---

۱۷ فرض: $MA = MB$، حکم: M روی عمودمنصف AB قرار دارد.

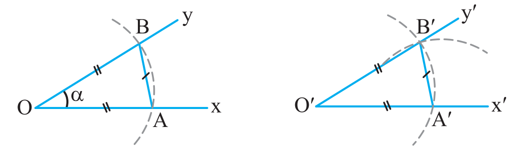
نقطهٔ M را به وسط پاره‌خط AB وصل می‌کنیم، داریم:



$$\left.\begin{array}{l} AM = MB \\ MH = MH \\ AH = BH \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \overset{\Delta}{AMH} \cong \overset{\Delta}{BMH} \Rightarrow \hat{H}_۱ = \hat{H}_۲$$

از طرفی $\hat{H}_۱ + \hat{H}_۲ = ۱۸۰^\circ$، پس $\hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ = ۹۰^\circ$، یعنی MH عمودمنصف پاره‌خط AB است، پس M روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.

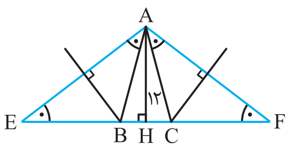
۱۸



نقطهٔ A را غیر از O روی نیم‌خط Ox در نظر می‌گیریم. کمانی به مرکز O و شعاع OA، نیم‌خط Oy را در نقطه‌ای مانند B قطع می‌کند، داریم $OA = OB$. به مرکز O' و شعاع OA کمانی رسم می‌کنیم نقطهٔ تلاقی آن را با نیم‌خط $O'x'$، نقطهٔ A' می‌نامیم. به مرکز A' و شعاع AB کمانی رسم می‌کنیم، یک نقطهٔ تلاقی آن را با کمان قبل نقطهٔ B' می‌نامیم. O' را به B' وصل کرده و امتداد می‌دهیم. اندازهٔ زاویهٔ $x'O'y'$ برابر α است زیرا دو مثلث OAB و $O'A'B'$ به حالت (ض ض ض) هم‌نهشت هستند.

---

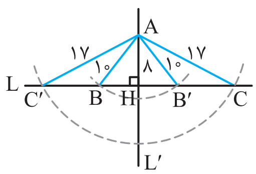
۱۹ پاره‌خط EF به طول ۳۹ سانتی‌متر را رسم می‌کنیم. عمودمنصف این پاره‌خط را رسم می‌کنیم و روی آن پاره‌خط AH را به طول ۱۲ سانتی‌متر جدا می‌کنیم. مثلث AEF متساوی‌الساقین است. عمودمنصف ساق‌های AE و AF را رسم می‌کنیم. نقطهٔ تلاقی آن‌ها را با EF به‌ترتیب B و C می‌نامیم. دو مثلث متساوی‌الساقین ABE و ACF به حالت (ز ض ز) هم‌نهشت‌اند.



پس $BE = AB = AC = CF$. در نتیجه محیط مثلث متساوی‌الساقین ABC برابر $EF = ۳۹$ است و ارتفاع وارد بر قاعدهٔ آن $AH = ۱۲$ است.

---

۲۰ دو خط عمود بر هم L و L' را رسم می‌کنیم. AH را روی L' برابر ۸ جدا می‌کنیم. به مرکز A و به شعاع ۱۰ و شعاع ۱۷ دو کمان رسم می‌کنیم. نقاط تلاقی آن‌ها با خط L را B، B'، C و C' می‌نامیم.

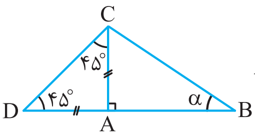


مثلث‌های ABC، $AB'C'$، $AB'C$ و ABC' جواب‌اند و مسئله دارای دو جواب متمایز ABC و $AB'C$ است.

زیرا $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{AB'C'}$ و $\overset{\Delta}{AB'C} \cong \overset{\Delta}{ABC'}$

---

۲۱ بنا به فرض $\hat{B} = \alpha$ و $AB + AC = k$ معلوم هستند. ابتدا پاره‌خط $BD = k$ را رسم می‌کنیم. زاویه‌ای به اندازهٔ ۴۵° و α را به‌ترتیب در رأس‌های D و B می‌سازیم. محل برخورد اضلاع دیگرشان را C می‌نامیم. از C بر BD عمود می‌کنیم. پای عمود را A می‌نامیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC جواب است.

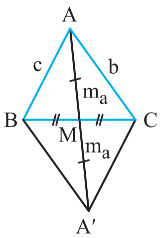


زیرا $AB + AC = AB + AD = BD = k$

و $\hat{B} = \alpha$

---

۲۲ بنا به فرض $AB = c$، $AC = b$ و $AM = m_a$ معلوم هستند، میانهٔ AM را به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ A' به‌دست آید. چهارضلعی $ABA'C$ متوازی‌الاضلاع است زیرا قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند، پس $A'C = AB = c$

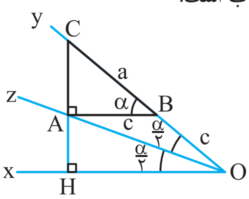


مثلث $AA'C$ سه ضلعش معلوم است ($A'C = c$، $AC = b$ و $AA' = ۲m_a$)، آن را رسم می‌کنیم. CM را از سمت M به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم، تا نقطهٔ B به‌دست آید.

A را به B وصل می‌کنیم. ABC مثلث مطلوب است.

---

۲۳ بنا به فرض، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، $\hat{B} = \alpha$ و $AB + BC = k$ معلوم هستند. زاویهٔ xOy را برابر α و نیمساز آن، Oz، را رسم می‌کنیم. به مرکز O و شعاع k کمانی رسم می‌کنیم تا نیم‌خط Oy را در C قطع کند، از نقطهٔ C عمود CH را بر Ox رسم کرده، نقطهٔ تلاقی آن با Oz را A می‌نامیم. از نقطهٔ A خطی موازی Ox رسم می‌کنیم تا Oy را در نقطهٔ B قطع کند. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC جواب است.

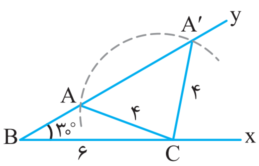


زیرا بنابه قضیهٔ خطوط موازی و مورب، اندازهٔ زاویهٔ OAB برابر $\frac{\alpha}{۲}$ است، پس $AB = OB$ و در نتیجه $AB + BC = OB + BC = OC = k$ می‌شود و $\hat{B} = \alpha$ است.

---

۲۴ ابتدا زاویهٔ xBy را به اندازهٔ ۳۰° رسم می‌کنیم.

به مرکز B و شعاع ۶ کمانی رسم می‌کنیم تا نیم‌خط Ox را در نقطهٔ C قطع کند. به مرکز C و شعاع ۴ سانتی‌متر کمانی رسم می‌کنیم. نقاط تلاقی آن با نیم‌خط By را A و A' می‌نامیم. مثلث‌های غیر هم‌نهشت ABC و $A'BC$ جواب هستند.



---

۲۵ ابتدا زاویهٔ xBy را به اندازهٔ ۳۰° رسم می‌کنیم.

به مرکز B و شعاع ۴ سانتی‌متر کمانی رسم می‌کنیم تا نیم‌خط Bx را در C قطع کند. به مرکز C و شعاع ۶ سانتی‌متر کمانی رسم می‌کنیم. این کمان نیم‌خط By را دقیقاً در یک نقطه مثلاً به نام A قطع می‌کند. مثلث ABC جواب است.